应用数学和力学, 第 19 卷 第 4 期(1998 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

Tas, Telci 和 Fisher 定理的一个注记*

A. 巴勒吉①　　B. 辛•撒克②

(丁协平推荐, 1996 年 9 月 20 日收到)

摘　　要

本文证明了 Tas, Telci 和 Fisher[2] 不动点定理中的连续性条件不是必要条件, 并且(X, d)的完备性可用 $T(X)$ 的完备性来替换•

关键词　不动点　映射　连续性

中图分类号　O189

§1. 前　　言

最近发表的 Tas, Telci 和 Fisher 的论文[2]改进和推广了 Sharma 和 Shau[1] 的不动点定理:

定理 A　设 A, B, S 和 T 为完备度量空间(X, d)上的自映射, 对 X 中的任意 x, y, 满足如下条件:

$$A(X) \subseteq T(X),\quad B(X) \subseteq S(X) \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}[d(Ax, By)]^2 \leqslant\; & c_1 \max\{[d(Sx, Ax)]^2, [d(Ty, By)]^2, [d(Sx, Ty)]^2\} \\ & + c_2 \cdot \max\{d(Sx, Ax) \cdot d(Sx, By), d(Ax, Ty) \cdot d(By, Ty)\} \\ & + c_3 \cdot d(Sx, By) \cdot d(Ty, Ax)\end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $c_1, c_2, c_3 \geqslant 0$, $c_1 + 2c_2 < 1$, $c_1 + c_3 < 1$•

设其中一个映射是连续的• 如果 A 和 B 分别与 S 和 T 相容, 则 A, B, S 和 T 具有公共不动点 z• 同时, z 为 A 和 S 及 B 和 T 的唯一公共不动点•

本文将证明上述定理中的连续性条件不是必要条件• 并且(X, d) 的完备性可用 $T(X)$ 的完备性来替换•

§2. 主 要 结 果

定理　设 A, B, S 和 T 为度量空间(X, d) 的自映射, 满足(1.1)、(1.2) 及如下条件:

$$T(X) \text{ 是完备的} \tag{2.1}$$

如果 A, S 和 B, T 相容, 则 A, B, S 和 T 具有唯一公共不动点•

证明　由于 $A(X) \subseteq T(X)$, $B(X) \subseteq S(X)$, 对任意 $x_0 \in X$, 我们可以归纳性地定义序列

* 本文原文为英文由吴承平译为中文, 丁协平校

① 印度国立 L. B. 女子 P. G 学院数学系
② 印度国立 B. H. S. S., GARIABAND, Dist Raipur, 493889

$\{y_n\}$ 如下

$$\left.\begin{aligned} y_{2n-1} &= Tx_{2n-1} = Ax_{2n-2} \\ y_{2n} &= Sx_{2n} = Bx_{2n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.2}$$

定义 $d_n = d(y_n, y_{n+1})$

由[2]的引理3.1, $\{y_n\}$ 为一Cauchy序列• 另一方面, $T(X)$ 中的序列 $\{y_{2n}\}$ 也为Cauchy序列• 因 $T(X)$ 是完备的, 所以对某 $v \in X$, $\{y_{2n}\}$ 收敛于点 $p = Tv$• 因此 $y_n \to v$• 对 $n \in \mathbf{N}$, 利用三角不等式, 有

$$d(p, Bv) \leqslant d(p, Ax_{2n}) + d(Ax_{2n}, Bv)$$

由(1.2)可得出

$$\begin{aligned} d(p, Bv) < d(p, Ax_{2n}) &+ [c_1 \cdot \max\{[d(Sx_{2n}, Ax_{2n})]^2, [d(Tv, Bv)]^2, \\ &[d(Sx_{2n}, Tv)]^2\} + c_2 \cdot \max\{d(Sx_{2n}, Ax_{2n}) \cdot d(Sx_{2n}, Bv), \\ &d(Ax_{2n}, Tv) \cdot d(Bv, Tv)\} + c_3 \cdot d(Sx_{2n}, Bv) \cdot d(Tv, Ax_{2n})]^{1/2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

由于 $\{y_n\}$ 及其任意子序列收敛于 p, 则由(2.3)及 $\{y_n\}$ 的定义有

$$d(p, Bv) < d(p, Bv) \qquad \text{即 } p = Bv = Tv \tag{2.4}$$

但由于 $B(X) \subseteq S(X)$, 因此存在 $u \in X$ 使 $Su = Bv = Tv$ 成立• 利用(1.2)式, 有

$$\begin{aligned} d(Au, Bv) &\leqslant [c_1 \cdot \max\{[d(Su, Au)]^2, [d(Tv, Bv)]^2, [d(Su, Tv)]^2 \\ &\quad + c_2 \cdot \max\{d(Su, Au) \cdot d(Su, Bv), d(Au, Tv) \cdot d(Bv, Tv) \\ &\quad + c_3 \cdot d(Su, Bv) \cdot d(Tv, Au)]^{1/2} \\ &< d(Au, Bv) \end{aligned}$$

因此 $Au = Bv$

从而

$$p = Bv = Tv = Su = Au \tag{2.5}$$

因为 A, S 相容, 由(2.5)可知 $Ap = ASu = SAu = Sp$, 又有

$$\begin{aligned} d(Ap, Bv) &\leqslant [c_1 \cdot \max\{[d(Sp, Ap)]^2, [d(Tv, Bv)]^2, [d(Sp, Tv)]^2 \\ &\quad + c_2 \cdot \max\{d(Sp, Ap) \cdot d(Sp, Bv), d(Ap, Tv) \cdot d(Bv, Tv)\} \\ &\quad + c_3 \cdot d(Sp, Bv) \cdot d(Tv, Ap)]^{1/2} \\ &< d(Ap, p) \end{aligned}$$

因此 $Ap = p$

类似地, 因 B, T 相容, 有 $p = Bp = Tp$• 所以 $p = Ap = Bp = Sp = Tp$• 由(1.2)立即可得出不动点的唯一性•

定理证毕•

参 考 文 献

1 B. K. Sharma and N. K. Sahu, Common fixed points of three continuous mappings, Math. Student, **59** (1991), 77—86.

2 K. Tas, M. Telci and B. Fisher, Common fixed point theorems for compatible mappings, Internat. J. Math. Sci., **19**(3) (1996), 451—456.

A Note on a Theorem of Tas, Telci and Fisher

A. Banerjee
(Department of Mathematics, Govt. L.B. Girls P. G. College, Raipur (MP), 492001, India)
B. Singh Thakur
(Govt. B.H.S.S., Gariaband, Dist. Raipur, 493889, India)

Abstract

In this paper, it has been shown that the condition of continuity in the fixed point theorem of Tas, Telci and Fisher[2] is not necessary. Also the completeness of (X, d) can be replaced by the completeness of $T(X)$.

Key words fixed point, mapping, continuity