应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

没有线性结构的极大极小定理与鞍点定理*

郑喜印① 温忠②

(丁协平推荐, 1995 年 11 月 10 日收到, 1997 年 12 月 8 日收到修改稿)

摘　要

在没有线性结构的一般集合上引入了函数的一种“凹(凸)”性概念, 得到一个没有线性结构的 Fan Ky 不等式; 在此基础上, 在一般的拓扑空间上建立了极大极小定理, 并把著名的鞍点定理推广到没有线性结构的拓扑空间上•

关键词　极大极小定理　鞍点定理　拓扑空间
中图分类号　O177

§1. 引　　言

Fan Ky 不等式是非线性分析中一个非常重要的工具, 它通常被写成如下形式: 设 X 是某一拓扑线性空间的非空紧凸子集, $\varphi(x, y)$ 是定义在 $X\times X$ 上的实函数, 如果(ⅰ) 对任意的 $y\in X$, $\varphi(x, y)$ 关于 x 下半连续; (ⅱ) 对任意的 $x\in X$, $\varphi(x, y)$ 关于 y 拟凹• 则存在 $x_0\in X$, 使 $\sup\limits_{y\in X}\varphi(x_0, y)\leqslant\sup\limits_{x\in X}\varphi(x, x)$•

自 Fan Ky 在 1972 年给出这一定理后, 许多作者对之做了推广(见[1– 3])• 这些推广都保留了条件(ⅰ) —— $\varphi(x, y)$ 关于 x 下半连续, 其本质的改进在于对 $\varphi(x, y)$ 关于 y“凹性”的逐步弱化• 例如, 从拟凹减弱为对角拟凹, 由对角拟凹弱化到 γ 对角拟凹, 再由 γ 对角拟凹弱化到 γ 广义拟凹等等• 上面这些凹性都是在具有线性结构的凸集上定义的, 相应的 Fan Ky 不等式的推广形式都是在拓扑线性空间上给出的• 本文在没有任何线性结构的一般集合上引入了函数 γ 凹样的概念, 并讨论了这种凹性与原有几种凹性间的关系• 基于 γ 凹样的概念, 我们给出了一个没有线性结构的 Fan Ky 不等式•

二个对手零一和对策的数学模型可以通过三元组(X, Y, φ)给出, 其中 X 和 Y 是非空集合, 它们表示二个对手的策略空间(strategy space), φ 是对策的支付函数(payoff), 一个定义在 $X\times Y$ 上的函数• 这种对策的一个重要问题是找出充分条件使下式成立

$$\inf_{x\in X}\sup_{y\in Y}\varphi(x, y)=\sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}\varphi(x, y)\tag{1.1}$$

当(1.1)成立时, 称对策(X, Y, φ)有值• 有关(1.1)成立的定理称为极大极小定理• 大多数的极大极小定理都涉及到线性结构(见[4], [6]和[3]以及那里的参考文献)• Fan[4], Terkelsen[6], Irle[7], Garaghty 和 Lin[8], 张石生[9]以及 Gwinner 和 Oettli[5]研究了没有线性结构的极大极小定理• 比(1.1)更有意义的是找出$(x, y)\in X\times Y$ 使对一切 $x\in X$, $y\in Y$ 有

* 云南省应用基础研究基金资助项目
① 云南大学数学系, 昆明 650091
② 华南师范大学教育科学研究所, 广州 510631

$$\varphi(x, y) \leqslant \varphi(x, y) \leqslant \varphi(x, y) \tag{1.2}$$

满足(1.2)的(x, y)称为$\varphi(x, y)$在$X \times Y$上的鞍点. 本文建立了新的没有线性结构的极大极小定理. 并给出了只需拓扑条件的更为一般的鞍点定理.

§2. γ凹(凸)样的函数

定义 设X和Y是二个非空集, $\varphi: X \times Y \to R$, $\gamma \in R$, 我们称$\varphi(x, y)$关于y是γ凹(凸)样的, 若对Y的任何有限子集K都存在$x_0 \in X$使得

$$\gamma \geqslant \max_{y \in K} \varphi(x_0, y) \quad \left(\leqslant \min_{y \in K} \varphi(x_0, y)\right)$$

命题 2.1 设X和Y是某拓扑线性空间的二个非空凸子集, $\varphi: X \times Y \to R$关于$x$下半连续, $\gamma \in R$, 如果$\varphi(x, y)$关于y是γ广义拟凹的, 则$\varphi(x, y)$关于y是γ凹样的(关于γ广义拟凹的概念见[3]p.111或[2]).

证明 因为$\varphi(x, y)$关于y是γ广义拟凹的, 所以对Y的任何有限子集$K = \{y_1, \cdots, y_n\}$存在$\{x_1, \cdots, x_n\} \subset X$使得对任何$\{y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}\} \subset K$及任意的$x \in \mathrm{co}(\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\})$都有

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant k} \varphi(x, y_{i_j}) \leqslant \gamma \tag{2.1}$$

令$G: K \to 2^X$使得对每个$y_i \in K$

$$G(y_i) = \{x \in X \mid \varphi(x, y_i) \leqslant \gamma\} \cap \mathrm{co}(\{x_1, \cdots, x_n\})$$

由$\varphi(x, y)$关于x下半连续容易验证$G(y_i)$是非空紧集. 由(2.1), 对K的任何子集$\{y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}\}$我们有$\mathrm{co}(\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}) \subset \bigcup_{j=1}^{k} G(y_{i_j})$. 所以$G: K \to 2^X$是广义的KKM映射(见[3]p.110或[2]). 由广义KKM定理(见[3]p.114或[2]), $\bigcap_{i=1}^{n} G(y_i) \neq \varnothing$. 取$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} G(y_i)$, 则有$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi(x_0, y_i) \leqslant \gamma$. 所以$\varphi(x, y)$关于$y$是γ凹样的.

由于$\varphi(x, y)$关于y γ对角拟凹$\Rightarrow \varphi(x, y)$关于$y$ γ广义拟凹. 所以当$\varphi(x, y)$关于x下半连续时, $\varphi(x, y)$关于y γ对角拟凹$\Rightarrow \varphi(x, y)$关于$y$是γ凹样的, 特别地, $\varphi(x, y)$关于y对角拟凹$\Rightarrow \varphi(x, y)$关于$y$是$\gamma = \sup_{x \in X} \varphi(x, x)$凹样的.

命题 2.2 设X和Y是二个非空集合, $\varphi: X \times Y \to R$, $\mathscr{B}$为Y的所有有限子集构成的族, 记$\Gamma = \sup_{K \in \mathscr{B}} \inf_{x \in X} \max_{y \in K} \varphi(x, y)$. 则

(i) 当$\gamma > \Gamma$时, $\varphi(x, y)$关于y是γ凹样的;

(ii) 当$\gamma < \Gamma$时, $\varphi(x, y)$关于y不是γ凹样的.

证明 (i) 当$\gamma > \Gamma$时, 对Y的任何有限子集K都有$\gamma > \inf_{x \in X} \max_{y \in K} \gamma(x, y)$. 所在存在$x_0 \in X$使得$\gamma > \max_{y \in K} \varphi(x_0, y)$, 故$\varphi(x, y)$关于$y$是γ凹样的.

(ii) 当$\gamma < \Gamma$时, 存在Y的有限子集K_0使得$\gamma < \inf_{x \in X} \max_{y \in K_0} \varphi(x, y)$, 即对任意的$x \in X$都有$\gamma < \max_{y \in K_0} \varphi(x, y)$. 所以$\varphi(x, y)$关于$y$不是γ凹样的.

推论 2.1 设X和Y为某拓扑线性空间的非空凸子集, $\varphi: X \times Y \to R$, Γ同命题2.2且$\varphi(x, y)$关于x下半连续, 则

(i) 当$\gamma > \Gamma$时, $\varphi(x, y)$关于y是γ广义拟凹的;

(ii) 当$\gamma < \Gamma$时, $\varphi(x, y)$关于y不是γ广义拟凹的.

证明 (i) 由命题2.2, $\varphi(x, y)$关于y是γ凹样的. 所以对Y的任何有限子集$K =$

$\{y_1, \ldots, y_n\}$ 存在 $x_0 \in X$ 使得 $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi(x_0, y_i) \leqslant \gamma$. 取 $x_1 = \cdots = x_n = x_0$, 那么对任何 $\{y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}\} \subset K$ 及 $x \in \mathrm{co}(\{x_{i_1}, \cdots x_{i_k}\}) = \{x_0\}$ 有 $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} \varphi(x, y_{i_j}) \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi(x_0, y_i) \leqslant \gamma$. 故 $\varphi(x, y)$ 关于 y 是 γ 广义拟凹的.

(ii) 由命题 2.1 与命题 2.2 即得.

推论 2.2 设 X 是某一拓扑线性空间的非空凸子集, $\varphi: X \times X \to R$, $\mathscr{B}$ 表示 X 的所有有限子集构成的族. 如果

(i) $\varphi(x, y)$ 关于 x 下半连续;

(ii) $\varphi(x, y)$ 关于 y 是对角拟凹的(特别地是拟凹的).

则
$$\sup_{K \in \mathscr{B}} \inf_{x \in X} \max_{y \in K} \varphi(x, y) \leqslant \sup_{x \in X} \varphi(x, x)$$

§3. 主 要 结 果

为方便起见, 我们先给出一些记号.

设 X 和 Y 是二个非空集合, $\varphi(x, y)$ 是 $X \times Y$ 上的实函数. 我们称 $\varphi(x, y)$ 关于 x 具有 (C1), 如果对任意的 $x_1, x_2 \in X$, Y 的任何有限子集 K 及任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $x_0 \in X$ 使得对一切 $y \in K$ 都有
$$\varphi(x_0, y) \leqslant \min\{\varphi(x_1, y), \varphi(x_2, y)\} + \varepsilon \tag{C1}$$
称 $\varphi(x, y)$ 关于 y 具有 (C2), 若对任意的 $y_1, y_2 \in Y$, X 的任何有限子集 L 及任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $y_0 \in Y$ 使得对一切 $x \in L$ 都有
$$\varphi(x, y_0) \geqslant \max\{\varphi(x, y_1), \varphi(x, y_2)\} - \varepsilon \tag{C2}$$
我们称 $\varphi(x, y)$ 关于 x 是 Convex(Concave)_like(见[4] 或[5]), 如果对任意的 $x_1, x_2 \in X$ 及任意的 $0 < t < 1$ 存在 $x_0 \in X$ 使得对一切 $y \in Y$ 都有
$$\varphi(x_0, y) \leqslant t\varphi(x_1, y) + (1 - t)\varphi(x_2, y)\ (\geqslant t\varphi(x_1, y) + (1 - t)\varphi(x_2, y))$$
我们称 $\varphi(x, y)$ 关于 y 是几乎 Concave_like(见[5]), 若对任意的 $y_1, y_2 \in Y$, 任意的有限集 $L \subset X$, 任意的 $0 < t < 1$ 及任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $y_0 \in Y$ 使对一切 $x \in L$ 有
$$\varphi(x, y_0) \geqslant t\varphi(x, y_1) + (1 - t)\varphi(x, y_2) - \varepsilon$$
引理 3.1 设 X 是拓扑空间, Y 是一非空集合, $\varphi: X \times Y \to R$ 满足

(i) $\varphi(x, y)$ 关于 x 下半连续;

(ii) $\varphi(x, y)$ 关于 y 是 γ 凹样的;

(iii) 存在 Y 的有限子集 K_0 使得 $\{x \in X \mid \varphi(x, y) \leqslant \gamma, y \in K_0\}$ 是 X 的紧子集;

则存在 $x \in X$ 使 $\sup\limits_{y \in Y} \varphi(x, y) \leqslant \gamma$.

证明 记 $A = \{x \in X \mid \varphi(x, y) \leqslant \gamma, y \in K_0\}$, 则 A 是紧集. 对每个 $y \in Y$, 令 $G(y) = \{x \in X \mid \varphi(x, y) \leqslant \gamma\} \cap A$, 则 $G(y)$ 是紧集. 对 Y 的任意有限子集 K, 记 $K_1 = K \cup K_0$. 由 $\varphi(x, y)$ 关于 y 是 γ 凹样的, 存在 $x_0 \in X$ 使 $\max\limits_{y \in K_1} \varphi(x_0, y) \leqslant \gamma$. 所以 $x_0 \in \bigcap\limits_{y \in K} G(y)$. 这意味着 $\{G(y) \mid y \in Y\}$ 是一族具有有限交性质的紧集. 所以存在 $x \in \bigcap\limits_{y \in Y} G(y)$, 故 $\sup\limits_{y \in Y} \varphi(x, y) \leqslant \gamma$.

引理 3.1 是一个没有线性结构的 Fan Ky 型不等式, 它推广了[1] 与[2] 的主要结果.

引理 3.2 设 X 和 Y 是二个非空集合, $\varphi, \psi: X \times Y \to R$ 满足 $\varphi \leqslant \psi$ (即: $\forall (x, y) \in X \times Y$, $\varphi(x, y) \leqslant \psi(x, y)$) 如果下面条件之一成立

(ⅰ) $\varphi(x, y)$ 关于 x 具有(C1);

(ⅱ) $\varphi(x, y)$ 关于 y 具有(C2)•

则
$$\inf_{L\in\mathscr{A}}\sup_{y\in Y}\min_{x\in L}\phi(x, y) \geqslant \sup_{K\in\mathscr{B}}\inf_{x\in X}\max_{y\in K}\varphi(x, y)$$
其中 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 分别是 X 和 Y 的所有有限子集构成的族•

证明　当(ⅰ)成立时,我们先来证明对任意 $\varepsilon > 0$, 任意的 $L\in\mathscr{A}$ 及任意的 $K\in\mathscr{B}$ 存在 $x\in X$ 使得对一切 $y\in K$ 都有
$$\varphi(x, y) \leqslant \min_{x\in L}\varphi(x, y) + \varepsilon \tag{3.1}$$
显然,当 L 只有一个元素时(3.1)成立• 假设 L 含有 n 个元素时(3.1)成立• 由数学归纳法,我们只须说明当 $L = \{x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ 有 $n+1$ 个元素时,(3.1)成立即可• 由归纳假设存在 $\hat{x}\in X$ 使得对一切 $y\in K$ 都有
$$\varphi(\hat{x}, y) \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i, y) + \varepsilon/2$$
由于 $\varphi(x, y)$ 关于 x 具有(C1),所在存在 $x\in X$ 使得对一切 $y\in K$ 有
$$\varphi(x, y) \leqslant \min\{\varphi(\hat{x}, y), \varphi(x_{n+1}, y)\} + \varepsilon/2 \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n+1}\varphi(x_i, y) + \varepsilon$$
由(3.1)和 $\varphi\leqslant\phi$ 容易验证对任意的 $\varepsilon > 0$, 任意的 $L\in\mathscr{A}$ 及 $K\in\mathscr{B}$ 都有
$$\inf_{x\in X}\max_{y\in K}\varphi(x, y) \leqslant \sup_{y\in Y}\min_{x\in L}\varphi(x, y) + \varepsilon \leqslant \sup_{y\in Y}\min_{x\in L}\phi(x, y) + \varepsilon$$
所以
$$\sup_{K\in\mathscr{B}}\inf_{x\in X}\max_{y\in K}\varphi(x, y) \leqslant \inf_{L\in\mathscr{A}}\sup_{y\in Y}\min_{x\in L}\phi(x, y) + \varepsilon$$
这意味着
$$\sup_{K\in\mathscr{B}}\inf_{x\in X}\max_{y\in K}\varphi(x, y) \leqslant \inf_{L\in\mathscr{A}}\sup_{y\in Y}\min_{x\in L}\phi(x, y)$$

当(ⅱ)成立时, $-\phi(x, y)$ 关于 y 具有(C1)而且 $-\phi\leqslant -\varphi$• 利用上面已证的结论便得此时亦真•

下面的引理是[5]中一个主要结果•

引理 3.3([5]定理3)　设 X 是一非空集合, Y 是拓扑空间, $\varphi, \phi: X\times Y\to R$ 使得 $\varphi\leqslant\phi$, 并设存在有限集 $L\subset X$ 及 $\varepsilon > 0$ 使得 $\{y\in Y \mid \phi(x, y) \geqslant -\varepsilon, x\in L\}$ 是 Y 的紧子集• 如果 $\varphi(x, y)$ 关于 x 是Convex_like, $\phi(x, y)$ 关于 y 是几乎 Concave_like 且 $\phi(x, y)$ 关于 y 上半连续,那么下面的(ⅰ)意味着(ⅱ)•

(ⅰ) 对一切 $x\in X$, $\sup_{y\in Y}\varphi(x, y) \geqslant 0$;

(ⅱ) 存在 $y\in Y$ 使对一切 $x\in X$, $\phi(x, y) \geqslant 0$•

引理 3.4　设 X, Y, φ, ϕ, $\mathscr{A}$ 及 $\mathscr{B}$ 同引理 3.2•

如果 $\varphi(x, y)$ 关于 x 是 Convex_like 且 $\phi(x, y)$ 关于 y 是几乎 Concave_like, 则
$$\sup_{K\in\mathscr{B}}\inf_{x\in X}\max_{y\in K}\varphi(x, y) \leqslant \inf_{L\in\mathscr{A}}\sup_{y\in Y}\min_{x\in L}\phi(x, y)$$

证明　我们只须说明对任意的 $L\in\mathscr{A}$ 及 $K\in\mathscr{B}$ 都有
$$\sup_{y\in Y}\min_{x\in L}\phi(x, y) \geqslant \inf_{x\in X}\max_{y\in K}\varphi(x, y)$$
记 $\alpha = \inf_{x\in X}\max_{y\in K}\varphi(x, y)$, 则 $\alpha < +\infty$• 不失一般性可设 $-\infty < \alpha$• 令 $f(x, y) = \varphi(x, y) - \alpha$, $g(x, y) = \phi(x, y) - \alpha$• 显然对一切 $x\in X$ 都有 $\max_{y\in K} f(x, y) \geqslant 0$• 在 K 上取离散拓扑,则 K 是紧空间且 $g(x, y)$ 关于 y 在 K 上连续• 由假设容易验证 f 和 g 在 $X\times K$ 上满足引理 3.3 的条件• 由引理 3.3, 存在 $y\in K$ 使对一切 $x\in X$ 都有 $g(x, y) \geqslant 0$, 也就是 $\inf_{x\in X}\phi(x, y) \geqslant \alpha$• 所以
$$\sup_{y\in Y}\min_{x\in L}\phi(x, y) \geqslant \inf_{x\in X}\phi(x, y) \geqslant \alpha = \inf_{x\in X}\max_{y\in K}\varphi(x, y)$$

定理 3.1　设 X 和 Y 是拓扑空间，$\varphi, \psi: X \times Y \to R$，$\varphi \leqslant \psi$ 并满足

(Ⅰ)　$\varphi(x, y)$ 关于 x 下半连续；

(Ⅱ)　$\psi(x, y)$ 关于 y 上半连续；

(Ⅲ)　存在 $\varepsilon > 0$，$L_0 \in \mathscr{A}$ 及 $K_0 \in \mathscr{B}$ 使 $\{x \in X \mid \varphi(x, y) \leqslant \Gamma_1 + \varepsilon, y \in K_0\}$ 和 $\{y \in Y \mid \psi(x, y) \geqslant \Gamma_2 - \varepsilon, x \in L_0\}$ 都是紧集（其中 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 分别是 X 和 Y 的所有有限子集构成的族，

$$\Gamma_1 = \sup_{K \in \mathscr{B}} \inf_{x \in X} \max_{y \in K} \varphi(x, y), \quad \Gamma_2 = \inf_{L \in \mathscr{A}} \sup_{y \in Y} \min_{x \in L} \psi(x, y))$$

如要下列条件之一成立

(ⅰ)　$\varphi(x, y)$ 关于 x 具有(C1)；

(ⅱ)　$\psi(x, y)$ 关于 y 具有(C2)；

(ⅲ)　$\varphi(x, y)$ 关于 x 是 Convex_like 且 $\psi(x, y)$ 关于 y 是几乎 Concave_like．

则存在 $x \in X, y \in Y$ 使 $\inf_{x \in X} \psi(x, y) \geqslant \sup_{y \in Y} \varphi(x, y)$． 所以成立着

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \psi(x, y) \geqslant \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} \varphi(x, y)$$

证明　由引理 3.2 与引理 3.4，当(ⅰ)，(ⅱ)和(ⅲ)之一成立时 $\Gamma_1 \leqslant \Gamma_2$． 所以我们只须证明存在 $x \in X$，$y \in Y$ 使得 $\sup_{y \in Y} \varphi(x, y) \leqslant \Gamma_1$ 且 $\Gamma_2 \leqslant \inf_{x \in X} \psi(x, y)$． 令 $A = \{x \in X \mid \varphi(x, y) \leqslant \Gamma_1 + \varepsilon, y \in K_0\}$，由(Ⅲ)知 A 是紧集． 对任意的 $K \in \mathscr{B}$ 记 $K_1 = K_0 \cup K$，$X_0 = \{x \in X \mid \varphi(x, y) \leqslant \Gamma_1 + \varepsilon, y \in K_1\}$． 由命题 2.2，$\varphi(x, y)$ 关于 y 是 $\Gamma_1 + \varepsilon$ 凹样的． 所以 X_0 是 A 的非空子集． 由(Ⅰ)，X_0 是闭集，因此 X_0 是非空紧集． 容易验证 $\inf_{x \in X \setminus X_0} \max_{y \in K_1} \varphi(x, y) \geqslant \Gamma_1 + \varepsilon$． 这意味着

$$\inf_{x \in X_0} \max_{y \in K_1} \varphi(x, y) = \inf_{x \in X} \max_{y \in K_1} \varphi(x, y) \leqslant \Gamma_1$$

由(Ⅰ)，$\max_{y \in K_1} \varphi(x, y)$ 是 x 的下半连续函数． 再由 X_0 是紧集，存在 $x_0 \in X_0$ 使

$$\max_{y \in K_1} \varphi(x_0, y) = \inf_{x \in X_0} \max_{y \in K_1} \varphi(x, y) \leqslant \Gamma_1$$

所以 $\max_{y \in K} \varphi(x_0, y) \leqslant \Gamma_1$． 故 $\varphi(x, y)$ 关于 y 是 Γ_1 凹样的．(Ⅰ)和(Ⅲ)意味着 $\{x \in X \mid \varphi(x, y) \leqslant \Gamma_1, y \in K_0\}$ 是紧集． 据引理 3.1，存在 $x \in X$ 使得 $\sup_{y \in Y} \varphi(x, y) \leqslant \Gamma_1$． 由(Ⅱ)，$-\psi(x, y)$ 关于 y 下半连续． 显然

$$\sup_{L \in \mathscr{A}} \inf_{y \in Y} \max_{x \in L} -\psi(x, y) = -\Gamma_2$$

且 $\{y \in Y \mid -\psi(x, y) \leqslant -\Gamma_2 + \varepsilon, x \in L_0\} = \{y \in Y \mid \psi(x, y) \geqslant \Gamma_2 - \varepsilon, x \in L_0\}$ 是紧集． 由上面已证的结果，存在 $y \in Y$ 使 $\sup_{x \in X} -\psi(x, y) \leqslant -\Gamma_2$ 即 $\inf_{x \in X} \psi(x, y) \geqslant \Gamma_2$．

定理 3.2　设 X 和 Y 是拓扑空间，$\varphi: X \times Y \to R$ 满足

(Ⅰ)　$\varphi(x, y)$ 关于 x 下半连续；

(Ⅱ)　$\varphi(x, y)$ 关于 y 上半连续；

(Ⅲ)　存在 $\varepsilon > 0$，$L_0 \in \mathscr{A}$ 和 $K_0 \in \mathscr{B}$ 使 $\{x \in X \mid \varphi(x, y) \leqslant \Gamma + \varepsilon, y \in K_0\}$ 和 $\{y \in Y \mid \varphi(x, y) \geqslant \Gamma - \varepsilon, x \in L_0\}$ 都是紧集（其中 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 同定理 3.1，$\Gamma = \sup_{K \in \mathscr{B}} \inf_{x \in X} \max_{y \in K} \varphi(x, y)$）．

如果下列条件之一成立

(ⅰ)　$\varphi(x, y)$ 关于 x 具有(C1)；

(ⅱ)　$\varphi(x, y)$ 关于 y 具有(C2)；

(ⅲ)　$\varphi(x, y)$ 关于 x 是 Convex_like 并且关于 y 是几乎 Concave_like．

则存在 $(x, y) \in X \times Y$ 使对一切 $x \in X$ 及一切 $y \in Y$ 有

$$\varphi(x, y) \leqslant \varphi(x, y) \leqslant \varphi(x, y)$$

证明 记 $\Gamma = \inf_{L \in \mathscr{A}} \sup_{y \in Y} \min_{x \in L} \varphi(x, y)$• 由引理 3.2 和引理 3.4, 当(i),(ii)和(iii)之一成立时 $\Gamma \geqslant \Gamma$• 这意味着 $\{ y \in Y \mid \varphi(x, y) \geqslant \Gamma - \varepsilon, x \in L_0 \} \subset \{ y \in Y \mid \varphi(x, y) \geqslant \Gamma - \varepsilon, x \in L_0 \}$• 由(II)和(III), $\{ y \in Y \mid \varphi(x, y) \geqslant \Gamma - \varepsilon, x \in L_0 \}$是紧集• 据定理3.1存在 $x \in X$ 及 $y \in Y$ 使 $\inf_{x \in X} \varphi(x, y) \geqslant \sup_{y \in Y} \varphi(x, y)$• 所以对一切 $x \in X$ 及一切 $y \in Y$ 都有

$$\varphi(x, y) \leqslant \varphi(x, y) \leqslant \varphi(x, y)$$

定理 3.2 与熟知的鞍点定理相比不仅去掉了线性结构而且弱化了紧性条件•

参 考 文 献

1 J. X. Zhou and G. Chen, Diagonal convexity conditions for problems in convex analysis and guasi_variational inequalities, J. Math. Anal. Appl., **132**(1) (1988), 213—225.

2 S. S. Chang and Y. Zhang, Generalized KKM theorem and variational inequalities, J. Math. Anal. Appl., **159**(1) (1991), 208—223.

3 张石生,《变分不等式和相补问题》, 上海科学技术出版社 (1991), 100—159.

4 K. Fan, Minimax theorems, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **39**(1) (1953), 42—47.

5 J. Gwinner and W. Oettli, Theorems of the alternative and duality for inf_sup problems, Math. Oper. Res., **19**(1) (1994), 238—256.

6 F. Terkesen, Some minimax theorems, Math. Scand, **31**(2) (1972), 405—413.

7 A. Irle, A general minimax theorem, Z. Oper. Res., **29**(7) (1985), 229—247.

8 M. A. Geraghty and B. L. Lin, Topological minimax theorems, Proc. Amer. Math. Soc., **91**(3) (1984), 377—380.

9 S. S. Chang, S. W. Wu and S. W. Xiang, A topological KKM theorem and minimax theorems, J. Math. Anal. Appl., **182**(3) (1994), 756—767.

Minimax Theorem and Saddle Point Theorem without Linear Structure

Zheng Xiyin

(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, P. R. China)

Wen Zhonglin

(Institute of Educational Science, South China Normal University, Guangzhou 510631, P. R. China)

Abstract

In the paper, a new kind of concavity of a function defined on a set without linear structure is introduced and a generalization of Fan Ky inequality is given. Minimax theorem in a general topological space is obtained. Moreover, a saddle point theorem on a topological space without any linear structure is established.

Key words minimax theorem, saddle point theorem, topological space