

一般各向异性复合材料层板基体 损伤性能衰减研究(I) —— 分解刚度法建立($\theta_m/90_n$)_s 开裂层板本构关系

华 玉^① 王兴国^① 邴正能^②

(沈亚鹏推荐, 1995 年 12 月 29 日收到, 1997 年 12 月 15 日收到修改稿)

摘 要

本文尝试将损伤复合材料层板性能衰减研究扩展到含一般各向异性铺层的基体开裂层板。在第一部分中, 采用分解刚度法处理法向与剪切响应的耦合问题, 对承受面内载荷的对称约束开裂($\theta_m/90_n$)_s 层板, 导出本构关系的近似解析解, 将层板有效刚度表为裂纹密度的函数。

关键词 复合材料层板 一般各向异性 损伤 本构关系 分解刚度

中图分类号 TB332

§ 1. 引 言

含损伤复合材料层板本构关系的建立是复合材料损伤力学中一项困难和基础性的任务。纤维增强复合材料层板的独特优越性在于它借助不同铺设方式产生力学性能的可设计性, 而恰恰由于这一特点, 导致层板的各向异性及其界面复杂性, 从而增加了层板力学性能分析的难度, 尤其是含损伤层板。

基体开裂是层板工作过程中起始最早、最常发生的一类损伤, 其宏观力学响应近年已被广为关注和研究。迄今为止, 对于正交各向异性铺层的包含中心开裂层的对称层板, 已建立了完整的损伤层板本构关系。一些研究结果在有效刚度中包含了约束层影响, 将其表为基体裂纹密度的函数, 具有明确的损伤变量和较高的量化程度^{[1]~[6]}。本文作者在文献[7]、[8]中研究了开裂层前后约束非对称的情形, 建立了本构关系, 但仍局限于正交各向异性铺层。R. J. Nuismer 和 S. C. Tan 曾在文献[1]中预言, 他们提出的开裂层板本构关系建立方法可以推广到一般各向异性约束层情况, 但必将大大增加问题的复杂性(add considerable algebraic complications)。事实上, 当层板各层为正交各向异性时, 其面内的法向与剪切响应分离, 可各自建立本构关系; 当层板包含一般各向异性铺层时, 便不存在上述自然解耦条件, 法向与剪切响应相

① 河北理工学院, 河北 唐山 063009

② 北京航空航天大学, 北京 100083

互耦合,这时问题的复杂性不仅在于数学分析的巨大工作量,而主要在于耦合问题的障碍。本文作者的尝试表明,直接依照文献[1]的方法研究开裂层板本构关系是难以进行的,且找不到解耦的途径。

为了突破耦合问题的障碍,本文提出了分解刚度阵的方法。在约束层为一般各向异性时,其刚度阵中含耦合刚度项。本文的求解思想是将耦合项分离,刚度阵一分为二,分解为一个准正交各向异性材料刚度阵和一个除耦合刚度外含许多零元素的刚度阵;将开裂层板本构关系问题也相应一分为二,分解为一个准正交各向异性层板开裂问题与一个相对简化耦合问题。前一问题有解^[1],后一问题尽管仍非常复杂但其求解成为可能。此时可参照文献[1]、[7]的方法分别讨论其解答,最后叠加得到原开裂层板的本构关系解。本文应用上述方法建立了含一般各向异性铺层对称约束开裂 $(\theta_m/90_n)_s$ 层板的本构关系。

§ 2. 问题的建立与分解

图1给出对称约束开裂 $(\theta_m/90_n)_s$ 层板单元,取部分为分析模型如图2,层板单元处于平面应力状态,施加应力分量为 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 。(1)层为开裂层,裂纹张开沿 x 轴方向并具有均匀裂纹间距 $2l$ 。假定应变场沿 y 方向不变,出平面剪应力沿层厚线性变化。这一模型与文献[1]分析模型的重要区别在于,文献[1]限制(2)层约束层必须为正交各向异性,而此处(2)层为任意铺层,即允许

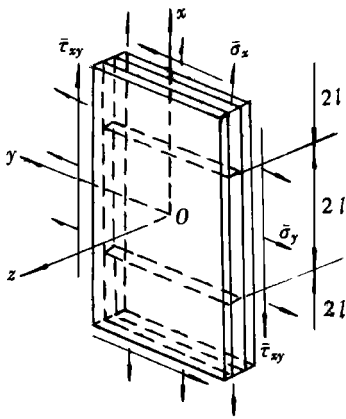


图1 对称约束开裂 $(\theta_m/90_n)_s$ 层板

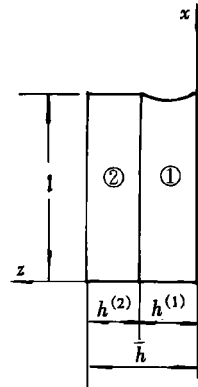


图2 开裂层板分析模型

$$Q_{16}^{(2)} \neq 0, \quad Q_{26}^{(2)} \neq 0, \quad C_{45}^{(2)} \neq 0 \tag{2.1}$$

它们为(2)层面内折减刚度及出平面刚度中的耦合项。由于耦合刚度的存在,层板面内的法向响应与剪切响应将耦合在一起,按照文献[1]的方法,直接求解损伤层板本构关系是极为困难的。

本文为使耦合问题可解,将原问题分化为不含耦合刚度与包含耦合刚度的 a 、 b 两部分。首先将约束层刚度进行分解。把面内平均应力分开记作

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^{(2)} \\ \sigma_y^{(2)} \\ \tau_{xy}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xa}^{(2)} \\ \sigma_{ya}^{(2)} \\ \tau_{xya}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xb}^{(2)} \\ \sigma_{yb}^{(2)} \\ \tau_{xyb}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

其中, a 、 b 部分的无损本构方程各为

$$\text{前一} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xa}^{(2)} \\ \sigma_{ya}^{(2)} \\ \tau_{xya}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(2)} & Q_{12}^{(2)} & 0 \\ Q_{12}^{(2)} & Q_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)'} \\ \epsilon_y \\ v^{(2)'} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xb}^{(2)'} \\ \sigma_{yb}^{(2)'} \\ \tau_{xyb}^{(2)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_{16}^{(2)'} \\ 0 & 0 & Q_{26}^{(2)'} \\ Q_{16}^{(2)'} & Q_{26}^{(2)'} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(2)'} \\ \epsilon_y \\ v^{(2)'} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

图 1

层厚

$u^{(2)}$ 、 $v^{(2)}$ 表示(2)层平均位移, 一撇表示对 x 的导数, ϵ_y 为 y 方向平均均匀应变。对于(2)层的出平面剪应力, 也分开记作

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz}^{(2)} \\ \tau_{xz}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{yza}^{(2)} \\ \tau_{xza}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{yzb}^{(2)} \\ \tau_{xzb}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

其中各部分无损时出平面本构方程为

$$\begin{bmatrix} \tau_{yza}^{(2)} \\ \tau_{kza}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}^{(2)} & 0 \\ 0 & C_{55}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{yz}^{(2)} \\ v_{xz}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{yzb}^{(2)} \\ \tau_{xzb}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{45}^{(2)} \\ C_{45}^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{yz}^{(2)} \\ v_{xz}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

各式中 $Q_{ij}^{(2)}$ 、 $C_{ij}^{(2)}$ 为(2)层面内折减刚度或出平面刚度。分解后耦合刚度仅在 b 部分出现。相应地, (1)层开裂层刚度也须分解为 a 、 b 两部分

$$\text{其中} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x^{(1)} \\ \sigma_y^{(1)} \\ \tau_{xy}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xa}^{(1)} \\ \sigma_{ya}^{(1)} \\ \tau_{kya}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xb}^{(1)} \\ \sigma_{yb}^{(1)} \\ \tau_{xyb}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tau_{yz}^{(1)} \\ \tau_{xz}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{yza}^{(1)} \\ \tau_{xza}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{yzb}^{(1)} \\ \tau_{xzb}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

其中两部分无损本构方程各为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xa}^{(1)} \\ \sigma_{ya}^{(1)} \\ \tau_{xya}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11a}^{(1)} & Q_{12a}^{(1)} & 0 \\ Q_{12a}^{(1)} & Q_{22a}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66a}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(1)'} \\ \epsilon_y \\ v^{(1)'} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tau_{yza}^{(1)} \\ \tau_{xza}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44a}^{(1)} & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{yz}^{(1)} \\ v_{xz}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xb}^{(1)} \\ \sigma_{yb}^{(1)} \\ \tau_{xyb}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11b}^{(1)} & Q_{12b}^{(1)} & 0 \\ Q_{12b}^{(1)} & Q_{22b}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66b}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(1)'} \\ \epsilon_y \\ v^{(1)'} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tau_{yzb}^{(1)} \\ \tau_{xzb}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44b}^{(1)} & 0 \\ 0 & C_{55b}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{yz}^{(1)} \\ v_{xz}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

综合

将两层间沿 x 、 y 方向的界面剪应力 τ_{xz}^{12} 、 τ_{yz}^{12} 作为各层应力应变的中介变量和建立损伤层板本构关系求解方程的基本未知量。考虑 a 、 b 问题中各层分离体的平衡^[1], 可以平衡方程的形式表达界面剪应力与各层平均正应力、平均剪应力之间的关系。由 x 、 y 方向平衡有

$$\tau_{xz}^{12} = \tau_{xza}^{12} + \tau_{xzb}^{12}, \quad \tau_{yz}^{12} = \tau_{yza}^{12} + \tau_{yzb}^{12} \quad (2.11)$$

其中

$$8 \quad \left. \begin{aligned} - \tau_{xza}^{12} &= h^{(1)} \alpha_{xa}^{(1)'} & \mathcal{A} - \tau_{yza}^{12} &= h^{(1)} \tau_{xya}^{(1)} \\ \tau_{xza}^{12} &= h^{(2)} \alpha_{xa}^{(2)'} & \tau_{yza}^{12} &= h^{(2)} \tau_{xya}^{(2)'} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} -\tau_{xz}^{12} &= h^{(1)} \sigma_{xb}^{(1)'} & -\tau_{yz}^{12} &= h^{(1)} \tau_{xyb}^{(1)} \\ \tau_{xz}^{12} &= h^{(2)} \sigma_{xb}^{(2)'} & \tau_{yz}^{12} &= h^{(2)} \tau_{xyb}^{(2)'} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

开裂层板的平均位移边界条件为

$$\text{当 } x = 0, \quad u^{(1)}(0) = u^{(2)}(0) = 0, \quad v^{(1)}(0) = v^{(2)}(0) = 0 \quad (2.14)$$

层板平均应力边界条件也分解为两部分

当 $x = l$,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xa}^{(1)}(l) &= 0, & \sigma_{xa}^{(2)}(l) &= \frac{h}{h^{(2)}} \sigma_{xa} \\ \tau_{xya}^{(1)}(l) &= 0, & \tau_{xya}^{(2)}(l) &= \frac{h}{h^{(2)}} \tau_{xya} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xb}^{(1)}(l) &= 0, & \sigma_{xb}^{(2)}(l) &= \frac{h}{h^{(2)}} \sigma_{xb} \\ \tau_{xyb}^{(1)}(l) &= 0, & \tau_{xyb}^{(2)}(l) &= \frac{h}{h^{(2)}} \tau_{xyb} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

其中

$$\sigma_{xa} + \sigma_{xb} = \sigma_x, \quad \tau_{xya} + \tau_{xyb} = \tau_{xy} \quad (2.17)$$

经上述分解后,原来的任意铺层对称约束开裂问题一分为二,变为一个准正交各向异性铺层对称约束开裂问题(a问题)与一个包含耦合刚度对称约束开裂问题(b问题)的叠加。前一个问题可以利用文献[1]的分析方法和解答,后一个问题仍为耦合问题,但因刚度阵中较多零元素,较原问题有一定简化。下面就 a、b 问题研究其本构关系的求解。

§ 3. a、b 问题的求解

对于耦合问题(b问题),应用层间剪应力沿层厚线性分布的假设以及几何方程、层间剪应力剪应变关系,可以导出界面剪应力与两层平均位移差之间的一组关系

$$\left. \begin{aligned} h^{(1)} C_{45}^{(2)} \tau_{xz}^{12} + h^{(2)} C_{55b}^{(1)} \tau_{yz}^{12} &= 3C_{55b}^{(1)} C_{45}^{(2)} (u^{(2)} - u^{(1)}) \\ h^{(2)} C_{44b}^{(1)} \tau_{xz}^{12} + h^{(1)} C_{45}^{(2)} \tau_{yz}^{12} &= 3C_{44b}^{(1)} C_{45}^{(2)} (v^{(2)} - v^{(1)}) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

利用面内本构关系(2.4)、(2.10)及平衡方程(2.13),经微分运算推导,便得到仅含两个方向界面剪应力的微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}^{12} + f_x \tau_{xz}^{12} + f_y \tau_{yz}^{12} &= 0 \\ \tau_{yz}^{12} + g_y \tau_{yz}^{12} + g_x \tau_{xz}^{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} f_x &= f C_{55b}^{(1)} \left[\frac{C_{44b}^{(1)}}{Q_{16}^{(2)}} - \frac{C_{45}^{(2)}}{Q_{11b}^{(1)}} \right], & f_y &= f C_{55b}^{(1)} \left[\frac{h^{(2)} C_{44b}^{(1)}}{h^{(1)} Q_{66b}^{(1)}} - \frac{h^{(1)} C_{45}^{(2)}}{h^{(2)} Q_{16}^{(2)}} \right] \\ x &= f C_{44b}^{(1)} \left[\frac{h^{(2)} C_{55b}^{(1)}}{h^{(1)} Q_{11b}^{(1)}} - \frac{h^{(1)} C_{45}^{(2)}}{h^{(2)} Q_{16}^{(2)}} \right], & g_y &= f C_{44b}^{(1)} \left[\frac{C_{55b}^{(1)}}{Q_{16}^{(2)}} - \frac{C_{45}^{(2)}}{Q_{66b}^{(1)}} \right] \\ f &= \frac{3C_{45}^{(2)}}{h^{(1)} h^{(1)} C_{45}^{(2)} C_{45}^{(2)} - h^{(2)} h^{(2)} C_{44b}^{(1)} C_{55b}^{(1)}} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

将(3.2)式与文献[1]给出的界面剪应力方程对比可发现,当约束层为正交各向异性时, x 、 y

两方向界面剪应力方程是分离的, 相当于 $\tau_{xz}^{(12)}$ 和 $\tau_{yz}^{(12)}$ 为零; 而当约束层存在耦合刚度时, 两向界面剪应力方程耦合, 须联合求解。

由(2.3)至(3.1)等式, 可获得方程(3.2)所对应的边界条件

$$\tau_{xz}^{(12)}(0) = 0, \quad \tau_{yz}^{(12)}(0) = 0 \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}^{(12)}(l) &= fC_{55b}^{(1)} \left\{ h^{(1)}C_{45}^{(2)} \left[\frac{h\tau_{xyb}}{h^{(2)}Q_{16}^{(2)}} + \left(\frac{Q_{12b}^{(1)}}{Q_{11b}^{(1)}} - \frac{Q_{26}^{(2)}}{Q_{16}^{(2)}} \right) \varepsilon_y \right] - h^{(2)}C_{44b}^{(1)} \left[\frac{h\sigma_{xb}}{h^{(2)}Q_{16}^{(2)}} \right] \right\} \\ \tau_{yz}^{(12)}(l) &= fC_{44b}^{(1)} \left\{ h^{(1)}C_{45}^{(2)} \left[\frac{2h\sigma_{xb}}{h^{(2)}Q_{16}^{(2)}} - h^{(2)}C_{55b}^{(1)} \left[\frac{h\tau_{xyb}}{h^{(2)}Q_{16}^{(2)}} + \left(\frac{Q_{12b}^{(1)}}{Q_{11b}^{(1)}} - \frac{Q_{26}^{(2)}}{Q_{16}^{(2)}} \right) \varepsilon_y \right] \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

在此边界条件下解方程组(3.2)_x 得到界面剪应力

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}^{(12)} &= C_1 \text{sh} a_1 x + C_2 \text{sh} a_2 x \\ \tau_{yz}^{(12)} &= - \frac{a_1^2 + f_x}{2f_y} C_1 \text{sh} a_1 x - \frac{a_2^2 + f_x}{f_y} C_2 \text{sh} a_2 x \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{(a_2^2 + f_x) \tau_{xz}^{(12)}(l) + f_y \tau_{yz}^{(12)}(l)}{a_1(a_2^2 - a_1^2) \text{ch} a_1 l} \\ C_2 &= \frac{(a_1^2 + f_x) \tau_{xz}^{(12)}(l) + f_y \tau_{yz}^{(12)}(l)}{a_2(a_1^2 - a_2^2) \text{ch} a_2 l} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

并有

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 &= [- (f_x + g_y) + \sqrt{(f_x + g_y)^2 - 4(f_x g_y - f_y g_x)}] / 2 \\ a_2^2 &= [- (f_x + g_y) - \sqrt{(f_x + g_y)^2 - 4(f_x g_y - f_y g_x)}] / 2 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

将上述解代入平衡方程(2.13)积分并利用应力边界条件可得到层内应力; 再代入无损伤本构关系(2.4)、(2.10)积分并利用位移边界条件导出

$$\begin{aligned} \frac{u^{(1)}(l)}{l} &= - \frac{C_1}{a_1 h^{(1)} Q_{11b}^{(1)}} \left[\frac{\text{sh} a_1 l}{a_1 l} - \text{ch} a_1 l \right] - \frac{C_2}{a_2 h^{(1)} Q_{11b}^{(1)}} \\ &\quad \cdot \left[\frac{\text{sh} a_2 l}{a_2 l} - \text{ch} a_2 l - \frac{Q_{12b}^{(1)}}{Q_{11b}^{(1)}} \varepsilon_y \right] \\ \frac{v^{(1)}(l)}{l} &= \frac{a_1^2 + f_x}{f_y} \cdot \frac{C_1}{a_1 h^{(1)} Q_{66b}^{(1)}} \left[\frac{\text{sh} a_1 l}{a_1 l} - \text{ch} a_1 l \right] + \frac{a_2^2 + f_x}{f_y} \\ &\quad \cdot \frac{C_2}{a_2 h^{(1)} Q_{66b}^{(1)}} \left[\frac{\text{sh} a_2 l}{a_2 l} - \text{ch} a_2 l \right] \\ \frac{u^{(2)}(l)}{l} &= a \frac{h}{h^{(2)} Q_{16}^{(2)}} \tau_{xyb} - \frac{a_1^2 + f_x}{f_y} \cdot \frac{C_1}{a_1 h^{(2)} Q_{16}^{(2)}} \left[\frac{\text{sh} a_1 l}{a_1 l} - \text{ch} a_1 l \right] \\ &\quad - \frac{a_2^2 + f_x}{f_y} \cdot \frac{C_2}{a_2 h^{(2)} Q_{16}^{(2)}} \left[\frac{\text{sh} a_2 l}{a_2 l} - \text{ch} a_2 l - \frac{Q_{26}^{(2)}}{Q_{16}^{(2)}} \varepsilon_y \right] \\ \frac{v^{(2)}(l)}{l} &= \frac{h}{h^{(2)} Q_{16}^{(2)}} \sigma_{xb} + \frac{C_1}{a_1 h^{(2)} Q_{16}^{(2)}} \left[\frac{\text{sh} a_1 l}{a_1 l} - \text{ch} a_1 l \right] \\ &\quad + \frac{C_2}{a_2 h^{(2)} Q_{16}^{(2)}} \left[\frac{\text{sh} a_2 l}{a_2 l} - \text{ch} a_2 l \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

在(3.9)式的第3、4式中令

$$\varepsilon_x = u^{(2)}(l)/l, \quad \nu_{xy} = v^{(2)}(l)/l \quad (3.10)$$

可获得一组关于 b 问题的平均应力与平均应变的耦合方程, 须联立求解方可导出 b 问题本构关系中的 1、3 式。再由损伤层板单元 y 方向平衡条件

$$lh\sigma_{yb} = h^{(1)} \int_0^l \sigma_{yb}^{(1)} dx + h^{(2)} \int_0^l \sigma_{yb}^{(2)} dx \quad (3.11)$$

代入(2.4)及(2.10)式并利用前面导出结果可得到 b 问题本构关系第 2 式。于是, 通过求解耦合微分方程与耦合代数方程, 得到 b 问题本构关系

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xb} &= A_{11b} \varepsilon_x + A_{12b} \varepsilon_y + A_{16} \nu_{xy} \\ \sigma_{yb} &= A_{12b} \varepsilon_x + A_{22b} \varepsilon_y + A_{26} \nu_{xy} \\ \tau_{xyb} &= A_{16} \varepsilon_x + A_{26} \varepsilon_y + A_{66b} \nu_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

其具体形式在下节给出。

对于 a 问题, 可视为一准正交各向异性铺层对称约束开裂问题。应用文献[1]结果可获得其本构关系解答, 形式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xa} &= A_{11a} \varepsilon_x + A_{12a} \varepsilon_y \\ \sigma_{ya} &= A_{12a} \varepsilon_x + A_{22a} \varepsilon_y \\ \tau_{xya} &= A_{66a} \nu_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

将 a、b 问题解叠加, 便得到任意约束层对称约束开裂层板本构关系的解析表达式。

§ 4. 损伤层板本构关系

下面给出基于图 1 所示损伤层板模型建立的 $(\theta_m/90_n)_s$ 层板在 90° 层开裂后的本构关系, 它的有效刚度是裂纹半间距 l 的函数。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= A_{11} \varepsilon_x + A_{12} \varepsilon_y + A_{16} \nu_{xy} \\ \sigma_y &= A_{12} \varepsilon_x + A_{22} \varepsilon_y + A_{26} \nu_{xy} \\ \tau_{xy} &= A_{16} \varepsilon_x + A_{26} \varepsilon_y + A_{66} \nu_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= A_{11a} + A_{11b}, & A_{66} &= A_{66a} + A_{66b} \\ A_{12} &= A_{12a} + A_{12b}, & A_{22} &= A_{22a} + A_{22b} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} A_{11a} &= \frac{h^{(1)} Q_{11a}^{(1)} + h^{(2)} Q_{11}^{(2)}}{d_{11a} h}, & A_{66a} &= \frac{h^{(1)} Q_{66a}^{(1)} + h^{(2)} Q_{66}^{(2)}}{d_{66a} h} \\ A_{12a} &= \frac{h^{(1)} Q_{12a}^{(1)} + h^{(2)} Q_{12}^{(2)}}{d_{12a} h}, \\ A_{22a} &= \frac{h^{(1)} Q_{22a}^{(1)} + h^{(2)} Q_{22}^{(2)}}{h} - \left[1 - \frac{1}{d_{11a}} \frac{Q_{12a}^{(1)} Q_{12a}^{(1)}}{Q_{11a}^{(1)} Q_{11a}^{(1)}} \cdot \frac{h^{(1)} Q_{11a}^{(1)} + h^{(2)} Q_{11}^{(2)}}{h} \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$A_{11b} = \frac{h^{(1)} Q_{11b}^{(1)}}{d_{11b} h}, \quad A_{66b} = \frac{h^{(1)} Q_{66b}^{(1)}}{d_{66b} h}$$

$$A_{12b} = \frac{h^{(1)} Q_{12b}^{(1)}}{d_{11b} h},$$

$$\begin{aligned}
 A_{22b} &= \frac{h^{(1)} Q_{22b}^{(1)}}{h \text{ 均应力}} \left(1 - \frac{1}{d_{11b}} \right) \frac{Q_{12b}^{(1)}}{Q_{11b}^{(1)}} \cdot \frac{h^{(1)} Q_{12b}^{(1)}}{h} \\
 A_{16} &= \frac{h^{(2)} Q_{16}^{(2)}}{d_{16} h}, \\
 A_{\bar{x}^2 6} &= \frac{h^{(2)} Q_{26}^{(2)}}{h} - \left(1 - \frac{1}{d_{16}} \frac{Q_{12b}^{(1)}}{Q_{11b}^{(1)}} \cdot \frac{h^{(2)} Q_{16}^{(2)}}{h} \right)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

式中, d_{11a} 、 d_{11b} 等为开裂层板刚度衰减因子

$$\left. \begin{aligned}
 d_{11a} &= 1 + \frac{h^{(1)} Q_{11a}^{(1)}}{h^{(2)} Q_{11}^{(2)}} \cdot \frac{\text{tha}_{01} l}{a_{01} l} \\
 d_{66a} &= 1 + \frac{h^{(1)} Q_{66a}^{(1)}}{h^{(2)} Q_{66}^{(2)}} \cdot \frac{\text{tha}_{02} l}{a_{02} l} \\
 d_{12a} &= \left[1 - \left(\frac{1}{d_{11a}} \right) \cdot \frac{Q_{12a}^{(1)}}{Q_{11a}^{(1)}} \cdot \frac{h^{(1)} Q_{11a}^{(1)} + h^{(2)} Q_{11}^{(2)}}{h^{(1)} Q_{12a}^{(1)} + h^{(2)} Q_{12}^{(2)}} \right]^{-1}
 \end{aligned} \right\} \tag{4.5}$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 a_{01}^2 &= \frac{3C_{55a}^{(1)} C_{55}^{(2)}}{h^{(1)} C_{55}^{(2)} + h^{(2)} C_{55a}^{(1)}} \left\{ \frac{h^{(1)} Q_{11a}^{(1)} + h^{(2)} Q_{11}^{(2)}}{h^{(1)} h^{(2)} Q_{11a}^{(1)} Q_{11}^{(2)}} \right\} \\
 a_{02}^2 &= \frac{3C_{44a}^{(1)} C_{44}^{(2)}}{h^{(1)} C_{44}^{(2)} + h^{(2)} C_{44a}^{(1)}} \left\{ \frac{h^{(1)} Q_{66a}^{(1)} + h^{(2)} Q_{66}^{(2)}}{h^{(1)} h^{(2)} Q_{66a}^{(1)} Q_{66}^{(2)}} \right\}
 \end{aligned} \right\} \tag{4.6}$$

$$\left. \begin{aligned}
 d_{11b} &= \frac{A_b}{f C_{55b}^{(1)}} \cdot \left\{ \frac{h^{(1)} Q_{11b}^{(1)} (a_1^2 - a_2^2)}{\frac{1}{a_1^2} \alpha_{11b} \left[1 - \frac{\text{tha}_1 l}{a_1 l} - \frac{1}{a_2^2} \beta_{11b} \left[1 - \frac{\text{tha}_2 l}{a_2 l} \right] \right]} \right\} \\
 d_{66b} &= \frac{A_b}{f C_{44b}^{(1)}} \cdot \left\{ \frac{h^{(1)} Q_{66b}^{(1)} (a_1^2 - a_2^2)}{b \frac{1}{a_1^2} \alpha_{66b} \left[1 - \frac{\text{tha}_1 l}{a_1 l} - \frac{1}{a_2^2} \beta_{66b} \left[1 - \frac{\text{tha}_2 l}{a_2 l} \right] \right]} \right\} \\
 d_{16} &= \frac{A_b}{1 + \frac{f C_{44b}^{(1)}}{h^{(2)} Q_{16}^{(2)} (a_1^2 - a_2^2)}} \left\{ \frac{1}{a_1^2} \alpha_{16} \left[1 - \frac{\text{tha}_1 l}{a_1 l} - \frac{1}{a_2^2} \beta_{16} \left[1 - \frac{\text{tha}_2 l}{a_2 l} \right] \right] \right\}
 \end{aligned} \right\} * \tag{4.7}$$

其中

$$\begin{aligned}
 A_b &= 1 + \frac{2f C_{44b}^{(1)}}{h^{(2)} Q_{16}^{(2)} (a_1^2 - a_2^2)} \left\{ \frac{1}{a_1^2} \alpha_{16} \left[1 - \frac{\text{tha}_1 l}{a_1 l} \right] - \frac{1}{a_2^2} \beta_{16} \left[1 - \frac{\text{tha}_2 l}{a_2 l} \right] \right\} \\
 &\quad - \frac{3f C_{45}^{(2)} C_{44b}^{(1)} C_{55b}^{(1)}}{h^{(2)} Q_{16}^{(2)} h^{(2)} Q_{16}^{(2)} (f_x g_y - f_y g_x)} \left\{ 1 - \frac{\text{tha}_1 l}{a_1 l} \left[1 - \frac{\text{tha}_2 l}{a_2 l} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_{11b} &= h^{(2)} C_{44b}^{(1)} f_y - h^{(1)} C_{45}^{(2)} (a_2^2 + f_x) \\
 \beta_{11b} &= h^{(2)} C_{44b}^{(1)} f_y - h^{(1)} C_{45}^{(2)} (a_1^2 + f_x) \\
 \alpha_{66b} &= h^{(2)} C_{55b}^{(1)} g_x + h^{(1)} C_{45}^{(2)} (a_1^2 + f_x) \\
 \beta_{66b} &= h^{(2)} C_{55b}^{(1)} g_x + h^{(1)} C_{45}^{(2)} (a_2^2 + f_x) \\
 \alpha_{16} &= h^{(1)} C_{45}^{(2)} f_y - h^{(2)} C_{55b}^{(1)} (a_2^2 + f_x) \\
 \beta_{16} &= h^{(1)} C_{45}^{(2)} f_y - h^{(2)} C_{55b}^{(1)} (a_1^2 + f_x)
 \end{aligned} \right\} \tag{4.9}$$

可以验证, 当 $l \rightarrow \infty$,

$$\left. \begin{aligned}
 A_{11} &\rightarrow \frac{h^{(1)} Q_{11a}^{(1)} + h^{(2)} Q_{11}^{(2)}}{h} + \frac{h^{(1)} Q_{11b}^{(1)}}{h} = \frac{h^{(1)} Q_{11}^{(1)} + h^{(2)} Q_{11}^{(2)}}{h} \\
 A_{66} &\rightarrow \frac{h^{(1)} Q_{66a}^{(1)} + h^{(2)} Q_{66}^{(2)}}{h} + \frac{h^{(1)} Q_{66b}^{(1)}}{h} = \frac{h^{(1)} Q_{66}^{(1)} + h^{(2)} Q_{66}^{(2)}}{h} \\
 A_{12} &\rightarrow \frac{h^{(1)} Q_{12a}^{(1)} + h^{(2)} Q_{12}^{(2)}}{h} + \frac{h^{(1)} Q_{12b}^{(1)}}{h} = \frac{h^{(1)} Q_{12}^{(1)} + h^{(2)} Q_{12}^{(2)}}{h} \\
 A_{22} &\rightarrow \frac{h^{(1)} Q_{22a}^{(1)} + h^{(2)} Q_{22}^{(2)}}{h} + \frac{h^{(1)} Q_{22b}^{(1)}}{h} = \frac{h^{(1)} Q_{22}^{(1)} + h^{(2)} Q_{22}^{(2)}}{h} \\
 A_{16} &\rightarrow \frac{h^{(2)} Q_{16}^{(2)}}{h}, \quad A_{26} \rightarrow \frac{h^{(2)} Q_{26}^{(2)}}{h}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

各有效刚度退化到无损伤层板的刚度系数•

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{当 } l \rightarrow 0, \\
 A_{11} &\rightarrow \frac{h^{(2)} Q_{11}^{(2)}}{h}, \quad A_{66} \rightarrow \frac{h^{(2)} Q_{66}^{(2)}}{h}, \quad A_{12} \rightarrow \frac{h^{(2)} Q_{12}^{(2)}}{h} \\
 A_{22} &\rightarrow \frac{h^{(1)} Q_{22}^{(1)} + h^{(2)} Q_{22}^{(2)}}{h} - \frac{h^{(1)} Q_{12a}^{(1)} Q_{12a}^{(1)}}{h Q_{11a}^{(1)}} - \frac{h^{(1)} Q_{12b}^{(1)} Q_{12b}^{(1)}}{h Q_{11b}^{(1)}} \\
 A_{16} &\rightarrow \frac{h^{(2)} Q_{16}^{(2)}}{h}, \quad A_{26} \rightarrow \frac{h^{(2)} Q_{26}^{(2)}}{h} \quad 1
 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

开裂层(1)沿 x 方向几乎完全失效, 这时各有效刚度实际上表征开裂层板的极限刚度•

参 考 文 献

- 1 R. J. Nuismer and S. C. Tan, Constitutive relations of a cracked composite lamina, J. Comp. Mater., **22**(4) (1988), 306—321.
- 2 S. G. Lim and C. S. Hong, Prediction of transverse cracking and stiffness reduction in cross ply laminated composites, J. Comp. Mater., **23**(7) (1989), 695—713.
- 3 Y. M. Han and H. T. Hahn, Ply cracking and property degradation of symmetric balanced laminates under general in-plane loading, Composites Sci. &Tech., **35** (1989), 377—397.
- 4 J. Zhang, J. Fan and C. Soutis, Analysis of multiple matrix cracking in $[\pm \theta_m/90_n]_s$ composite laminates, Part I: In-plane stiffness properties, Composites, **23**(5) (1992), 291—298.
- 5 J. H. Lee and C. S. Hong, Refined two-dimensional analysis of cross-ply laminates with transverse cracks based on the assumed crack deformation, Composites Sci. and Tech., **46** (1993), 157—166.
- 6 J. Fan and J. Zhang, In-situ damage evolution and micro/macro transition for laminated composites, Composites Sci. and Tech., **47** (1993), 107—118.
- 7 华玉、何庆芝、郦正能、寇长河, 约束开裂复合材料层合板本构关系的近似解, 固体力学学报, 14(专刊) (1993), 46—54.
- 8 Hua Yu, He Qingzhi, Li Zhengneng and Kou Changhe, Constitutive relations of a damaged composite laminate with nonsymmetric constrained cracking, J. Reinforced Plastics and Composites, **14**(7) (1995), 740—751.

Property Degradation of Anisotropic Composite Laminates with Matrix Cracking(I) —— Constitutive Relation Developing for $(\theta_m/90_n)_s$ Cracked Laminates by Stiffness Partition

Hua Yu Wang Xingguo

(Hebei Institute of Technology, Tangshan, Hebei 063009, P. R. China)

Li Zhengneng

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, P. R. China)

Abstract

The study on property degradation of damaged composite laminates is extended to anisotropic laminates with matrix cracking. In (I) of the paper, an idea of “stiffness partition” is proposed to deal with the puzzle that the in-plane normal response is coupled with the shear response of the laminates. For $(\theta_m/90_n)_s$ laminates containing transversely cracked layers under general in-plane loading, the constitutive relations are derived and the effective stiffnesses are expressed as the function of crack density.

Key words composite laminate, anisotropy, damage, constitutive relation, stiffness partition