

# 含椭圆形夹杂的压电材料平面问题

侯密山<sup>①</sup> 杨其俊<sup>②</sup>

(何福保推荐, 1996 年 4 月 17 日收到)

## 摘 要

应用复变函数的 Faber 级数展开方法, 本文研究了含椭圆形夹杂的压电材料平面问题, 给出了问题的封闭解。解答表明, 椭圆夹杂内的应力、应变、电场强度和电位移均为常量。通过算例, 还讨论了正、逆压电效应在基体孔周处的机电行为。

**关键词** 压电介质 夹杂 平面问题 Faber 级数

## § 1. 引 言

压电介质因具有机电耦合效应, 使之成为一种新型的功能材料, 在很多技术领域得到广泛应用。与常规材料一样, 这种材料或结构中常含有孔洞、裂纹、夹杂等缺陷。而缺陷产生的应力集中和电量的分布不均匀是压电材料结构非正常失效的关键因素之一。因此, 研究其机电耦合作用下的损伤和断裂行为很有意义。但由于材料本身的各向异性、机电耦合行为和结构的几何、物理非连续等特点, 使得问题的数学求解难度很大。目前所能得到的封闭解答还只限于一些简单问题。文献[1]给出了含椭圆形孔洞的压电材料平面问题的解析解; 文献[2]则研究了含椭圆形夹杂和界面裂纹的压电材料反平面应变问题。

本文用复变函数的 Faber 级数展开方法, 研究了含椭圆形夹杂的压电材料平面应力问题, 给出了问题的封闭解。

## § 2. 平面应力问题的基本方程

对横观各向同性压电材料, 取  $xOy$  平面为各向异性面, 则第一类本构关系方程为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \text{类非} \\ \text{非} \end{matrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} & 0 \\ S_{13} & S_{33} & 0 \\ 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{matrix} \text{通} \\ \text{报} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & d_{31} \\ 0 & d_{33} \\ d_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

① 石油大学(华东)机械系力学教研室, 山东东营 257062

② 石油大学(华东)机械系矿机教研室 山东东营 257062

$$\begin{cases} D_x \\ D_y \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{15} \\ d_{31} & d_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} + \text{er} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 \\ \epsilon_{33} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} \quad \text{电材} \quad (2.2)$$

算例

式中:  $E_x, E_y$  为电场强度分量;  $D_x, D_y$  为电位移分量。其它则分别为应力、应变分量和材料性能参数。

取问题的应力函数  $F(x, y)$  和电势函数  $\Phi(x, y)$  为<sup>[11]</sup>

$$F(x, y) = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 F_k(z_k), \quad \Phi(x, y) = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k F'_k(z_k) \quad (2.3)$$

式中

$$z_k = x + \mu_k y, \quad \lambda_k = [d_{31} \mu_k^3 + (d_{33} - d_{15}) \mu_k] / (\epsilon_{11} + \epsilon_{33} \mu_k^2)^{-1} \quad (2.4)$$

而  $\mu_k (k=1, 2, 3)$  为复参数, 是下述特征方程(2.5)的三个不相等的复数根(本文不讨论复参数相等的情形; 方程的另外三个根分别为  $\mu_4 = \mu_1, \mu_5 = \mu_2, \mu_6 = \mu_3$ )。

$$\begin{aligned} [S_{11} \mu^4 + (2S_{13} + S_{44}) \mu^2 + S_{33}] (\epsilon_{11} + \epsilon_{33} \mu^2) \\ - \mu^2 [d_{31} \mu^2 + (d_{33} - d_{15})]^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

可表示为 ( $i = \sqrt{-1}$ )

$$\mu_1 = i\beta_1, \quad \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \mu_3 = -\alpha_2 + i\beta_2 \quad (2.6)$$

或

$$\mu_1 = i\beta_1, \quad \mu_2 = i\beta_2, \quad \mu_3 = i\beta_3 \quad (2.7)$$

由(2.3)式有

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= F(x, y), \quad \alpha_{yy} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k^2 F''_k(z_k) \\ \alpha_y &= F(x, y), \quad \alpha_{xx} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 F''_k(z_k) \\ \alpha_{xy} &= -F(x, iy), \quad \alpha_{xy} = -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k F''_k(z_k) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\Phi(x, y), \quad E_x = -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k F''_k(z_k) \\ E_y &= -\Phi(x, y), \quad E_y = -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \lambda_k F''_k(z_k) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

将(2.8)、(2.9)两式代入(2.1)、(2.2)式有

$$\left. \begin{aligned} D_x &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 (d_{15} \mu_k + \epsilon_{11} \lambda_k) F''_k(z_k) \\ D_y &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 (d_{31} \mu_k^2 + d_{33} - \epsilon_{33} \mu_k \lambda_k) F''_k(z_k) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \int \epsilon_x dx = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 p_k F'_k(z_k) - \omega y + u_0 \\ v &= \int \epsilon_y dy = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 q_k F'_k(z_k) + \omega x + v_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

式中

$$p_k = S_{11} \mu_k^2 + S_{13} - d_{31} \mu_k \lambda_k, \quad q_k = (S_{13} \mu_k^2 + S_{33} - d_{33} \mu_k \lambda_k) / \mu_k \quad (2.12)$$

式(2.8), (2.9), (2.10)和(2.11)自然满足问题的平衡、协调和 Maxwell 电磁场方程·

在任一有限边界  $os$  上(如图 1), 有给定外载  $X_n, Y_n$  和  $D_x, D_y$  的合量表示

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 F'_k(z_k) \Big|_o^s = - \int_o^s Y_n ds, \quad 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k F'_k(z_k) \Big|_o^s = \int_o^s X_n ds \quad (2.13)$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_k F'_k(z_k) \Big|_o^s = \int_o^s (D_x dy - D_y dx) \quad (2.14)$$

式中

$$g_k = - (d_{31} \mu_k^2 + d_{33} - \epsilon_{33} \mu_k \lambda_k) \quad (2.15)$$

由(2.11)、(2.13)、(2.14)式和(2.3)式给出的电势函数, 可建立具体问题的边界条件· 而问题的求解就是寻求满足边界条件的复函数  $F'_k(z_k)$  ( $k=1, 2, 3$ )·

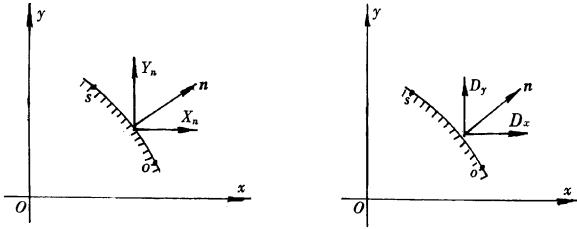


图 1

### § 3. 含椭圆夹杂问题的求解

如图 2,  $S^{(1)}, S^{(2)}$  分别为基体和夹杂所占区域, 它们是材料性能参数互不相同的横观各向同性压电材料, 二者主轴相同, 在界面  $L$  上理想连接·

记待求的复函数

$$F'_k(z_k) = \phi_k(z_k) \quad (3.1)$$

在基体所占的区域  $S^{(1)}$  内, 取  $\phi_{(1)k}(z_{(1)k})$  为

$$\phi_{(1)k}(z_{(1)k}) = A_k z_{(1)k} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{km} \xi_{(1)k}^m \quad (3.2)$$

而在夹杂所占区域  $S^{(2)}$  内, 取复函数  $\phi_{(2)k}(z_{(2)k})$  的 Faber 级数展开<sup>[3]</sup>, 有

$$\phi_{(2)k}(z_{(2)k}) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{km} (\xi_{(2)k}^m + m_{(2)k}^m \bar{\xi}_{(2)k}^m) \quad (3.3)$$

式中

$$z_{(j)k} = \frac{a - i\mu_{(j)k}b}{2} \cdot (\xi_{(j)k} + m_{(j)k} \bar{\xi}_{(j)k}), \quad m_{(j)k} = \frac{a + i\mu_{(j)k}b}{a - i\mu_{(j)k}b} \quad j = 1, 2 \quad (3.4)$$

这里  $a, b$  为椭圆的长短半轴;  $j=1, 2$  分别代表基体和夹杂所占区域  $S^{(1)}, S^{(2)}$ ,  $\mu_{(j)k}$  分别由基体和夹杂的材料性能参数通过特征方程(2.5)式确定·

在界面  $L$  上, 由(2.3)、(2.11)、(2.13)、(2.14)和(3.1)、(3.2)、(3.3)式有应力、位移、电场强度和电位移的连续条件

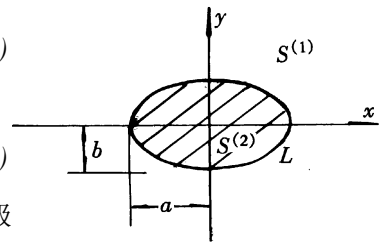


图 2

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_{(1)k}(z_{(1)k}) &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_{(2)k}(z_{(2)k}) \\
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_{(1)k} \phi_{(1)k}(z_{(1)k}) &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_{(2)k} \phi_{(2)k}(z_{(2)k}) \\
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_{(1)k} \phi_{(1)k}(z_{(1)k}) &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_{(2)k} \phi_{(2)k}(z_{(2)k}) - \omega^* y \\
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 q_{(1)k} \phi_{(1)k}(z_{(1)k}) &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 q_{(2)k} \phi_{(2)k}(z_{(2)k}) + \omega^* x \\
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_{(1)k} \phi_{(1)k}(z_{(1)k}) &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_{(2)k} \phi_{(2)k}(z_{(2)k}) \\
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{(1)k} \phi_{(1)k}(z_{(1)k}) &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{(2)k} \phi_{(2)k}(z_{(2)k}), \quad x + iy \in L \quad (3.5)
\end{aligned}$$

式中  $\omega^* = \omega_{(2)} - \omega_{(1)}$  为夹杂相对于基体的刚性转动。连续性条件(3.5)式确定了复函数  $\phi_{(1)k}$ ,  $\phi_{(2)k}$  中的待定系数  $A_{km}$  和  $a_{km}$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $m = 1, 2, \dots$

根据(3.4)式,在边界  $L$  上,  $\xi_{(j)k} = e^{i\alpha} = \sigma$ ,  $\bar{\xi}_{(j)k} = e^{-i\alpha} = \sigma^{-1}$ ;  $2x = a(\sigma + \sigma^{-1})$ ,  $2iy = b(\sigma - \sigma^{-1})$ 。将其代入(3.5)式,比较式中  $\sigma^m$  ( $m \geq 1$ ) 的系数有

$$A_{km} = a_{km} = 0, \quad m \geq 2; \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

并确定  $A_{k1}$ ,  $a_{k1}$ ,  $k = 1, 2, 3$  的线性方程组

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^3 [A_{k1} - m_{(2)k} a_{k1} - a_{k1}] &= - \sum_{k=1}^3 [h_{(1)k} A_{k1} + f_{(1)k} A_{k1}] \\
\sum_{k=1}^3 [\mu_{(1)k} A_{k1} - \mu_{(2)k} m_{(2)k} a_{k1} - \mu_{(2)k} a_{k1}] &= - \sum_{k=1}^3 [\mu_{(1)k} h_{(1)k} A_{k1} + \mu_{(1)k} f_{(1)k} A_{k1}] \\
\sum_{k=1}^3 [p_{(1)k} A_{k1} - p_{(2)k} m_{(2)k} a_{k1} - p_{(2)k} a_{k1}] &= - \sum_{k=1}^3 [p_{(1)k} h_{(1)k} A_{k1} + p_{(1)k} f_{(1)k} A_{k1}] + \frac{b}{2i} \omega^* \\
\sum_{k=1}^3 [q_{(1)k} A_{k1} - q_{(2)k} m_{(2)k} a_{k1} - q_{(2)k} a_{k1}] &= - \sum_{k=1}^3 [q_{(1)k} h_{(1)k} A_{k1} + q_{(1)k} f_{(1)k} A_{k1}] + \frac{a}{2} \omega^* \\
\sum_{k=1}^3 [\lambda_{(1)k} A_{k1} - \lambda_{(2)k} m_{(2)k} a_{k1} - \lambda_{(2)k} a_{k1}] &= - \sum_{k=1}^3 [\lambda_{(1)k} h_{(1)k} A_{k1} + \lambda_{(1)k} f_{(1)k} A_{k1}] \\
\sum_{k=1}^3 [g_{(1)k} A_{k1} - g_{(2)k} m_{(2)k} a_{k1} - g_{(2)k} a_{k1}] &= - \sum_{k=1}^3 [g_{(1)k} h_{(1)k} A_{k1} + g_{(1)k} f_{(1)k} A_{k1}] \quad (3.7)
\end{aligned}$$

式中:  $p_{(1)k}$ ,  $p_{(2)k}$ ,  $q_{(1)k}$ ,  $\dots$ , 分别由式(2.12)、(2.15)、(2.4)和基体、夹杂的材料性能参数确定; 常数  $A_k$ ,  $\omega^*$  分别由无限远处的边界条件和附加条件确定; 而

$$h_{(1)k} = \frac{a + i\mu_{(1)k}b}{2}, \quad f_{(1)k} = \frac{a - i\mu_{(1)k}b}{2} \quad (3.8)$$

则有含椭圆形夹杂的压电材料平面应力问题的封闭解

$$\phi_{(1)k}(z_{(1)k}) = A_k z_{(1)k} + A_{k1} \xi_{(1)k}^{-1} \quad z \in S^{(1)} \quad (3.9)$$

$$\phi_{(2)k}(z_{(2)k}) = \frac{2a_{k1}}{a - i\mu_{(2)k}b} \cdot z_{(2)k} \quad z \in S^{(2)} \quad (3.10)$$

由(3.10)式知,在夹杂内,应力、应变、电场强度和电位移均为常量。

相对转动  $\omega^*$  可由基体作用于夹杂上的应力主矩  $M_0 = 0$  这一条件确定,即

$$M_0 = \oint_L (Y_{nx} - X_{ny}) ds = 0 \quad (3.11)$$

式中的  $X_n, Y_n$  由应力函数  $F(x, y)$  表示为

$$X_n = \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \right], \quad Y_n = - \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right] \quad (3.12)$$

将(3.9)、(2.3)、(3.12)式代入(3.11)式,积分并应用留数定理有确定  $\omega^*$  的附加方程

$$\sum_{k=1}^3 (f^{(1)k} A_{k1} - f^{(1)k} A_{k1}) = 0 \quad (3.13)$$

常数  $A_k$  由无限远处  $|z| \rightarrow \infty$  的载荷条件  $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \sigma_{xy}^\infty$  和  $E_x^\infty, E_y^\infty$  确定,根据(2.8)、(2.9)两式有

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_{(1)k}^2 A_k &= \sigma_x^\infty, & 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 A_k &= \sigma_y^\infty, & 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_{(1)k} A_k &= -\sigma_{xy}^\infty \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_{(1)k} A_k &= -E_x^\infty, & 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_{(1)k} \lambda_{(1)k} A_k &= -E_y^\infty \end{aligned} \quad (3.14)$$

式(3.14)也可由  $\sigma^\infty, D^\infty$  给出  $A_k (k=1, 2, 3)$  的实部和虚部共有六个实常数,不能由(3.14)式唯一确定,尚需一个补充条件. 不改变无限远处的载荷条件,本文设  $\operatorname{Im} A_1 = 0$  为确定  $A_k$  的补充条件.

## § 4. 算例分析

**例 1** 本文给出的含椭圆形夹杂的压电材料平面应力问题解,当去掉电量及其对应力、位移的耦合作用,即变为由  $S_{11}\mu^4 + (2S_{13} + S_{44})\mu^2 + S_{33} = 0$  控制的纯弹性平面问题. 此时,相应的复函数仅为  $F_1(z_1)$  和  $F_2(z_2)$ . 对此,本文计算了文献[4]给出的含圆形夹杂的正交异性板问题,二者结果完全一致.  $E_1^{(1)} = 12\text{GPa}$ ,  $E_3^{(1)} = 6\text{GPa}$ ,  $\nu_1^{(1)} = 0.071$ ,  $G^{(1)} = 0.7\text{GPa}$ . 表 1 给出了连接处基体(以下均称为基体孔边)的应力分量.

表 1 基体孔边的应力分量

$$a = b, \sigma_x^\infty = p, S_{ij}^{(2)} = 2S_{ij}^{(1)}$$

$\delta$	本文结果			文[4]结果		
	$\sigma_r$	$\sigma_\theta$	$\sigma_{r\theta}$	$\sigma_r$	$\sigma_\theta$	$\sigma_{r\theta}$
$0^\circ$	0.841p	-0.061p	0.0	0.84p	-0.06p	0.0
$30^\circ$	0.627p	0.231p	-0.371p	0.63p	0.23p	-0.37p
$60^\circ$	0.198p	0.784p	-0.371p	0.20p	0.78p	-0.37p
$90^\circ$	-0.016p	1.684p	0.0	-0.02p	1.68p	0.0

表 2 基体孔边电弹性和弹性

应力的  $\sigma_i = \sigma_{\theta \max}$  值

b/a	$\sigma_x^\infty = p, \sigma_1$ 当 $\delta = 90^\circ$		$\sigma_y^\infty = p, \sigma_1$ 当 $\delta = 0^\circ$	
	弹性	电弹性	弹性	电弹性
2	1.699p	1.706p	1.330p	1.270p
1	1.539p	1.540p	1.507p	1.419p
0.5	1.360p	1.359p	1.675p	1.562p
0.25	1.212p	1.211p	1.792p	1.663p

**例 2** 为考察压电材料的机电耦合效应,取 PZT-2 压电陶瓷材料作为计算对象,其材料性能参数为<sup>[5]</sup>:

$$\begin{aligned} S_{11}^E &= 11.6 \times 10^{-12} \text{m}^2 \text{N}^{-1}, & S_{33}^E &= 14.8 \times 10^{-12} \text{m}^2 \text{N}^{-1}, & S_{13}^E &= -4.97 \times 10^{-12} \text{m}^2 \text{N}^{-1} \\ S_{44}^E &= 45.0 \times 10^{-12} \text{m}^2 \text{N}^{-1}, & d_{15} &= 440.0 \times 10^{-12} \text{CN}^{-1}, & d_{31} &= -60.2 \times 10^{-12} \text{CN}^{-1} \\ d_{33} &= 152.0 \times 10^{-12} \text{CN}^{-1}, & \epsilon_{11}^T &= 990.0 \epsilon_0, & \epsilon_{33}^T &= 450.0 \epsilon_0 \end{aligned}$$

$$\epsilon_0 = 1000 \times 10^{-12} \cdot (36\pi)^{-1} \text{Fm}^{-1}$$

对于夹杂材料的性能参数, 设为  $S_{ij}^{(2)} = 2S_{ij}^E$ ,  $d_{ij}^{(2)} = 2d_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}^{(2)} = 2\epsilon_{ij}^T$ 。

(1) 机电耦合效应对基体应力的影响

为考察含椭圆形夹杂的压电材料的机电耦合效应, 分别计算了 PZT-2 压电陶瓷在单轴拉伸时的电弹性应力和弹性应力  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_{r\theta}$ , 二者在孔边的分布规律相似, 部分结果列于表 2。

在  $\sigma_y^\infty = p$  作用下, 有最大相对差  $\delta_{\max} = 7.8\%$ 。

(2) 压电效应

此时, 应力、电场强度和电位移的基本单位分别为  $\text{Nm}^{-2}$ 、 $\text{Vm}^{-1}$ 、 $\text{Cm}^{-2}$ 。图 3、4、5 和 6、7、8 分别为正压电( $\sigma_y^\infty = p$ )和逆压电( $E_y^\infty = E_0$ )时基体孔边( $a = b$ )应力、电场强度和电位移的分布曲线。可以看到: 对  $\sigma_y^\infty = p$  的正压电情形, 其极值分别为  $\sigma_r = 0.752p$ ,  $\sigma_\theta = 1.419p$ ,  $E_r = 8.542 \times 10^{-3}p$ ,  $E_\theta = 9.309 \times 10^{-3}p$ ,  $D_r = 1.583 \times 10^{-10}p$ ,  $D_\theta = 1.805 \times 10^{-10}p$ ; 对  $E_y^\infty = E_0$  的逆压电情形, 其极值分别为  $\sigma_r = -2.333E_0$ ,  $\sigma_\theta = 3.016E_0$ ,  $E_r = 1.351E_0$ ,  $E_\theta = 0.716E_0$ ,  $D_r = 5.105 \times 10^{-9}E_0$ ,  $D_\theta = 3.366 \times 10^{-9}E_0$ 。

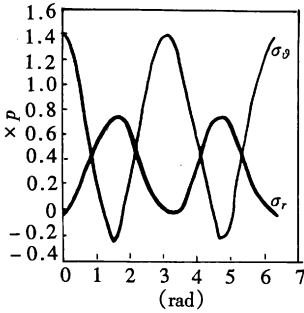


图 3 正压电孔边应力分布  
( $\sigma_y^\infty = p$ )

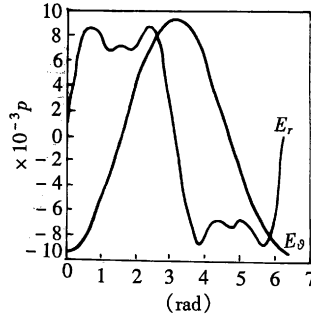


图 4 正压电孔边电场强度分布  
( $\sigma_y^\infty = p$ )

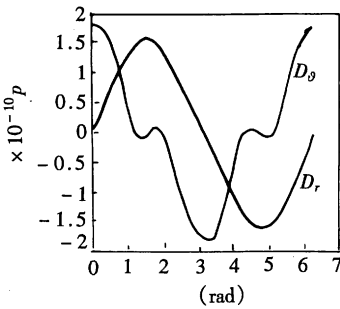


图 5 正压电孔边电位移分布  
( $\sigma_y^\infty = p$ )

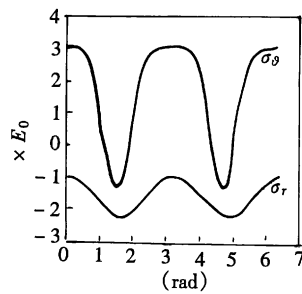


图 6 逆压电孔边应力分布  
( $E_y^\infty = E_0$ )

而  $\sigma_x^\infty = p$  单独作用时的极值为, 在  $\theta = 0^\circ$  有  $\sigma_r = 0.773p$ ,  $E_\theta = 0.175 \times 10^{-3}p$ ,  $D_\theta = -0.739 \times 10^{-10}p$ , 在  $\theta = 90^\circ$  有  $\sigma_\theta = 1.540p$ ,  $D_r = -0.859 \times 10^{-10}p$ , 在  $\theta = 45^\circ$  有  $E_r = -3.599 \times 10^{-3}p$ ; 当只有  $E_x^\infty = E_0$  作用时, 在  $\theta = 0^\circ$  有极值  $D_r = 10.68 \times 10^{-9}E_0$ , 在  $\theta$

$= 60^\circ$  有  $D_\theta = -6.233 \times 10^{-9} E_0$ 。与图 3、4、...、8 中的极值比较知, 沿极化轴  $y$  轴(3 轴) 方向的正压电效应比沿  $x$  轴(各向同性面内的任一轴) 方向的大, 而逆压电效应则相反。

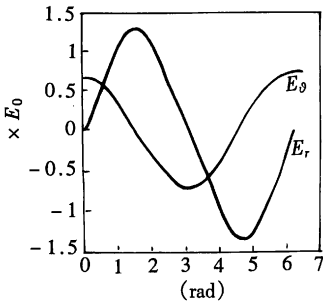


图 7 逆压电孔边电场强度分布  
( $E_y^\infty = E_0$ )

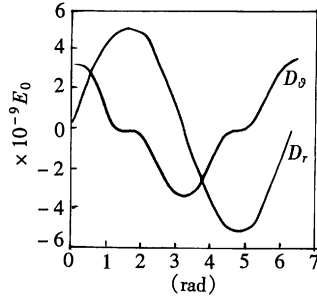


图 8 逆压电孔边电位移分布  
( $E_y^\infty = E_0$ )

### (3) 刚性椭圆夹杂问题的结果

由弹性夹杂的解答, 还可以计算刚性夹杂问题。根据夹杂的应变  $\epsilon_x^{(2)} = \epsilon_y^{(2)} = \epsilon_{xy}^{(2)} = 0$ , 由(2.1)、(2.2)两式推知, 应有  $S_{ij}^{(2)} = d_{ij}^{(2)} = 0$  和  $\epsilon_{ij}^{(2)} \neq 0$ 。取  $S_{ij}^{(2)}$  和  $d_{ij}^{(2)}$  相当小, 代入(3.7)式计算即得刚性夹杂问题的结果。取夹杂的材料性能参数  $S_{ij}^{(2)} = S_{ij}^{(1)} \times 10^{-8}$ ,  $d_{ij}^{(2)} = d_{ij}^{(1)} \times 10^{-8}$ ,  $\epsilon_{11}^{(2)} = 2\epsilon_{33}^{(2)} = 1100\epsilon_0$ , 算得含圆形刚性夹杂的 PZT-2 压电陶瓷的应力、电场强度和电位移极值列于表 3(其结果与作者的另一工作结果完全相同)。

表 3 圆刚性夹杂孔边的  $\sigma, E, D$  极值(\*: 在  $\vartheta = 0^\circ$ , #: 在  $\vartheta = 90^\circ$ )

	$\sigma_x^\infty = p$	$\sigma_y^\infty = p$	$E_x^\infty = E_0$	$E_y^\infty = E_0$
$\sigma_r$	$1.406p^*$	$1.762p^\#$	$0.64 \times 10E_0$	$0.52 \times 10E_0^\#$
$\sigma_\theta$	$0.508p$	$0.637p^\#$	$1.94 \times 10E_0$	$-1.05 \times 10E_0^*$
$E_r$	$0.85 \times 10^{-2}p$	$-2.66 \times 10^{-2}p$	$0.97E_0$	$1.14E_0^\#$
$E_\theta$	$-0.25 \times 10^{-2}p^*$	$2.87 \times 10^{-2}p^*$	$-0.96E_0^\#$	$0.99E_0^*$
$D_r$	$-0.12 \times 10^{-10}p^\#$	$1.39 \times 10^{-10}p^\#$	$9.34 \times 10^{-9}E_0^*$	$4.84 \times 10^{-9}E_0^\#$
$D_\theta$	$-1.77 \times 10^{-10}p$	$2.18 \times 10^{-10}p$	$-11.24 \times 10^{-9}E_0^\#$	$2.66 \times 10^{-9}E_0$

## § 5. 结 论

(1) 含椭圆形夹杂的压电材料平面问题, 可用复变函数理论求解, 夹杂内的复函数可展开为 Faber 级数, 方法简单。

(2) 文中给出的平面应力问题解答可转化为平面应变问题解, 只需将材料性能参数进行简单换算即可。

(3) 上述解答也能用来计算刚性夹杂问题, 只需将  $S_{ij}$  和  $d_{ij}$  取得足够小, 就可得到相当精确的结果。

(4) 椭圆形夹杂内的应力、应变、电场强度和电位移均为常量。

## 参 考 文 献

- 1 H. A. Sosa, Plane problems in piezoelectric media with defects, *Int. J. Solids Structures*, **28**(4) (1991), 491—505.
- 2 王旭、王子昆, 压电材料反平面应变状态的椭圆夹杂及界面裂纹问题, *上海力学*, **14**(4) (1993), 26—34.
- 3 A. S. Kosmodamianskii and U. I. Chemic, Stress state of a plate weakened by two elliptical holes with parallel axes, *Soviet Applied Mechanics*, **17** (1981), 570—581.
- 4 .Г. 列赫尼茨基著, 胡海昌译,《各向异性板》, 科学出版社 (1963), 175—180.
- 5 张沛霖、张中渊著,《压电测量》, 国防工业出版社 (1983), 484—485.

**Plane Problems in Piezoelectric Media with Elliptic Inclusion**

Hou Mishan Yang Qijun

(University of Petroleum, Dongying, Shandong 257062, P. R. China)

**Abstract**

This paper expresses potential function of complex variable in Faber series and the solution in closed form is provided for the plane stress problems in piezoelectric media with elliptic inclusion. It is shown from the solution that the stress, strain, electric field intensity and electric displacement in inclusion are all constant. In addition, the electromechanical behavior of piezoelectric influence at the elliptic rim of the infinite matrix with only acting mechanical or electric load is discussed with numerical examples.

**Key words** piezoelectric media, inclusion, plane problem, Faber series