应用数学和力学, 第 19 卷 第 2 期(1998 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

用第二类 Fredholm 积分方程求解弹性半空间上弹性板的垂直振动

金　波

(何福保推荐, 1996 年 4 月 26 日收到)

摘　要

根据混合边值条件, 建立均布简谐荷载作用下弹性半空间上弹性板振动的对偶积分方程　用 Abel 变换化对偶积分方程为第二类 Fredholm 积分方程, 并进行了数值计算

关键词　弹性半空间　弹性板　动力响应　第二类 Fredholm 积分方程

1　引　　言

弹性半空间上弹性板的动力分析在理论研究及工程实践上均具有重要意义　文献[1]~[3]用积分方程研究了刚性板及带刚域弹性板在弹性半空间上的振动问题　由于荷载作用在刚体及弹性板的刚域上, 分析时仅考虑上部荷载的合力, 与荷载分布情况无关, 所以把板的振动当作单自由度的振动问题

本文的目的是把文献[1]~[3]中研究刚体及带刚域弹性板振动的方法推广到完全弹性板, 即用第二类 Fredholm 积分方程解决完全弹性板(无限自由度体系)的振动问题　作者首先建立弹性半空间上圆板振动的对偶积分方程, 然后用 Abel 变换把此方程化成第二类 Fredholm 积分方程, 与文献[2]、[3]比较, 积分方程的核函数增加了与板上分布荷载有关的项　文末给出了弹性半空间上板的动力响应曲线

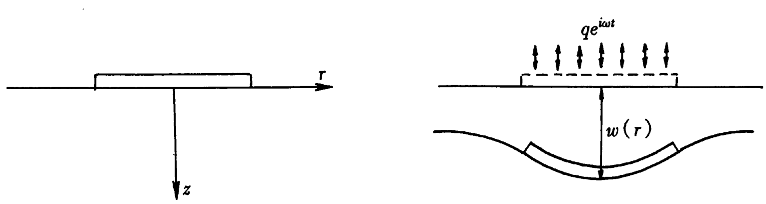
2　问题概述及对偶积分方程的建立

弹性圆板与半空间组成的系统如图 1(a) 所示, 板的半径为 a, 受到均布荷载 $qe^{i\ t}$的作用, 　为振动频率　板的边界自由　变形后板的位置如图 1(b) 所示　假定板与半空间表面为完全接触, 并且两者之间无摩擦力　半空间表面竖向位移为 $u_z(r,0)e^{i\ t}$, 竖向应力为 $_z(r,0)e^{i\ t}$, 圆板的位移为 $w(r)e^{i\ t}$

在圆板底面, 半空间表面的竖向位移等于弹性板的位移, 在圆板底面以外, 半空间表面竖向应力为零　前者为位移边界条件, 后者为应力边界条件, 将两类边界条件结合起来, 即构成

同济大学结构理论研究所, 上海 200092

了求解半空间上弹性板振动的对偶积分方程[4]:



(a) (b)

图 1

$$_0 \; H_1(\;)\;_z(\;,0)J_0(\;r)d\; = \; w(r) \qquad 0 \quad r \quad a \tag{2 1}$$

$$_0 \;\; _z(\;,0)J_0(\;r)d\; = \; 0 \qquad r > a \tag{2 2}$$

上式中 $H_1(\;) = \dfrac{k^2}{G}\dfrac{\sqrt{^2-h^2}}{(2\;^2-k^2)^2-4\;^2\sqrt{^2-h^2}\sqrt{^2-k^2}}$, $h^2 = \dfrac{^2}{C_d^2}$, $k^2 = \dfrac{^2}{C_s^2}$

C_d, C_s 分别为纵波及横波的速度, G 为弹性半空间的剪切模量,

$$_z(\;,0) = \;_0\; r\;_z(r,0)J_0(\;r)dr$$

弹性圆板的位移 $w(r)$ 满足如下板的方程

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{1}{D}\left[q + \;_0\;_z(\;,0)J_0(\;r)d\right] \tag{2 3}$$

其中: $D = E_f h^3/12(1-\;_f^2)$ 为板的抗弯刚度 E_f, $_f$, h 分别为板的弹性模量、泊松比和厚度

将(2 3)式重复进行积分便可得出:

$$w(r) = c_1\ln r + c_2r^2(\ln r-1) + c_3r^2 + c_4 + \frac{qr^4}{64D}$$
$$+\frac{1}{D}\;_0\;\;_z(\;,0)\left(\frac{r^2}{4\;^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}J_0(\;r)\right)d \tag{2 4}$$

由于板的中心位移及内力为有限值, 所以应有 $c_1 = c_2 = 0$ 对于自由边界的情况, 常数 c_3 可由

$$M_r(a) = -D\left[\frac{d^2w(r)}{dr^2} + \frac{_f}{r}\frac{dw(r)}{dr}\right]_{r=a} = 0$$

确定 而 c_4 代表板的中心位移 于是我们得到:

$$w(r) = c_4 - \frac{(3+\;_f)qa^2r^2}{32(1+\;_f)D} + \frac{qr^4}{64D} + \frac{1}{2(1+\;_f)D}\;_0\;\;_z(\;,0)$$
$$\left[2(1+\;_f)\left[\frac{1}{4}J_0(\;r) - \frac{1}{4} + \frac{r^2}{2}J_1(\;a) + \frac{_f r^2}{a}J_1(\;a)\right.\right.d \tag{2 5}$$

3 用 Abel 变换化对偶积分方程为第二类 Fredholm 积分方程

我们注意到 Abel 变换[5]:

$$A_1[f(r);x] = \left(\frac{2}{}\right)^{1/2}\;_0^x\;\frac{f(r)}{\sqrt{x^2-r^2}}dr \qquad x$$

$$A_2[f(r);x] = \left(\frac{2}{\ }\right)^{1/2} {}_x \frac{f(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}}dr$$

的如下性质:

$$A_1^{-1}\{H_0[\ ^{-1}A(\ );r];x\} = F_c\{A(\ );x\}$$

$$A_2\{rH_0[A(\ );r];x\} = F_c\{A(\ );x\}$$

其中: $A_1^{-1}[f(r);x] = D_xA_1[tf(t);x]$ 表示 A_1 的反变换, H_0 表示零阶 Hankel 变换, F_c 表示余弦变换 对(2 1)式作 A_1^{-1} 变换, (2 2)式作 A_2 变换后可得:

$$_0\ H_1(\ )\ _z(\ ,0)\cos(\ x)\ d\ = c_4 - \frac{(3+\ _f)qa^2x^2}{16(1+\ _f)D} + \frac{qx^4}{24D} + \frac{1}{2(1+\ _f)D}$$

$$_0\ \frac{_z(\ ,0)}{^3}\left[2(1+\ _f)[\cos(\ x) - 1] + 2\ ^2x^2J_1(\ a) + \frac{2\ x^2}{a}\ _0\ _fJ_1(\ a)\ \ d\right]$$

$$0\quad x\quad a \qquad (3\ 1)$$

$$_0\ _z(\ ,0)\cos(\ x)\ d\ = 0,\qquad x > a \qquad (3\ 2)$$

令

$$_z(\ ,0) = -\frac{2}{\ }\frac{G}{1-\ }c_4\ _0^a\ (t)\cos(\ t)\ dt \qquad (3\ 3)$$

则

$$_0\ _z(\ ,0)\cos(\ t)\ d\ = -\frac{Gc_4}{1-\ }\ (t)H(a-t) \qquad (3\ 4)$$

其中 $H(a-t)$ 为 Heaviside 单位阶跃函数 由(3 4)式看出第(3 2)式自动满足 把(3 3)、(3 4)式代入(3 1)式后得到:

$$(x) + {}_0^a K_1(x,t)\ (t)\ dt = f(x),\qquad 0\quad x\quad a \qquad (3\ 5)$$

其中:

$$K_1(x,t) = K_0(x,t) + \frac{G}{(1+\ _f)(1-\ )D}\ _0\ \frac{1}{^3}\left[2(1+\ _f)(\cos(\ x) - 1)\right.$$

$$\left. + 2\ ^2x^2J_1(\ a) + \frac{2\ x^2\ _f}{a}J_1(\ a)\right]\cos(\ t)\ d \qquad (3\ 6)$$

$$K_0(x,t) = -\frac{2}{\ }\ _0\left[1\frac{G}{1-\ }H_1(\ ) + 1\ \cos(\ x)\cos(\ t)\ d\right] \qquad (3\ 7)$$

$$f(x) = 1 - \frac{(3+\ _f)qa^2x^2}{16(1+\ _f)Dc_4} + \frac{qx^4}{24Dc_4},\qquad (\ \text{为地基泊松比})$$

由于上述第二类 Fredholm 积分方程中含有未知位移 c_4, 故尚须补充一个方程式 注意到 c_4 并不是独立的量, 我们可以利用垂直方向力的平衡条件及(3 3)式得出 c_4 与 (t) 之间的关系式[4]:

$$a^2q = \frac{4G}{1-\ }c_4\ _0^a\ (t)\ dt$$

即:

$$q = \frac{4}{\ ^2}\frac{G}{1-\ }c_4\ _0^a\ (t)\ dt \qquad (3\ 8)$$

把(3 8)式代入(3 5)式中的 $f(x)$, 可得到如下的方程:

$$(x)+\ {}_0^a K(x,t)\ \ (t)\,dt = 1 \qquad (3\ \ 9)$$

其中:
$$K(x,t) = K_1(x,t) + \frac{G}{(1-\ \ )}\left[\frac{(3+\ \ _f)x^2}{4(1+\ \ _f)D} - \frac{x^4}{6Da^2}\right.$$

4 第二类 Fredholm 积分方程的求解

A

首先对(3 9)式进行无量纲化 令 $x = ax_0$, $t = at_0$, $r = ar_0$, 并引入无量纲频率 $a_0 = a\ \ /c_s$ 和板土的刚度比 $\ \ = a^3 G/D$ 及 $H(\ \ _0, a_0) = GH_1(\ \ )/a$, $\ \ =\ \ _0/a$, 把(3 9)式化为:

$$(x_0)+\ {}_0^1 K(x_0,t_0)\ \ (t_0)\,dt_0 = 1 \qquad (4\ \ 1)$$

其中:

$$K(x_0,t_0) = K_0(x_0,t_0) + \frac{}{(1-\ \ )}\left[\frac{(3+\ \ _f)x_0^2}{4(1+\ \ _f)} - \frac{x_0^4}{6}\right.$$
$$+ \frac{}{(1+\ \ _f)(1-\ \ )}\ {}_0\ \frac{1}{{}_0^3}[2(1+\ \ _f)(\cos(\ \ _0x_0)-1)$$
$$+ 2\ \ _0^2x_0^2J_1(\ \ _0) + 2\ \ _0x_0^2\ \ _fJ_1(\ \ _0)]\cos(\ \ _0t_0)\,d\ \ _0 \qquad (4\ \ 2)$$

$$K_0(x_0,t_0) = \frac{-2}{}\ {}_0\left[\frac{1}{1-}\ \ _0H(\ \ _0,a_0)+1\right]\cos(\ \ _0x_0)\cos(\ \ _0t_0)\,d\ \ _0 \qquad (4\ \ 3)$$

$$H(\ \ _0,a_0) = \frac{a_0^2\sqrt{\ \ _0^2-\ \ ^2a_0^2}}{(2\ \ _0^2-a_0^2)^2-4\ \ _0^2\sqrt{\ \ _0^2-\ \ ^2a_0^2}\sqrt{\ \ _0^2-a_0^2}} \qquad (4\ \ 4)$$
$$= (1-2\ \ )/2(1-\ \ )$$

核函数(4 2)中的第一项 $K_0(x_0,t_0)$与弹性半空间中波的传播有关, 所以计算最为困难 作者用复变函数中的围线积分把此无穷积分化为有穷积分[4]:

$$K_0(x_0,t_0) = \frac{-2a_0}{(1-\ \ )}\left[\ {}_0\ \frac{y\sqrt{y^2-\ \ ^2}}{F(y)}\cos(ya_0x_0)\exp[-iya_0t_0]\,dy\right.$$
$$+ 4\ {}^1\ \frac{y^3(y^2-\ \ ^2)\sqrt{y^2-1}}{F(y)f(y)}\cos(ya_0x_0)\exp[-iya_0t_0]\,dy$$
$$\left.-\ i\ \frac{y_1\sqrt{y_1^2-\ \ ^2}}{F(y_1)}\cos(y_1a_0x_0)\exp[-iy_1a_0t_0]\right] \qquad (4\ \ 5)$$

其中:

$$F(y) = (2y^2-1)^2 - 4y^2\sqrt{y^2-\ \ ^2}\sqrt{y^2-1}$$
$$f(y) = (2y^2-1)^2 + 4y^2\sqrt{y^2-\ \ ^2}\sqrt{y^2-1}$$

y_1 为 Rayleigh 方程 $F(y) = 0$ 的根

由于把无穷积分化为有穷积分, 使得计算大为简化

核函数(4 2)中第三项的广义积分是收敛的 我们发现, 0 时, 被积函数是有界的 而对于 的情况, 广义积分是收敛的

由(4 1)式求出函数 (x_0)后, 即可得到板的位移及接触应力:

$$\frac{{}_z(r_0,0)}{q} = -\frac{1}{2}\left\{1\ \ {}_0^1\ (t_0)\,dt_0\left[\frac{(1)}{\sqrt{1-r_0^2}} - {}_{r_0}^1\frac{(t_0)}{\sqrt{t_0^2-r_0^2}}dt_0\right.\right., \qquad 0 < r_0 < 1$$
$$(4\ \ 6)$$

$$〃 \quad (\quad \frac{w(r_0)}{u_0} = \frac{2}{\ }\left\{ 1\int_0^1 (t_0)dt_0 - \int_0^{r_0} \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - x_0^2}} \left\{ \int_0^1 K_0(x_0, t_0) \ (t_0)\, dt_0 + \ (x_0) \right\} dx_0 \right\}$$

$$0 \quad r_0 \quad 1 \tag{4 7}$$

对于圆板中心处的位移可用简单的式子表示:

$$\frac{w(0)}{u_0} = 1\int_0^1 (t_0)\, dt_0 \tag{4 8}$$

(4 7) 、(4 8) 式中: $u_0 = [(1- \ )/4G] \ qa$

5 算　　例

本节主要说明均匀分布的简谐荷载作用下弹性板垂直位移与板土刚度比 及无量纲频率 a_0 之间的关系, 从而对弹性地基上板的动力特性有比较直观的了解 为此作者计算了圆心及板边缘的位移, 无量纲化后表示于图 2、图 3 中 当 = 0 时, 弹性板变为刚性板 地基的泊松比 = 1/3, 板的泊松比 $_f$ = 1/4

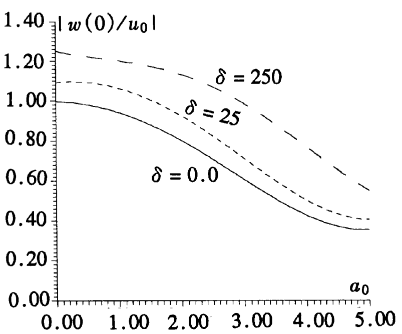


图 **2**　圆板的中心位移

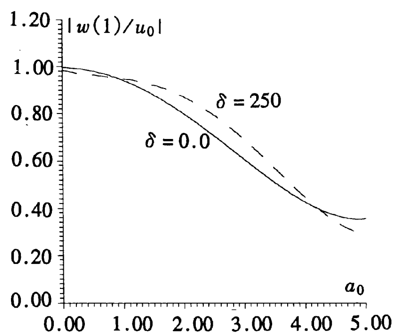


图 **3**　圆板的边缘位移

从图 2、图 3 可以看出: (1) 板的位移随无量纲频率 a_0 的增加而显著地减少 (2) 对于给定的刚度, 在整个频率域范围内板的中心位移总要大于边缘位移 (3) 在中心点柔性板的位移要大于刚性板, 但高频时在边缘点刚性板的位移要大于柔性板的位移

参　考　文　献

1 I. A. Robertson, Forced vertical vibration of a rigid circular disk on a semi_infinite elastic solid, Proc. Camb. Phil. Soc., **62**(3) (1966), 547 553.

2 Y. J. Lin, Dynamic response of circular plates resting on viscoelastic half space, ASME, J. Appl. Mech., **45**(2) (1978), 379 384.

3 M. Iguchi and J. E. Luco, Vibration of flexible plate on viscoelastic medium, ASCE, J. Eng. Mech., **108** (6) (1982), 1103 1120.

4 金波, 层状地基及其动力基础的计算, 浙江大学博士学位论文 (1994), 50 52.

5 G. M. L. Gladwell 著, 范天佑译, 经典弹性理论中的接触问题 , 北京: 北京理工大学出版社 (1991), 186 194.

Using Fredholm Integral Equation of the Second Kind to Solve the Vertical Vibration of Elastic Plate on an Elastic Half Space

Jin Bo
(Institute of Structure Theory, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

Abstract

The dual integral equations of vertical forced vibration of elastic plate on an elastic half space subject to harmonic uniform distribution loading are established according to the mixed boundary value condition. By applying Abel transformation the dual integral equations are reduced to Fredholm integral equation of the second kind which is solved numerically.

Key words elastic half space, elastic plate, dynamic response, Fredholm integral equation of the second kind