应用数学和力学, 第 19 卷 第 2 期(1998 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文克尔地基上阶梯式单向矩形薄板的振动

张英世　　王燮山

(陈予恕推荐, 1995 年 11 月 3 日收到, 1997 年 8 月 11 日收到修改稿)

摘　　要

用奇异函数建立文克尔地基上阶梯式单向矩形薄板自由振动和强迫振动的微分方程并求得其通解,用 W 算子给出主振型函数的表达式及常见支承条件下板的频率方程,用广义函数讨论板在不同形式载荷作用下的强迫振动响应

关键词　文克尔地基　阶梯式单向矩形薄板　自由振动　强迫振动响应

1　引　　言

矩形薄板在工程中得到广泛应用, 狭长的土建工程基础底板, 公路路面, 挡土墙, 地下结构框架, 水闸、船坞、溢流坝的底板, 都可以看成文克尔地基上的单向矩形薄板　工程中, 既要满足强度、刚度和稳定性的要求, 又要尽可能地节约材料, 故常采用阶梯形结构　此类板的振动目前尚无文献探讨　本文讨论文克尔地基上阶梯式单向矩形薄板的振动

2　自 由 振 动

2 1　自由振动微分方程及其通解

设有文克尔地基上厚度沿 y 方向呈 n 级阶梯式变化的单向矩形薄板, 边长分别为 a 和 b, 其各级阶梯衔接处的坐标为 y_i, 各级阶梯的长度为 $b_i = y_i - y_{i-1}$ ($y_0 = 0$, $y_n = b$), 各级阶梯内板的单位面积质量为 m_i, 厚度为 h_i, 抗弯刚度为 $D_i = Eh_i^3/12(1-\nu^2)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, E 为材料的弹性模量, ν 为泊松比, k 为地基系数, $w(y, t)$ 为振动的任一瞬时从平衡位置量起的板的挠度

文克尔地基上变厚度单向矩形薄板自由振动的微分方程为[1][2]

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + kw + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{2 1}$$

当板厚沿 y 方向呈阶梯式变化时(图 1), 可将板的抗弯刚度与单位面积质量分别表为[2]

$$D(y) = \sum_{i=1}^{n} D_i\left(\langle y - y_{i-1}\rangle^0 - \langle y - y_i\rangle^0\right) \tag{2 2}$$

北京航空航天大学飞行器设计与应用力学系 508 教研室, 北京 100083
华北电力大学动能工程系, 北京 102206

$$m(y)=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\langle y-y_{i-1}\rangle^0-\langle y-y_i\rangle^0\right) \tag{2.3}$$

式中, n 为板厚沿y 方向变化的阶梯数, D_i, m_i 分别为第i 级板的抗弯刚度和单位面积质量; $\langle y-y_i\rangle^0$ 为单位阶跃函数

$$\langle y-y_i\rangle^0=\begin{cases}0, & y\le y_i\\ 1, & y>y_i\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.4}$$

$$\langle y-y_0\rangle^0=1,\qquad \langle y-y_n\rangle^0=0$$

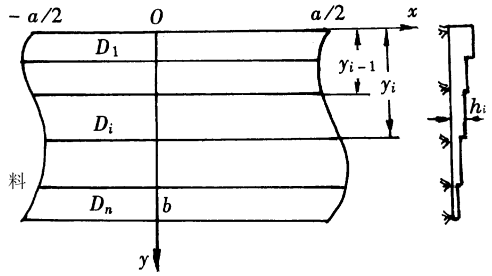

图 1 文克尔地基上阶梯式单向矩形薄板

将式(2.2)、(2.3)代入方程(2.1), 有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} D_i\left(\langle y-y_{i-1}\rangle^0-\langle y-y_i\rangle^0\right)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\\&+2\left\{-D_1\,\delta(y-y_1)+\sum_{i=2}^{n}D_i\left[\delta(y-y_{i-1})-\delta(y-y_i)\right]\right\}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\\&+\left\{-D_1\,\delta'(y-y_1)+\sum_{i=2}^{n}D_i\left[\delta'(y-y_{i-1})-\delta'(y-y_i)\right]\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\&+kw+\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\langle y-y_{i-1}\rangle^0-\langle y-y_i\rangle^0\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0\end{aligned} \tag{2.5}$$

根据 δ 函数的性质, 对函数$f(y)$, 有

$$\left.\begin{aligned}&\delta(y-y_i)f(y)=f(y_i)\,\delta(y-y_i)\\&\delta'(y-y_i)f(y)=-f'(y_i)\,\delta(y-y_i)+f(y_i)\,\delta'(y-y_i)\\&\qquad (i=1,2,\cdots,n-1)\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

将式(2.6)代入式(2.5), 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} D_i\left(\langle y-y_{i-1}\rangle^0-\langle y-y_i\rangle^0\right)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-D_1\,\delta(y-y_1)\left|\frac{\partial^3 w_1(y,t)}{\partial y^3}\right|_{y=y_1}\\&+\sum_{i=2}^{n}D_i\left[\delta(y-y_{i-1})\left|\frac{\partial^3 w_i(y,t)}{\partial y^3}\right|_{y=y_{i-1}}-\delta(y-y_i)\left|\frac{\partial^3 w_i(y,t)}{\partial y^3}\right|_{y=y_i}\right]\\&-D_1\,\delta'(y-y_1)\left|\frac{\partial^2 w_1(y,t)}{\partial y^2}\right|_{y=y_1}+\sum_{i=2}^{n}D_i\left[\delta'(y-y_{i-1})\left|\frac{\partial^2 w_i(y,t)}{\partial y^2}\right|_{y=y_{i-1}}\right.\\&\left.-\delta'(y-y_i)\left|\frac{\partial^2 w_i(y,t)}{\partial y^2}\right|_{y=y_i}\right]+kw+\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\langle y-y_{i-1}\rangle^0-\langle y-y_i\rangle^0\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0\end{aligned} \tag{2.7}$$

若板的各阶梯衔接处 $y=y_i$ 边上的总弯矩和总剪力连续变化, 即若下式成立

$$\left.\begin{aligned}&D_i\left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}w_i(y,t)\right|_{y=y_i}=D_{i+1}\left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}w_{i+1}(y,t)\right|_{y=y_i}\\&D_i\left|\frac{\partial^3}{\partial y^3}w_i(y,t)\right|_{y=y_i}=D_{i+1}\left|\frac{\partial^3}{\partial y^3}w_{i+1}(y,t)\right|_{y=y_i}\\&\qquad (i=1,2,\cdots,n-1)\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

式(2.7)便简化为

$$D(y)\frac{\partial^4 w(y,t)}{\partial y^4}+kw(y,t)+m(y)\frac{\partial^2 w(y,t)}{\partial t^2}=0 \tag{2.9}$$

此即文克尔地基上阶梯式单向矩形薄板自由振动的微分方程 式中，$D(y)$和 $m(y)$分别由式$(2\ 2)$和式$(2\ 3)$给出

将方程(2 9)之通解表为

$$w(y,\ t) = \sum_{j=1} w_j(y,\ t) \tag{2 10}$$

其中 $$w_j(y,\ t) = Y_j(y)\,T_j(t) \tag{2 11}$$

为相应于第j 个主振型的板的挠度 将式$(2\ 10)$、$(2\ 11)$代入方程$(2\ 9)$，可得以下二方程

$$T_j(t) + \ _j^2 T_j(t) = 0 \tag{2 12}$$

$$Y_j^{(4)}(y) + \frac{1}{D(y)}[k - m(y)\ \ _j^2]\,Y_j(y) = 0 \tag{2 13}$$

式中，$_j$ 为板的第j 阶固有频率

方程(2 12)之通解为

$$T_j(t) = T_j(0)\cos\ _j t + \frac{T_j(0)}{\ _j}\sin\ _j t \tag{2 14}$$

式中，$T_j(0)$，$T_j(0)$为函数 $T_j(t)$的初参数，可由振动的初始条件确定

方程(2 13)之通解为

$$\begin{aligned} Y_j(y) = {} & Y_j(0)\sum_{i=1}^{n}(\ \ y - y_{i-1}\ ^0 - \ \ y - y_i\ ^0)\,W^{(i-1)}\ _1(\ _1 y) \\ & + Y_j(0)\sum_{i=1}^{n}(\ \ y - y_{i-1}\ ^0 - \ \ y - y_i\ ^0)\,W^{(i-1)}\ _2(\ _1 y) \\ & + Y_j(0)\sum_{i=1}^{n}(\ \ y - y_{i-1}\ ^0 - \ \ y - y_i\ ^0)\,W^{(i-1)}\ _3(\ _1 y) \\ & + Y_j(0)\sum_{i=1}^{n}(\ \ y - y_{i-1}\ ^0 - \ \ y - y_i\ ^0)\,W^{(i-1)}\ _4(\ _1 y) \end{aligned} \tag{2 15}$$

式中，$Y_j(0)$，$Y_j(0)$，$Y_j(0)$，$Y_j(0)$为主振型函数 $Y_j(y)$的初参数，可由板的边界条件确定；$_1 \sim\ _4$为影响函数，其定义与分段常数 $_i^4$及$D_i^{-1}(k - m_i\ \ _j^2)(i = 1, 2,\ \ , n)$有关 在下列有关影响函数及其微分关系的讨论中，$i = 1, 2,\ \ , n$

1 $k > m_i\ \ _j^2$

令 $4\ _i^4 = D_i^{-1}(k - m_i\ \ _j^2)$，则有

$$\left.\begin{aligned} _1[\ _i(y - y_{i-1})] &= \mathrm{ch}\ _i(y - y_{i-1})\cos\ _i(y - y_{i-1}) \\ _2[\ _i(y - y_{i-1})] &= \frac{1}{2\ _i}[\mathrm{sh}\ _i(y - y_{i-1})\cos\ _i(y - y_{i-1}) \\ &\quad + \mathrm{ch}\ _i(y - y_{i-1})\sin\ _i(y - y_{i-1})] \\ _3[\ _i(y - y_{i-1})] &= \frac{1}{2\ _i^2}\mathrm{sh}\ _i(y - y_{i-1})\sin\ _i(y - y_{i-1}) \\ _4[\ _i(y - y_{i-1})] &= -\frac{1}{4\ _i^3}[\mathrm{sh}\ _i(y - y_{i-1})\cos\ _i(y - y_{i-1}) \\ &\quad - \mathrm{ch}\ _i(y - y_{i-1})\sin\ _i(y - y_{i-1})] \end{aligned}\right\} \tag{2 16}$$

2 $k < m_i\ \ _j^2$

令 $_i^4 = D_i^{-1}(m_i\ \ _j^2 - k)$，则有

$$\left.\begin{aligned}
{}_1[\ {}_i(y-y_{i-1})] &= [\mathrm{ch}\ {}_i(y-y_{i-1})+\cos\ {}_i(y-y_{i-1})]/2 \\
{}_2[\ {}_i(y-y_{i-1})] &= [\mathrm{sh}\ {}_i(y-y_{i-1})+\sin\ {}_i(y-y_{i-1})]/2\ {}_i \\
{}_3[\ {}_i(y-y_{i-1})] &= [\mathrm{ch}\ {}_i(y-y_{i-1})-\cos\ {}_i(y-y_{i-1})]/2\ {}_i^2 \\
{}_4[\ {}_i(y-y_{i-1})] &= [\mathrm{sh}\ {}_i(y-y_{i-1})-\sin\ {}_i(y-y_{i-1})]/2\ {}_i^3
\end{aligned}\right\} \qquad (2\ 17)$$

上述两种情况下的影响函数之间的微分关系,可统一用下式表示

$$\left.\begin{aligned}
{}_1[\ {}_i(y-y_{i-1})] &= -\ D_i^{-1}(k-\ m_i\ \ {}_j^2)\ \ {}_4[\ {}_i(y-y_{i-1})] \\
{}_2[\ {}_i(y-y_{i-1})] &= \ {}_1[\ {}_i(y-y_{i-1})] \\
{}_3[\ {}_i(y-y_{i-1})] &= \ {}_2[\ {}_i(y-y_{i-1})] \\
{}_4[\ {}_i(y-y_{i-1})] &= \ {}_3[\ {}_i(y-y_{i-1})]
\end{aligned}\right\} \qquad (2\ 18)$$

W 算子的定义为

$$W\ \ {}_r[\ {}_i(0y-y_{i-1})] = \left[\ {}_r(\ {}_ib_i)\quad {}_r(\ {}_ib_i)\quad \frac{D_i}{D_{i+1}}\ {}_r(\ {}_ib_i)\quad \frac{D_i}{D_{i+1}}\ {}_r(\ {}_ib_i)\right]\left[\begin{array}{l} {}_1[\ {}_{i+1}(y-y_i)] \\ {}_2[\ {}_{i+1}(y-y_i)] \\ {}_3[\ {}_{i+1}(y-y_i)] \\ {}_4[\ {}_{i+1}(y-y_i)] \end{array}\right] \qquad (2\ 19)$$

在 关 下列

式中: $r=1, 2, 3, 4$; $i=1, 2, \quad , n$

其运算规则为: $W^{(n)}\ \ {}_r = \ WW^{(n-1)}\ \ {}_r,\quad W^{(1)}\ \ {}_r = \ W\ \ {}_r,\quad W^{(0)}\ \ {}_r = \ \ {}_r$

将式(2 14)、(2 15)代入式(2 11),再代入式(2 10),便得偏微分方程(2 9)之通解,亦即板自由振动的挠度

$$w(y,\ t) = \ \sum_{j=1} Y_j(y)\left[T_j(0)\cos\ {}_jt + \frac{T_j(0)}{{}_j}\sin\ {}_jt\right. \qquad (2\ 20)$$

2 2 固有频率的求法

由式(2 13)可得板的固有频率表达式

$${}_j^2 = \frac{Y_j^{(4)}(y)}{Y_j(y)}\sum_{i=1}^{n}\frac{D_i}{m_i}(\ \ y-\ y_{i-1}\ \ ^0-\ \ y-\ y_i\ \ ^0)+\ k\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}(\ \ y-\ y_{i-1}\ \ ^0-\ \ y-\ y_i\ \ ^0)$$

$$(2\ 21)$$

具体求频率时,可用表 1 给出的频率方程[1]

表 1 文克尔地基上阶梯式单向矩形薄板的频率方程

$y=0, y=b$ 两边支承	固 定	简 支	自 由	弹性支承	弹性嵌固
频率方程	$\begin{vmatrix} A_3 & A_4 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} A_2 & A_4 \\ A_2 & A_4 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_4 \\ a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} A_2 & A_3 & A_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0$

表中,

$$A_r = [\ W^{(n-1)}\ \ {}_r(\ \ {}_1y)]_{y=b}$$

$$a_s = \ k_w[\ \ {}_s(\ \ {}_1y)]_{y=0} - \ D_1[\ \ {}_s(\ \ {}_1y)]_{y=0}$$

$$b_s = k_w[W^{(n-1)}{}_s(\ _1y)]_{y=b} - D_n[W^{(n-1)}{}_s(\ _1y)]_{y=b}$$
$$c_t = k[\ _t(\ _1y)]_{y=0} + D_1[\ _t(\ _1y)]_{y=0}$$
$$d_t = k[W^{(n-1)}{}_t(\ _1y)]_{y=b} + D_n[W^{(n-1)}{}_t(\ _1y)]_{y=b}$$

式中: $r = 1, 2, 3, 4$; $s = 1, 2, 4$; $t = 2, 3, 4$; , , 分别表示相应项对 y 的 1、2、3 阶导数 k_w 与 k 分别为文[1]所述垂直线弹簧与螺旋弹簧的弹簧常数

频率方程一般为超越方程,用数值解法可求得板的各阶固有频率

2 3 算例

图 2 所示文克尔地基上的单向矩形薄板, $y = 0$ 与 $y = b$ 两边固定, 板沿 y 方向分为二级阶梯, 阶梯衔接处坐标为 $y = b/3 = 1\mathrm{m}$, 第一段板厚 $h_1 = 012\mathrm{m}$, 抗弯刚度 $D_1/2 = D_2 = D = 1137$ @$10^7\mathrm{N\#m^2/m}$, 密度 C$= 2400\mathrm{kg/m^3}$, 地基系数 $k = 2$ @$10^7\mathrm{N/m^3}$# 求其一、二阶固有频率及自由振动的挠度#

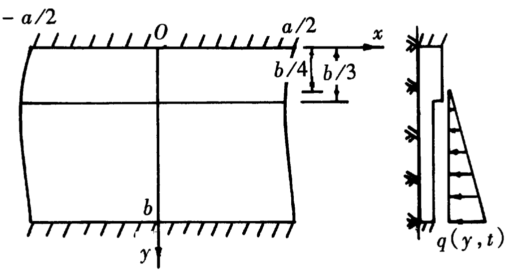

图 2 文克尔地基上二级阶梯单向矩形薄板

解 由边界条件和式(2115), 可得板的主振型函数

$$Y_j(y) = Y_j^d(0)[(1 - 3y - 14^0) W_3(K_1 y) + 3y - 14^0 W W_3(K_1 y)]$$
$$+ Y_j(0)[(1 - 3y - 14^0) W_4(K_1 y) + 3y - 14^0 W W_4(K_1 y)]$$

由题意, 有 $k < m_i X_j$, $i = 1, 2$, 故 $W_1 \sim W_4$ 由式(2117)给出, 其中

$$K_1^4 = D_1^{-1}(m_1 X_j^2 - k), \quad K_2^4 = D_2^{-1}(m_2 X_j^2 - k)$$

频率方程为

$$\begin{vmatrix} [W W_3(K_1 y)]_{y=b} & [W W_4(K_1 y)]_{y=b} \\ [W W_3(K_1 y)]^c_{y=b} & [W W_4(K_1 y)]^c_{y=b} \end{vmatrix} = 0$$

将各影响函数分别展开成泰勒级数,取前两项代入上式,可得板的一、二阶固有频率

$$X_1 = 42416219 = \frac{417561^2}{b^2}\sqrt{\frac{D}{m_1}}, \quad X_2 = 161916228 = \frac{912888^2}{b^2}\sqrt{\frac{D}{m_1}}$$

其中, b, D 已由题目给定, $m = 480\mathrm{kg/m^2}$# 相应于一阶固有频率 X_1, 有 $K_1^4 = 214287\mathrm{m^{-4}}$, $K_2^4 = 315544\mathrm{m^{-4}}$; 相应于二阶固有频率 X_2, 有 $K_1^4 = 4512236\mathrm{m^{-4}}$, $K_2^4 = 7114913\mathrm{m^{-4}}$# 由此便可求出主振型函数, 进而求得板自由振动的挠度# 此处, $Y_j^d(0)$, $Y_j(0)$ 为任意常数#

k 31 强 迫 振 动

311 动力响应

在动载荷 $q(y, t)$ 作用下,板强迫振动的微分方程为

$$D(y)\frac{5^4 w(y, t)}{5y^4} + kw(y, t) + m(y)\frac{5^2 w(y, t)}{5t^2} = q(y, t) \tag{311}$$

根据模态分析法[3],将方程(311)之通解表为

$$w(y, t) = \sum_{j=1}^{]} Y_j(y) T_j(t) \tag{312}$$

式中, $Y_j(y)$ 为正则化的主振型函数, $T_j(t)$ 为与之相应的广义坐标# 将式(312)代入方程(311), 用振型方程(2113)化简后, 等式两边同乘以 $Y_i(y)$, 在[0, b]上进行积分, 并考虑正则化的主振型函数的正交性条件

$$Q_0^b m(y)\, Y_i(y)\, Y_j(y)\, dy = 0 \qquad (i\ X\ j) \tag{313}$$

$$Q_0^b m(y)\, Y_j^2(y)\, dy = 1^{X} \tag{314}$$

可得

$$\ddot{T}_j(t) + X_j^2 T_j(t) = Q_j(t)/M_j \qquad (j = 1, 2, ,) \tag{315}$$

式中,

$$Q_j(t) = Q_0^b q(y, t)\, Y_j(y)\, dy \tag{316}$$

$$M_j = Q_0^b m(y)\, Y_j^2(y)\, dy \tag{317}$$

分别为与广义坐标相应的第 j 阶广义力和广义质量#

方程(315) 之通解为

$$T_j(t) = T_j(0)\cos X_j t + \frac{T_j(0)}{X_j}\sin X_j t + T_{j0}(t) \tag{318}$$

式中, $T_j(0)$ 和 $\dot{T}_j(0)$ 分别为广义坐标和广义速度的初值, 可由振动的初始条件及式(312)确定; $T_{j0}(t)$ 为方程(315)之非齐次特解

, 有　　意

$$T_{j0}(t) = \frac{1}{M_j X_j} Q_0^t Q_j(S)\sin X_j(t - S)\, dS \tag{319}$$

将式(318) 代入式(312), 便得偏微分方程(311) 之通解, 亦即板的动力响应

$$w(y, t) = \sum_{j=1}^{]} Y_j(y)\left[T_j(0)\cos X_j t + \frac{T_j(0)}{X_j}\sin X_j t + w_0(y, t)\right. \tag{3110}$$

312　强迫振动响应

式(3110) 中的 $w_0(y, t)$ 为板的强迫振动响应

$$w_0(y, t) = \sum_{j=1}^{]} \frac{Y_j(y)}{M_j X_j} Q_0^t Q_j(S)\sin X_j(t - S)\, dS \tag{3111}$$

在不同形式的动载荷作用下, 板的强迫振动响应, 即方程(311) 之非齐次特解的形式不同, 简述如下[2]#

31211　集中力

设在板上点 $k(x_k, y_k)(y_{r-1}\ [\ y_k < y_r)$ 处作用有横向集中力 $P(t)$(图 3), 则

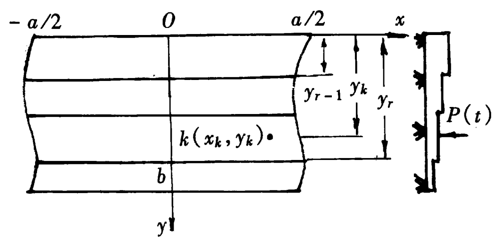

图 3　文克尔地基上受集中力作用的阶梯式单向矩形薄板

X　主振型函数的正交性条件为式(313) 与 $Q_0^b m(y)\, Y_j^2(y)\, dy = M_j$, 取正则化因子 $M_j = 1$ 将主振型正则化, 便得到式(314)#

$$M_j=\int_0^b m_r Y_j^2(y)\,dy$$

$$w_0(y,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{Y_j(y)}{M_j\omega_j}Y_j(y_k)\int_0^t P(\tau)\sin\omega_j(t-\tau)\,d\tau \tag{3.12}$$

3.2.2 局部面均布载荷

设在板面的区域$[x_k, x_{k+1}; y_k, y_{k+1}]$($y_{r-1}\le y_k<y_r$, $y_{s-1}\le y_{k+1}<y_s$)内作用有垂直于板面、集度为$q(t)$的面均布载荷, 则

$$m_1(y)=m_r(\langle y-y_k\rangle^0-\langle y-y_r\rangle^0)+\sum_{i=r+1}^{s-1}m_i(\langle y-y_{i-1}\rangle^0-\langle y-y_i\rangle^0)$$
$$+\ m_s(\langle y-y_{s-1}\rangle^0-\langle y-y_{k+1}\rangle^0)$$

$$M_j=\int_0^b m_1(y)\,Y_j^2(y)\,dy$$

$$w_0(y,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{Y_j(y)}{M_j\omega_j}\left[\int_{y_k}^{b}\langle y-y_k\rangle^0 Y_j(y)\,dy-\int_{y_{k+1}}^{b}\langle y-y_{k+1}\rangle^0 Y_j(y)\,dy\right]$$
$$\cdot\int_0^t q(\tau)\sin\omega_j(t-\tau)\,d\tau \tag{3.13}$$

3.2.3 沿 y 方向的三角形面分布载荷

设在板面的直线 $y=y_k$($y_{r-1}\le y_k<y_r$)与 $y=b$ 之间的区域$[-a/2, a/2; y_k, b]$内作用有横向的三角形面分布载荷, $y=y_k$ 处集度为0, $y=b$ 处集度为$q(t)$, 载荷集度沿 x 方向不变, 则

$$m_2(y)=m_r(\langle y-y_k\rangle^0-\langle y-y_r\rangle^0)+\sum_{i=r+1}^{n}m_i(\langle y-y_{i-1}\rangle^0-\langle y-y_i\rangle^0)$$

$$M_j=\int_0^b m_2(y)\,Y_j^2(y)\,dy$$

$$w_0(y,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{Y_j(y)}{(b-y_k)M_j\omega_j}\int_0^b\int_0^t\langle y-y_k\rangle^1 Y_j(y)\,q(\tau)\sin\omega_j(t-\tau)\,d\tau\,dy \tag{3.14}$$

3.3 算例

在 $t=t_0$ 瞬时, 前例所给板上的区域$[-a/2, a/2; b/4, b]$内作用有突加的三角形面分布载荷, $y=b/4$ 处集度为0, $y=b$ 处集度为q_0, 载荷集度沿 x 方向不变, 求板的动力响应。

解 由载荷的分布区域, 可得

$$m(y)=m_1(\langle y-b/4\rangle^0-\langle y-b/3\rangle^0)+m_2\langle y-b/3\rangle^0$$

$$M_j=m_1\int_{b/4}^{b/3}Y_j^2(y)\,dy+m_2\int_{b/3}^{b}Y_j^2(y)\,dy$$

将载荷用奇异函数表为

$$q(y,t)=\frac{4q_0}{3b}\left\langle y-\frac{b}{4}\right\rangle^1\delta(t-t_0)$$

广义力为

$$Q_j(t)=\int_0^b\frac{4q_0}{3b}\left\langle y-\frac{b}{4}\right\rangle^1\delta(t-t_0)\,Y_j(y)\,dy$$

强迫振动响应为

$$w_0(y,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{4q_0Y_j(y)}{3bM_j\omega_j}\sin\omega_j(t-t_0)\int_0^b\left\langle y-\frac{b}{4}\right\rangle^1 Y_j(y)\,dy$$

式中, $Y_j(y)$为按照条件(314)正则化了的主振型函数#

将上式与前例中所得板自由振动的挠度叠加,便得板的动力响应#

参 考 文 献

1 曹志远,5板壳振动理论6,中国铁道出版社,北京 (1989),13) 36.

2 王燮山,5奇异函数及其在力学中的应用6,科学出版社,北京 (1993),3) 75,230) 233.

3 S. Timoshenko, et al., Vibration Problems in Engineering, 4th. Ed., U. S. A., John Wiley & Sons Inc. (1974), 363) 433.

Vibrations of One_Way Rectangular Stepped Thin Plates on Winklercs Foundation

Zhang Yingshi
(Division 508, Department of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, P. R. China)

Wang Xieshan
(North China Electric Power University, Beijing 102206, P. R. China)

Abstract

Differential equations of free/forced vibrations of one_way rectangular stepped thin plates on Winklercs foundation are established by using singular functions; their general solutions are solved; expression of vibration mode function and frequency equations on usual supports are derived from W operator; forced responses of such plates under different_type loads are discussed with generalized functions.

Key words Winklercs foundation, one_way rectangular stepped thin plate, free vibration, forced response