

一般非线性演化方程的“暴力进程” 及有关问题的讨论

欧阳首承^① 王永中^② 吴勇^③ 李超^①

(吴学谋推荐; 1995 年 6 月 20 日收到, 1995 年 7 月 20 日收到修改稿)

摘 要

本文为系列讨论非线性演化方程“自身摧毁效应”的工作之一。文献[1, 2]已讨论了流体力学的 Navier-Stokes 方程非线性演化的溃变。本文又进行了某些扩展, 并涉及一、二阶模型的溃变和高阶复合型的“暴力进程”。结果表明, 某些模型可在一定条件出现“半破裂”; 溃变体现在整体演化中; 对流体而言, 弱非线性模型的人为性较强, 且基于连续性思维的数值积分的平滑格式, 及类似的作法或提法有待商榷。

关键词 “暴力进程” 溃变 “半破裂” 整体演化

§ 1. 引 言

自然现象中常可见到演化形式的逆转, 如辐合可随浪花的跌落转为辐散, 弹性材料可因冲击变为非对称断裂; 生物演化中的生生不息和物种的变异; 经济活动中的昌盛和衰落; 社会演变中的“乱”与“治”等。对于这些现象, 显然以线性模型及相应的连续性思维是无能为力的。70 年代初, R. Thom 提出了“突变”(catastrophe)理论^[3], 可以说是近代数理模型研究的重要进展。但仔细分析可见其模型是参数和非线性混在一起的, 并且变化主要体现在参数上。还没有直接触及非线性自身的问题, 也未涉及物理上转折性的突然变化。

显然, 这涉及到物理问题的基本特征、数学模型的描述能力、处理方法及思维方式等问题。作为结果的正确性, 应当以物理特征为依据。若物理问题包含连续和不连续, 则模型或方法都应体现这一特征。目前普遍应用的微积分却因不连续或间断函数失效, 这一“不足”必然延续到微分(或积分)方程中。目前的分析已经表明^[4], 某些微分方程的定解问题, 可因奇异性或不连续而不存在整体存在性定理, 并直接涉及 Riemann 意义的积分或其衍生的积分格式失效。一个严酷的事实是, 模型的不足或解法的失效, 并不能阻止物理的演变, 这也是吴学谋在泛系建模中指出的问题^[5]。

鉴于此, 我们不得不从物理问题的角度对某些数学模型的基本特征、解法的处理方式进行

① 成都气象学院教工 24 号信箱, 成都 610041

② 北京气象学院, 北京 100081

③ 涪陵市国土局, 重庆涪陵 408000

再思考·例如, N_S 方程的自身非线性存在导数的奇异性^[1,2], 而且奇异后的演化特征与流体的实际演化形式相符; 外迫的非线性可导致函数自身的不连续, 并与实际一致· 这样, 我们基于实际物理问题之“实”, 借助数学形式之“形”而提出了“溃变”(英语可借用 `blown_up` 表示)的概念, 系指崩溃及崩溃后的转化形式, 与数学的 `blow up` 类似, 但有区别, 故在[2]中也引用了“暴转”的提法; 将某些非线性模型具有连续性“死亡”而又不知其“死亡”后运动形式的情况, 称为非线性的“暴力进程”· 对此, 作者等进行了 15 年的实践, 并证实和发现不连续信息可以预测天气系统的转折性突变, 从而提出了天气预测的溃变理论和应用体系^[1,2], 与事物发展的“物极必反”原理暗合, 也与实践较趋近·

显然, 非线性演化的“溃变”、“暴力进程”是否具有普适性的讨论是必要的· 为此, 本文从简单的基本模型出发, 除显化一般性模型的溃变外, 也发现一类“半破裂”模型和人为模型的“暴力进程”, 并涉及某些观念和概念的再认识· 诸如, 非线性的数学特征; 弱非线性方程的描述能力, 数值积分格式及其在非线性模型中的应用, 可预报性与“chaos”; 湍流的机理; 系统的转折性变化探索等某些基本问题的再思考·

§ 2. 一阶的模型溃变问题

一阶简单模型可表示为

$$u' = du/dt = F \tag{2.1}$$

式中, u 为运动变量, t 为时间, F 为外迫项· 若 u 为速率, F 为外迫力, 则(2.1)为牛顿第二定律, 也可称为模型的 Lagrange 语制的一般形式·

若 F 为 u 的不同形式, 例如是 u 的不同次数的多项式, 则可分析(2.1)的溃变特征·

1. F 为 u 的二次多项式

可取

$$F(u) = u^2 + pu + q \tag{2.2}$$

式中 p, q 为常数· 由(2.2)则(2.1)可以写为

$$u' = u^2 + pu + q \tag{2.3}$$

显然, p, q 为不同值时, (2.3)具有不同形式的解, 可由下面三种形式说明·

1) $p^2 - 4q = 0$ 时, 则(2.3)可写为

$$u' = (u + p/2)^2 \tag{2.4}$$

上式积分之, 有

$$u = - (1/(t + A_0) + p/2) \tag{2.5}$$

A_0 为常数· 由(2.5)知, 当 $A_0 > 0$ 时, 模型无溃变(即图 1 中的曲线 II); $A_0 < 0$, 则模型含有溃变(即图 1 中的 I、III 曲线), 而不是平衡态的突变· 这表明溃变与突变的含义不同, 且考虑到此模型仅是数学模型, 故称为模型的溃变·

2) $p^2 - 4q > 0$, 则(2.3)式可以写为

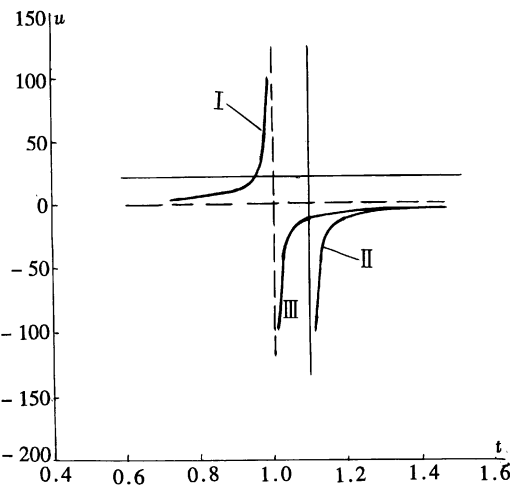


图 1 (2.5)式的演化特征

$$u \gg = (u + \frac{1}{2}p)^2 - \frac{1}{4}(p^2 - 4q) \quad (2.6)$$

积分之,有

$$\ln \left| \left(u + \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right) \middle/ \left(u + \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right) \right| = \sqrt{p^2 - 4q} t + A_0 \quad (2.7)$$

由(2.7)知,若运动限于 $|u + p/2| < \sqrt{p^2 - 4q}/2$ 的有界的局部演化时,则

$$u \gg = \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} t + \frac{1}{2} A_0 \right] - \frac{p}{2} \quad (2.8)$$

(2.8)即为限定范围内的光滑解;若 $|u + p/2| > \sqrt{p^2 - 4q}/2$,即对于整体的无界运动,有

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} \operatorname{cth} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} t - \frac{1}{2} A_0 \right] - \frac{p}{2} \quad (2.9)$$

(2.9)显示了运动可以演化为溃变,并当 $A_0 > 0$ 时,溃变发生时刻为 $t_c \left[= -A_0 / \sqrt{p^2 - 4q} \right]$.

(2.8)、(2.9)表示同一模型可在限定的局部条件下具有光滑的连续性和非限定的整体演化中的连续和不连续并存的多重溃变。换言之,作为整体演化,则存在局部的自身连续演化的延续和局部破裂及破裂后引起的多重逆转。

3) $p^2 - 4q < 0$, (2.3)可写为

$$u \gg = (u + p/2)^2 + (4q - p^2)/4 \quad (2.10)$$

积分上式,有

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{4q - p^2} \tan \left[\frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} t + A_0 \right] - \frac{p}{2} \quad (2.11)$$

取 $\frac{1}{2} \sqrt{4q - p^2} t + A_0 = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ($n = \text{整数}$)

则(2.11)描述了周期性的多次溃变。

作为具体应用,可以下例说明,即

$$x \gg = dx/dt = -\lambda x^2 - x + 1 \quad (2.12)$$

上式积分之,有

1) $1 > -4\lambda$ ($\lambda > 0$), 有

$$\frac{1}{\sqrt{1+4\lambda}} \ln \frac{2\lambda x + 1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda x + 1 - \sqrt{1+4\lambda}} = t + c \quad (2.13)$$

c 为常数。经演算,有

$$x = \frac{\left[(1 - \sqrt{1+4\lambda}) e^{(t+c)\sqrt{1+4\lambda}} - (1 + \sqrt{1+4\lambda}) \right]}{2\lambda \left[1 - e^{(t+c)\sqrt{1+4\lambda}} \right]} \quad (2.14)$$

2) $1 < -4\lambda$, 则有

$$\frac{2}{\sqrt{4\lambda-1}} \tan^{-1} \left[\frac{-2\lambda x - 1}{\sqrt{4\lambda-1}} \right] = t + c \quad (2.15)$$

3) $1 + 4\lambda = 0$, 则

$$x = \frac{1}{\lambda(t+c)} - \frac{1}{2\lambda} \quad (2.16)$$

(2.14)、(2.15)、(2.16)均表示演化中含有溃变。如此模型描述了生物的繁衍,则显示了在一定时间内会发生逆转,并不是一味地繁衍下去,体现了“物极必反”的特征。

2. 三次多项式模型

三次多项式的一般式为

$$F = u^3 + pu + q \quad (2.17)$$

于是(2.1)可以写为

$$u \triangleright = u^3 + pu + q \quad (2.18)$$

(2.18)的溃变与多值性涉及如下几个定理•

定理 1 若 u_1 是 F 的三重根, 可取 $F = (u - u_1)^3$, 则有

$$u = u_1 \pm (A_0 - 2t)^{-2} \quad (2.19)$$

式中, $A_0 = \text{const.}$, (2.19)为二极溃变问题•

显然, 若上述情况拓广至 n 重根, 则(2.18)含有 $(n-1)$ 极溃变•

定理 2 若 $F = 0$ 有一实根和一对共轭虚根, 则(2.18)含有溃变•

证 设 u_1 是 $F = 0$ 的唯一实根, 则 F 可写为

$$F = (u - u_1)(u^2 + p_1u + q_1) \quad (2.20)$$

p_1, q_1 为常数, 且 $p_1^2 - 4q_1 < 0$. 于是(2.18)式变为

$$u \triangleright = (u - u_1)(u^2 + p_1u + q_1) \quad (2.21)$$

上式按部分分式展开, 有

$$\frac{1}{(u - u_1)(u^2 + p_1u + q_1)} = \frac{A}{u - u_1} + \frac{Mu + N}{u^2 + p_1u + q_1} \quad (2.22)$$

式中, $A = (\beta^2 + \gamma^2)^{-1}$, $M = -(\beta^2 + \gamma^2)^{-1}$, $N = -\alpha(\beta^2 + \gamma^2)^{-1}$

$$\alpha = p_1 + u_1, \quad \beta = \frac{p_1}{2} + u_1, \quad \gamma = \sqrt{q_1 - p_1^2/4}$$

代入(2.21)积分, 有

$$\frac{1}{u_1^2 + p_1u_1 + q_1} \ln \left| \frac{u - u_1}{\sqrt{u^2 + p_1u + q_1}} \right| + \frac{N - p_1M/2}{\sqrt{q_1 - p_1^2/4}} \arctan \frac{u + p_1/2}{\sqrt{q_1 - p_1^2/4}} = t + A_0 \quad (2.23)$$

显然, 上式当 t 为有限值时含有多重溃变•

定理 3 若 $F = 0$, 有两个相等实根 u_1 和一个单根 u_2 , 可设 $u_1 > u_2$ (取 $u_2 > u_1$, 也可得到相应的结果), 且当 $u > u_1$ 或 $u < u_2$, 则对于整体的无界运动, (2.18)存在溃变; 而对于 $u_1 > u > u_2$ 的局部有界运动, 则不存在溃变•

证 按所给条件, F 可写为

$$F = (u + u_1)^2(u - u_2) \quad (2.24)$$

由部分分式, 有

$$\frac{1}{(u - u_1)^2(u - u_2)} = \frac{A}{(u - u_1)^2} + \frac{B}{u - u_1} + \frac{C}{u - u_2} \quad (2.25)$$

式中, $A = \frac{1}{u_1 - u_2}$, $B = \frac{-1}{(u_1 - u_2)^2}$, $C = \frac{1}{(u_1 - u_2)^2}$

(2.25)代入(2.18)并积分之, 有

$$-\frac{A}{u - u_1} + C \ln \left| \frac{u - u_2}{u - u_1} \right| = t + A_0 \quad (2.26)$$

$A_0 = \text{const.}$ 若 $u > u_1$ 或 $u < u_2$, 则(2.26)变为

$$-\frac{A}{u - u_1} + C \ln \frac{u - u_2}{u - u_1} = t + A_0 \quad (2.27)$$

(2.27) 表示当 t 为有限值时, 含有溃变·

若 $u_1 > u > u_2$, 即作为局部有限运动, (2.26) 可以写为

$$-\frac{A}{u-u_1} + C \ln \frac{u-u_2}{u_1-u} = t + A_0 \quad (2.28)$$

将 A, C 的表达式代入上式, 则(2.27)可写为

$$u = \frac{u_2 + u_1 e^{(u_2-u_1)/(u_1-u)} e^{(u_1-u_2)^2(t+A_0)}}{1 + e^{(u_2-u_1)/(u_1-u)} e^{(u_1-u_2)^2(t+A_0)}} \quad (2.29)$$

当 $t \in [0, \infty]$ 时, (2.27) 式不含溃变, 即定理 3 成立·

定理 4 若 $F=0$, 有三个不等实根 u_1, u_2, u_3 (不妨设 $u_1 > u_2 > u_3$), 则

- 1) 当 $u > u_1$ 或 $u < u_3$, (2.18) 含有溃变·
- 2) 当 $u_2 > u > u_3$ 或 $u_1 > u > u_2$, 不含溃变·

证 设 $F=0$ 的三个不等实根为 u_1, u_2, u_3 , 则

$$F = (u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) \quad (2.30)$$

即(2.18)可以写为

$$u' = (u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) \quad (2.31)$$

由部分分式, 可求得(2.31)的积分为

$$A \ln |u-u_1| + \ln |u-u_3| - B \ln |u-u_2| = (t+A_0)/C \quad (2.32)$$

式中, $A = \frac{u_2-u_3}{u_1-u_2}$, $B = -\frac{u_1-u_3}{u_1-u_2}C$, A_0 为常数·

- 1) 若 $u > u_1$ 或 $u < u_3$, 则(2.32)可以写为

$$\ln \frac{(u-u_1)^{(u_2-u_3)/(u_1-u_2)}(u-u_3)}{(u-u_2)^{(u_1-u_3)/(u_1-u_2)}} = \frac{1}{C}(t+A_0) \quad (2.33)$$

即若运动为整体无界时, (2.33) 含有溃变和多值性·

- 2) 当 $u_2 > u > u_1$ (或 $u_1 > u > u_2$), 即为局部的有界运动, 则不发生溃变·

由于溃变发生在整体演化中· 这已表明, 不能借助局部存在性定理把初值问题的解延拓到 $t \rightarrow \infty$ 而得到整体存在性定理· 显示了线性和非线性的本质性区别· 这样, 所谓的非线性之谜, 倒不如说是非线性模型蕴含了不连续并导致连续演化的“死亡”· 非常微妙的是某些非线性模型还显示了不连续后的逆转——溃变· 这一特征正好体现了“易穷则变”或“物极必反”· 如果这种特征与物理问题一致, 则作为应用, 可顺其自然并遵循其特征扬其长而巧用其短 (利用不连续后的逆转), 不局限于数学模型的“死亡”而拘泥于模型的理论·

其次, 对三次非线性模型的分析还可以发现一定条件下存在“半破裂”: 例如(2.33)式中, 知 $|u_1-u_3| > |u_2-u_3|$, 因 $t = -A_0$ 时, 由给定条件 $u_1 > u_2 > u_3$, 故当

$$|(u-u_2)^{(u_1-u_3)/(u_1-u_2)}| \geq |(u-u_1)^{(u_2-u_3)/(u_1-u_2)}(u-u_3)|$$

时, 有 $u \rightarrow \infty$ 和

$$(u-u_1)^{(u_2-u_3)/(u_1-u_2)}(u-u_3) = (u-u_2)^{(u_1-u_3)/(u_1-u_2)}$$

两个解· 若 $t \rightarrow \infty$ 可视为离散的脱离部分, 而后者视为未脱离部分, 则有些类似于破损而又未完全断裂的常见自然现象· 显然, 这也是个有趣的问题·

§ 3. 二阶的模型溃变问题

作为一般性, 可以一般常见的一元二阶非线性模型为例, 即取

$$\ddot{u} = d^2u/dt^2 = u^3 + bu^2 + cu + d \quad (3.1)$$

b, c, d 为常数. 将上式改写为

$$u \dot{v} = v^2, \quad v \dot{v} = u^3 + bu^2 + cu + d \quad (3.2)$$

上式积分一次, 有

$$v^2 = \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{3}bu^3 + \frac{1}{2}cu^2 + du + h_0 \quad (3.3)$$

h_0 也为常数, 于是(3.3)可以写为

$$u \dot{v} = \sqrt{E} \quad (3.4)$$

并由(3.3)有,

$$E = \frac{1}{4}(u^2 + b_1u + c_1)(u^2 + b_2u + c_2) \quad (3.5)$$

式中, $b_1, c_1; b_2, c_2$ 亦为常数. 对于(3.4)有如下定理.

定理 5 若方程 $E = 0$ 有四重根, 则(3.4)含有溃变. 其证明类似于定理 1, 略.

定理 6 若 $E = 0$ 有两个不等的重根, (3.5)可以写为

$$E = (u^2 + b_1u + c_1)^2/4 \quad (3.6)$$

且当

1) $b_1^2 - 4c_1 < 0$, 其模型含有溃变;

2) $b_1^2 - 4c_1 > 0$, 作整体无界运动时, 含有溃变; 作局部有界运动时, 则为连续的. 将(3.6)

代入(3.4)即为一阶二次模型, 利用前面的定理即可证明定理 6.

定理 7 若 $E = 0$ 仅有一重根时, 则(3.4)存在溃变.

为简便计, 可令重根为零, 则(3.4)可写为

$$u \dot{v} = u \sqrt{u^2 + b_2u + c_2} \quad (3.7)$$

取 $w = 1/u$, 上式变为

$$- \frac{dw}{\sqrt{c_2(w + b_2/2c_2)^2 + (4c_2^2 - b_2^2)/4c_2}} = dt \quad (3.8)$$

1) 若 $c_2 < 0$ 时, 且 $b_2^2 - 4c_2 > 0$, 积分(3.8), 有

$$- \arcsin \frac{(w + b_2/2c_2)}{\sqrt{(b_2^2 - 4c_2)/4c_2}} = \sqrt{-c_2}(t + A_0) \quad (3.9)$$

A_0 为常数. 由于 $w \rightarrow 0, u \rightarrow \infty$, 故(3.9)含有溃变, 且为周期性的.

2) 若 $c_2 > 0$ 时, 且 $4c_2 - b_2^2 > 0$ (或 $b_2^2 - 4c_2 < 0$), 积分(3.8), 有

$$- \ln \left[\sqrt{c_2} \left(w + \frac{b_2}{2c_2} \right) + \sqrt{c_2 \left(w + \frac{b_2}{2c_2} \right)^2 + \frac{4c_2 - b_2^2}{4c_2}} \right] = \sqrt{c_2}(t + A_0) \quad (3.10)$$

类似上面的讨论, (3.10)含有溃变, 即定理 7 成立.

此外, 利用上述分析, 也可以讨论折迭、尖拐和弹性等非线性模型的不连续或溃变问题, 限于篇幅将另文说明.

从上面的讨论可以看到二阶模型是利用降阶法处理的, 这对于某些非线性模型, 一般是可以办到的, 并在微分方程中已经涉及到, 而只是侧重点的不同, 或往往因函数出现间断而作为特例被忽略掉. 值得强调的是对于非线性模型, 不能沿用线性的连续思维来对待. 这样, 就涉及解法, 尤为数值解法, 应在分析非线性模型的基本特征的前提下给出相应的积分格式(或模拟方案), 而不应继续沿用 Riemann 意义下的积分格式或没有物理依据的平滑等技术手段.

尤其是对于有物理基础的数理模式,设计体现实际物理特征的积分格式是必要的^[1,6],也将更有实际意义。

其次,由于线性与非线性模型有本质上的差别,所以建模也是个慎重的问题,不能随意地将非线性项改写为线性形式,并称之为“简化”。显然,限于人为的“简化”模型的理论研究将导致认识上的误区。如果非线性模型含有的连续和不连续特征与实际符合,则流体比运动的固体更具有较强的非线性。只是由于流体具有易恢复的特征,其不连续性往往被忽略。为此,将流体描述为弱非线性模型是有待商榷的。

§ 4. 高阶复合型模型的“暴力进程”

高阶复合型非线性模型是指高于三阶的微分方程的自身和对参数均含有非线性项的数学模型。此类方程一般不能利用上述或分解方法^[1]讨论。尤其对于人为模型,在不知其不连续后的具体演变形式的条件下,尚不能确定其是否是溃变问题,但就其非线性形式,据上面的定理一般是可以判断其是否含有“暴力进程”的。

作为针对性,这里引用 Lorenz 提出的含有“chaos”的数学模型^[7]。此模型是基于 Saltzman 引入 Boussinesq 近似的二维弱非线性方程组^[8],

$$\left. \begin{aligned} u + uu_x + wu_z &= -\rho_0^{-1} p_x + \nu \Delta u \\ w_t + uw_x + ww_z &= -\rho_0^{-1} p_z - g\pi + \nu \Delta w \\ b \quad \pi_t + u\pi_x + w\pi_z &= \frac{N^2}{g} w + \kappa \Delta \pi \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

式中, u, w 为 x, z 方向上的速度分量; $\pi = \rho/\rho_0$, $\rho_0 = \text{const.}$;

$$N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

θ 为 y 方向的平均位温; ν, κ 分别是粘性系数和热传导系数; Δ 为拉普拉斯算符; 下标“ t, x, z ”为相应变量的偏导数。

(4.1) 原则上已不能认为是 Navier-Stokes 方程组的近似或简化。其中气压梯度和耗散项等的线性化,已是连续思维的人为性,并构成了弱非线性模型。Lorenz 又引入了流函数将 (4.1) 简化为

$$\left. \begin{aligned} \Delta \phi_t + J(\phi, \Delta \phi) &= -g\pi_x + \nu \Delta \phi \\ \pi_t + J(\phi, \pi) &= \frac{N^2}{g} \phi_x + \kappa \Delta \pi \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

式中, $J(\)$ 为 Jacobi。显然, (4.2) 的可积性、谱展开是有条件的。Lorenz 的谱展开无疑是出于连续的可积性,但 Lorenz 的谱展开却引入了

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sqrt{2} \frac{\kappa(n^2 + k^2)}{kn} X \sin kx \sin nz \\ \pi &= \sqrt{2} \left(\frac{n^2 + k^2}{gk^2 n} Y \cos kx \sin nz - Z \frac{(n^2 + k^2)}{gk^2 n} \sin 2nz \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

k, n 是 x, z 方向的波数。 X, Y, Z 为谱展开系数。 X 表示运动强度; Y, Z 表示层结强度和非线性层结强度。显然,这里有个商榷的问题,即 Lorenz 将一个物理量(层结强度)表示为两个变量(Y, Z)。正由于这种作法,本拟谱展开是为了连续可积,又人为地变为不可积的 Lorenz

方程^[7]

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y, \quad \dot{Y} = rX - Y - XZ, \quad \dot{Z} = XY - bZ \quad (4.4)$$

(4.4)的“暴力进程”似乎不直观,但经过消元处理,即有

$$X\ddot{X} + (AX - X)\dot{X} + (X^3 + BX - CX)X = -\sigma X^4 + \sigma b(r-1)X^2 \quad (4.5)$$

由前面的讨论不难看出(4.5)(或(4.4))是存在不连续的。现在的问题是,即使就(4.4)的模型而言,若取(4.5)的左端为零,立即可得平衡态的分叉解,

$$X_0 = \pm \sqrt{b(r-1)} \quad (4.6)$$

且可利用群变换找到分叉解的联系^[9];其数值解也不是Lorenz等的结果(图2)(详见另文)。

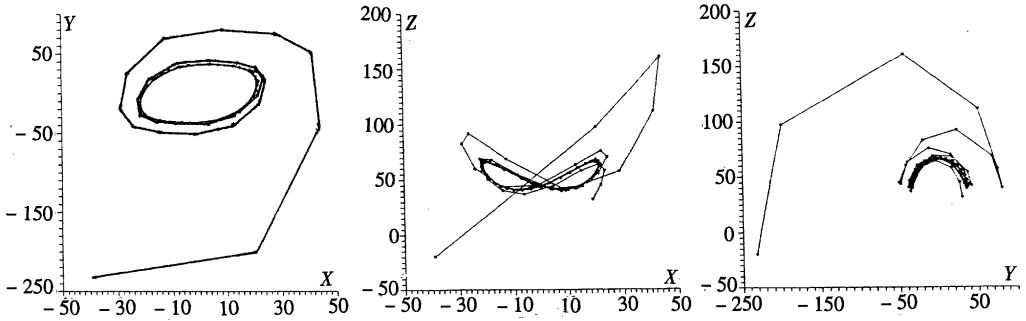


图2 Lorenz模型的“死亡”

§ 5. 讨 论

由文献[1, 2]及本文的讨论可以概括为如下几点结论:

1. 非线性模型(含 Euler 或 Lagrange 语制)与线性模型有本质性差别。非线性模型在演化中会因其自身的“暴力进程”而导致连续性破坏,并且某些方程还存在不连续(或奇异)后的逆转——溃变。其中 Euler 语制的不连续可体现在导数上,而 Lagrange 语制(或外迫项)可体现在函数自身上。

2. 就流体的性质而言,其自身或外迫下的运动相对于固体而更易表现为不连续。为此, KdV 方程或 Burgers 等的弱非线性模型,不能视为 N-S 方程的“简化”,其中有个连续思维指导下的人为性。对于实际运动流体的本质性特征而言,弱非线性模型的“近似”有待商榷。

3. 源于弱非线性近似而又经人为处理的 Lorenz 模型的“chaos”是否符合实际,有待再认识。

4. 某些非线性模型体现了不连续(或奇异)后的逆转——溃变,并与客观事物的“物极必反”或“易穷则变,…”相吻合,而且利用不连续信息预测天气系统的转折性突然变化与实际较趋近。为此,作为数理模型的应用,可扬数学模型之长且也可用其短,改造现有的连续性积分格式而解决实际问题,则是有意义的。

总之,本文是对一般性的非线性模型所隐含的不连续问题与实际物理特征的针对性作了相应的讨论,并结合实践提出了某些概念或说明,也对某些模型提出了不同的看法,当否有待读者批评、指正。

参 考 文 献

- 1 欧阳首承等,《运动流体的“断裂”与天气预测的若干问题》,成都科技大学出版社(1994),9—29.
- 2 欧阳首承,泛系预测观与流体暴转,应用数学和力学,16(3)(1995),255—262.
- 3 R. Thom, *Stabilité Structurale et Morphogenèse*, Reading, Mass: Benjamin (1972) (*Structural Stability and Morphogenesis*, W. A. Benjamin, Reading, Mass (1975)), 55—108.
- 4 A. Dauglas, Some existence theorems for hyperbolic systems of partial differential equation in two independent variables, *Comm. Pure Appl. Math.*, 2 (1952), 119—154.
- 5 吴学谋,《从泛系观看世界》,中国人民大学出版社(1990),21—28.
- 6 牟宗泽,解奇异微分方程的一个新方法,计算机应用,(4)(1992),20—27.
- 7 E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, 20 (1963), 130—141.
- 8 B. Saltzman, Finite amplitude free convection as initial value problem 1, *J. Atmos. Sci.*, 19 (1962), 329—341.
- 9 欧阳首承等,关于 Lorenz 方程定常分叉解的联系问题,成都气象学院学报,(2_3)(1990),112—114.

The “Rebel Travelling” of General Nonlinear Evolutional Equation and Discussion on Related Problems

Ouyang Shoucheng

(Chengdu Institute of Meteorology, Chengdu 610041, P. R. China)

Wang Yongzong

(Beijing Institute of Meteorology, Beijing 100081, P. R. China)

Wu Yong

(Fuling Soil Bureau, Fuling, Chongqing 408000, P. R. China)

Li Chao

(Chengdu Institute of Meteorology, Chengdu 610041, P. R. China)

Abstract

This paper is a part of series works for discussing the “auto_destruction effects” of general nonlinear evolutional equations. The blown_up of Navier-Stokes equation is discussed in references [1, 2]. Some expansion is made in this paper, and the blown_up of order 1 or 2 models and the “rebel travelling” of complex model of poly_order are discussed. The results indicate that “semi-rupture” appears for some models on specific condition; the blown_up appears during the whole evolution. For fluid, however, the weakly nonlinear model is of more artificiality and there is much room for arguing about the smoothing scheme of the numerical integral on the basis of continuous thinking and so on.

Key words “rebel travelling”, blown_up, “semi-rupture”, whole evolution