应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

混合边条件约束下的有限变形弹性动力学解的存在性*

郭兴明①

(郑泉水推荐, 1996 年 7 月 5 日收到)

摘　　要

本文证明了在系统超势及其梯度(对 Green 应变) 满足适当条件的混合边值约束下的有限弹性动力学系统的解是存在的•

关键词　有限变形　非线性本构　弹性动力学　解的存在性

§1. 引　　言

在文[5, 6] 中 Ebin 等详细讨论了不可压缩弹性体在部分自由边界、部分纯位移边值约束下的动力学系统的初值问题. 与之相关联的有关有限弹性动力学的准线性双曲型偏微分方程的初值问题也被许多作者研究过[3, 4, 8, 10]• 在弹性张量满足某些条件下得到了许多有关系统(方程) 解存在的重要结论. 本文讨论了在混合边条件约束下(包括纯力、纯位移边界) 的有限变形弹性动力学系统, 在超势及其梯度(对 Green 应变) 满足适当条件下我们证明了某种弱意义下解的存在性• 作为上述结果的一个应用, 我们得到了大变形线性本构条件下的弹性动力学系统解的存在性• 有关连续统力学的详细内容参见[7, 9]•

§2. 基本方程

设 $\Omega\subseteq \mathbb{R}^3$ 是物体的参考构形($t=0$), 它是有界的开区域, $\partial\Omega\in C^1$, 我们用 x 表示物质的物质点和 Ω 的典型点, 对有限变形过程, 当前构形与应变, 应力及位移等事先一般都是未知的• 为使边值问题有意义• 我们只讨论如下情形(如果出现的话):

i) 位移边约束满足 $u|_{\partial\Omega}=0$ 或 $u|_{\Gamma_u}=0$ (Γ_u 是位移边界)

ii) 体力 f 及边力 f_0(作用在 Γ_t 上) 只依赖于物质点 $x\in\Omega$ 与变形无关• 这里 $\Gamma_t\cup\Gamma_u=\partial\Omega=\Gamma$, $\Gamma_u\cap\Gamma_t=\varnothing$•

首先我们假设 $\mathrm{mes}\,\Gamma_t>0$(包括 $\Gamma_u=\varnothing$ 情形), m 是任一正整数, $p>1$, 位移空间 $V=\{u$

* 上海市高校青年科技基金资助

① 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072。

$\in \Pi_{i=1}^{3} W^{m,2p}, u = 0$ 在 $\Gamma_u\}$(若 $\Gamma_u = \emptyset, V = \Pi_{i=1}^{3} W^{m,2p}$), 其范数 $|u|_V = \left(\sum_{i,j=1}^{3} |u_i|_{W^{m,2p}}^{2p}\right)^{1/2p}$; 应变空间 $E = \{(\varepsilon_{ij}) \mid \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ij} \in L^p(\Omega), i,j = 1,2,3\}, |\varepsilon|_E = \left(\sum_{i,j=1}^{3} |\varepsilon_{ij}|_{L^p}^p\right)^{1/p}$; 应力空间 $S = \{(\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \sigma_{ij} \in L^{p'}(\Omega)\ i,j = 1,2,3\}, |\sigma|_S = \left\{\sum_{i,j=1}^{3} |\sigma_{ij}|_{L^{p'}}^{p'}\right\}^{1/p'}$ $(1/p + 1/p' = 1)$; S 和 E 是功共轭的, 它的共轭积为 $\langle\sigma, \varepsilon\rangle_{SE} \triangleq \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} d\Omega$, 记 $F_1 = V' \subseteq \Pi_{i=1}^{3}(W^{m,2p})', F_2 = \Pi_{i+1}^{3}(H^{m-1/2}(\Gamma_t))', (w^{m-1/2})'$ 和 $(H^{m-1/2}(\Gamma_t))'$ 分别表示 $w^{m,2p}$ 和 $H^{m-1/2}(\Gamma_t)$ 的对偶, 其对偶对分别与 $L^2(\Omega), L^2(\Gamma_t)$ 的内积一致. $A: V \to E$ 是有限变形算子, $\varepsilon = Au = 2^{-1}\{\nabla u + u\nabla + (\nabla u)(u\nabla)\}$, 它是非线性的, 连续且有界(在 V, E 的范数拓扑下), 这里 $(\nabla u)^T = u\nabla$. 它在 u 点的切算子 $T_u: V \to E, T_u v = 2^{-1}\{(\nabla u)(v\nabla) + (\nabla v)(u\nabla) + (\nabla v) + (v\nabla)\}$ 对变量 u, v 都是线性的.

设 $W: E \to \mathbf{R}$ 是弹性体的超势, $W \in C^1(E)$, 本构方程为

$\sigma = \partial W/\partial E$

这里, σ 是第二 Piola_Kirchhoff 应力张量, $\varepsilon = Au$ 是由位移表示的 Cauch_Green 应变. 在惯性标架下, 有限弹性动力学的控制方程可表示如下:

线性动量平衡	$\operatorname{div}\{(\mathrm{II} + \nabla u)\cdot\sigma\} + f = \rho_0 \ddot{u}$	(在 $I\times\Omega$)	(2.1)
本构方程	$\sigma = W'(\varepsilon), \varepsilon = Au$	(在 $I\times\Omega$)	(2.2)
变形要求	$\det\{\mathrm{II} + \nabla u(t,x)\} > 0$	($I\times\Omega$)	(2.3)
边条件	$(\mathrm{II} + \nabla u)\sigma n = f_0$ (在 $I\times\Gamma_t$); $u = 0$	(在 $I\times\Gamma_u$〈如果出现的话〉)	(2.4)
初条件	$u(0) = u_0$ (在 Ω); $\dot{u}(0) = u_1$	(在 Ω)	(2.5)

这里"$\cdot$"表示对 t 的物质导数, $\nabla u = \nabla_x u(t,x)$是梯度, ρ_0 是参考构形上的质量密度, 为简单计, 取 $\rho_0 \equiv 1, I = [0, T]\ (T > 0)$; II 是 3×3 单位张量.

注解 1 空间的选择依赖于边值问题的类型和超势的性质. 当 $\Gamma_t = \phi$, 空间的选择和相关的评述见注解3.

设 X 是 Banach 空间, 记 $L^q(I, X)$是从 I 到X 的满足如下性质的可测函数的集合

$$\left(\int_I |g|_X^q dt\right)^{1/q} = |g|_{L^q(I,X)} < +\infty \qquad (q \geq 1)$$

$$|g|_{L^\infty(I,X)} = \operatorname*{supess}_I |g|_X < +\infty \qquad (q = \infty)$$

这里$|g|_X$ 是g 作为空间X 元的范数.

§3. 解的存在性定理

我们首先讨论方程(2.1)、(2.2)、(2.4)、(2.5)的解的存在性问题.

定理 1 假设

1) $W(Au) + \alpha_1 |u|_H^r \geq c|u|_V^p + \alpha_2 \qquad (\alpha_1, c > 0, \alpha_2 \in \mathbf{R}, 2 \geq r \geq 1)$

2) 当 $\varepsilon_n \rightharpoonup \varepsilon$(弱) 在 $L^p(I, E)$ 导致 $W'(\varepsilon_n) \rightharpoonup W'(\varepsilon)$(弱) 在 $L^{p'}(I, S)$

3) $f, f' \in L^{p'}(I, F_1), f_0, f_0' \in L^{p'}(I, F_2)$

这里, $H=(L^2(\Omega))^3$, $|u|_H=\left(\sum_{i=1}^{3}|u_i|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$, $1/p+1/p'=1$

那么 $\forall u_0\in V$, $u_1\in H$, (2.1)、(2.2)、(2.4)、(2.5)有满足如下性质的解

$$u\in L^\infty(I,V)\cap C(I,H),\ \dot{u}\in L^\infty(I,H),\ \ddot{u}\in L^{p'}(I,V')$$

证明 取$\{e_i\}_{i\in N}\subset V$, $\overline{\mathrm{span}\{e_i\}}=V$, $(e_i,e_j)_H=\delta_{ij}$(因为 $V\subset H$, 且 V 是可分的, 在 H 中稠, 集合$\{e_i\}$能取到)· 设 $r_0: H^m(\Omega)\to H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ 是迹算子(有关 Sobolev 空间内容见[1]), 它是线性有界满射· 令 $R\triangleq(r_0,r_0,r_0):(H^m(\Omega))^3\to(H^{m-1/2}(\partial\Omega))^3$, $Ru=(r_0u_1,r_0u_2,r_0u_3)$, $u=(u_1,u_2,u_3)\in V$· 因为 $W^{m,2p}\subset W^{m,2}=H^m$, 且$|Z|_{H^m}\leqslant C_0|Z|_{W^{m,2p}}$, $\forall Z\in W^{m,2p}$ (C_0 为嵌入常数), 因此 Ru 有意义, 它也是线性有界的· 让$|R|$表示算子 R 的范数·

$$|Ru|_{(H^{m-1/2}(\partial\Omega))^3}\leqslant|R||u|_{(H^m)^3}\leqslant C_0|R|\cdot|u|_v\cdot$$

取 $x_n=\sum_1^n\eta_i^1e_i\to u_0$(按 V 范数), $y_n=\sum_2^n\eta_i^2e_i\to u_1$(按 H 范数). 对每个给定的正整数 n, 考察如下的常微分方程

$$\ddot{\xi}^n=F^n(\xi^n)+g^n \tag{3.1}$$

$$\xi^n|_{t=0}=\eta^{1n} \tag{3.2}$$

$$\dot{\xi}^n|_{t=0}=\eta^{2n} \tag{3.3}$$

这里, $F^n=(F_i^n)_{1\times n}$, $F_i^n=-\langle W'(Au_m),T_{u_n}e_i\rangle_{SE}$, $u_n=\sum_1^n\xi_j^ne_j$; $\xi^n=\{\xi_i^n\}_{1\times n}$; $\eta^{1n}=\{\eta_i^1\}_{1\times n}$; $\eta^{2n}=\{\eta_i^2\}_{1\times n}$; $g^n=\{\langle f,e_i\rangle_{v'v}+\langle f_0,Re_i\rangle_{\Gamma_t}\}_{1\times n}$, $\langle f_0,Re_i\rangle_{\Gamma_t}=\langle f_0,Re_i\rangle_{F_2\times F_2'}$·

因为 $W'(\cdot)$是连续的且 T_v 对变量v 是线性有界的, 因此 F^n 是连续的· 于是存在 $0<T_n\leqslant T$, 方程(3.1)~(3.3)在$[0,T_n]=I_n$ 有解ξ^n· 我们将证明

$$I_n=I\quad(\forall n\in\mathbf{N})$$

实际上 u_n 满足

$$\langle\ddot{u},e_i\rangle=-\langle W'(Au_n),T_{u_n,e_i}\rangle+\langle f,e_i\rangle+\langle f_0,Re_i\rangle\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{3.4$_i$}$$

在方程(3.4)$_i$ 两边同乘$\dot{\xi}_i^n$ 并将这n 个方程相加可得到

$$\langle\ddot{u}_n,\dot{u}_n\rangle=-\langle W'(Au_n),T_{u_n}\dot{u}_n\rangle+\langle f,\dot{u}_n\rangle+\langle f_0,Ru_n\rangle_{\Gamma_t}$$

注意到若 ϕ, $\dot{\phi}\in(W^{1,2})^3$, $\dot{\overline{A\phi}}=T_\phi\dot{\phi}$, 积分上式得到

$$\frac{1}{2}|\dot{u}_n|_H^2+W(Au_n)=W(Ax_n)+\frac{1}{2}|y_n|_H^2+\int_0^t\langle f,\dot{u}_n\rangle d\tau+\int_0^t\langle f_0,Ru_n\rangle_{\Gamma_t}d\tau \tag{3.5}$$

W 在Au_0是连续的因而在 Au_0点局部有界· 而 A 的连续性导致$Ax_n\to Au_0$(在 E 中)· 所以存在常数 $C_1>0$, $W(Ax_n)+2^{-1}|y_n|_H^2\leqslant C_1$,

取 $C_2>0$, 使$|f(t)|_{V'}\leqslant C_2$, $|f_0(t)|_{F_2}\leqslant C_2\qquad(\forall t\in I)$·

$$|Ru_n(0)|_{F_2'}=|Rx_n|_{F_2'}\leqslant|R||x_n|_{(H^m)^2}\leqslant C_0|R||x_n|_V,$$

$$|Ru_n(t)|_{F_2'}\leqslant C_0|R||u(t)|_V$$

$u_n(t)=u_n(0)+\int_0^t\dot{u}_n(\tau)d\tau$, $|u_n(t)|_H\leqslant|u_n(0)|_H+\int_0^t|\dot{u}_n(\tau)|_Hd\tau$, 利用不等式

$(a+b)^g\leqslant2^g(a^g+b^g)\qquad(2\geqslant g\geqslant0;\ a,b\geqslant0)$

和 Holder 不等式可进一步得到

$$|u_n(t)|_H^r \leqslant C_3 + C_4\int_0^t |u_n'|_H^r d\tau \qquad (C_3, C_4 > 0)$$

从(3.5)可进一步得到

$$C|u_n|_V^p + \frac{1}{2}|u_n'|_H^2 \leqslant C_1 + \alpha_1 |u_n|_H^r + \int_0^t \langle f, u_n'\rangle d\tau + \int_0^t \langle f_0, Ru_n'\rangle_{\Gamma_t} d\tau - \alpha_2$$

$$\leqslant C_1 - \alpha_2 + \alpha_1 |u_n|_H^r + \langle f(t), u_n(t)\rangle - \langle f(0), u_n(0)\rangle - \int_0^t \langle f', u_n\rangle$$

$$+ \langle f_0(t), Ru_n(t)\rangle_{\Gamma_t} - \langle f_0(0), Ru_n(0)\rangle - \int_0^t \langle f_0', Ru_n\rangle_{\Gamma_t}$$

$$\leq C_5 + \alpha_1 C_4 \int_0^t |u_n'|_H^r d\tau + |f(t)|_{V'} |u_n(t)|_V + |f_0(t)|_{F_2} |Ru_n|_{F_2'}$$

$$+ \int_0^t \langle -f', u_n\rangle d\tau + \int_0^t \langle -f_2', Ru_n\rangle_{\Gamma_t} \qquad (C_5 > 0) \tag{3.6}$$

利用 Canchy 不等式

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon^q}{q}|a|^q + \frac{\varepsilon^{-q'}}{q'}|b|^{q'}, a, b \in \mathbf{R}; \varepsilon > 0; 1/q + 1/q' = 1 \qquad (q > 1)$$

$$|f(t)|_{V'} |u_n(t)|_V \leqslant \frac{\varepsilon^p}{p}|u_n(t)|_V^p + \frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}|f(t)|_{V'}^{p'} \leqslant \frac{\varepsilon^p}{p}|u_n(t)|_V^p + \frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}C_2^{p'}$$

$$|f_0(t)|_{F_2} |Ru_n|_{F_2'} \leqslant \frac{\varepsilon^p}{p}|Ru_n(t)|_{F_2'}^p + \frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}|f_0(t)|_{F_2}^{p} \leqslant \frac{\varepsilon^p}{p}C_0^p |R|^p |u_n|_V^p + \frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}C_2^{p'}$$

取 ε 足够小, 使得 $\varepsilon^p/p + \varepsilon^p C_0^p |R|^p/p \leqslant C/2$ (

$$\left|\int_0^t \langle f', u_n\rangle d\tau\right| \leqslant \left(\int_0^t |u_n|_V^p d\tau\right)^{1/p}\left(\int_0^t |f'|_{F_2}^{p'} d\tau\right)^{1/p'}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_1^{p'}}{p}\int_0^t |u_n|_V^p d\tau + \frac{\varepsilon^{-p'}}{p'}\int_0^t |f'|_{V'}^{p'} d\tau$$

$$\left|\int_0^t \langle f_0', Ru_n\rangle_{\Gamma_t} d\tau\right| \leqslant \left(\int_0^t |Ru_n|_{F_2'}^p d\tau\right)^{1/p}\left(\int_0^t |f_0'|_{F_2}^{p'} d\tau\right)^{1/p'}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_1^p}{p}C_0^p |R|^p \int_0^t |u_n|_V^p d\tau + \frac{\varepsilon_1^{-p'}}{p'}\int_0^T |f_0'|_{F_2}^{p'} d\tau$$

取 ε_1 足够小满足 $\varepsilon_1^p/p + C_0^p \varepsilon_1^p |R|^p/p \leqslant 2C\alpha_1 C_4$

再次从(3.6)式, 我们得到

$$c|u_n|_V^p + |u_n'|_H^2 \leqslant C_6 + 2\alpha_1 C_4 \int_0^t |u_n'|_H^r d\tau + 2\alpha_1 C_4 c\int_0^t |u_n|_V^p d\tau \qquad (C_6 > 0) \tag{3.7}$$

令 $K_n(t) = c|u_n|_V^p + |u_n'|_H^2$, 若 $r = 2$, 则(3.7) 变成

$$K_n(t) \leqslant C_6 + 2\alpha_1 C_4 \int_0^t K_n(\tau) d\tau$$

由 Gronwall 不等式, 我们得到

$$K_n(t) \leqslant C_6 \exp[2\alpha_1 C_4 t] \tag{3.8}$$

若 $1 \leqslant r \leqslant 2$, $\int_0^t |u_n'|_H^r d\tau \leqslant \left(\int_0^t |u_n'|_H^2 d\tau\right)^{r/2}\left(\int_0^t 1 d\tau\right)^{1/q'}$, 利

$$\leqslant \frac{\varepsilon_2^q}{q}\int_0^t |u_n'|_H^2 d\tau + \frac{\varepsilon_2^{-q'}}{q'}T$$

这里 $q=\dfrac{2}{r}>1,\ \dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'}=1$

取 ε_2 足够小使得 $\varepsilon_2/q\leqslant 1$, 由(3.7)我们有

$$K_n(t)\leqslant C_7+2\alpha_1 C_4\int_0^t K_n(\tau)d\tau\qquad(C_7>0)$$

$$K_n(t)\leqslant C_7\exp[2\alpha_1 C_4 t]\tag{3.9}$$

这里, $C_i(i=1,2,\cdots,7)$ 都是不依赖 n 和 T_n 的正常数• 根据常微分方程理论知道, 方程(3.1)~(3.3)($\forall n$)的解可延拓至$[0,T]$, 也就是 $I_n=I(\forall n)$• 此外易知$\{u_n\}$, $\{\dot{u}_n\}$ 分别是 $L^\infty(I,V)$ 和 $L^\infty(I,H)$ 中的有界集•

从$(3.4)_i(i=1,2,\cdots n)$可得出: $\forall\eta\in\mathrm{span}\{e_i,\cdots,e_n\}$

$$\begin{aligned}|\langle\ddot{u}_n,\eta\rangle_{V'V}|&\leqslant|\langle W'(Au_n),T_{u_n}\eta\rangle_{SE}|+|\langle f,\eta\rangle_{VV}+\langle f_0,R\eta\rangle_{\Gamma_t}|\\&\leqslant|W'(Au_n)|_S\cdot|T_{u_n}\eta|_E+|f|_{V'}\cdot|\eta|_V+|f_0|_{F_2}\cdot C_0|R|\cdot|\eta|_V\\&\leqslant|W'(Au_n)|_S(1+|u_n|_V)\cdot|\eta|_V\\&\quad+|f|_V\cdot|\eta|_V+|f_0|_{F_2}\cdot C_0|R|\cdot|\eta|_V\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}|\ddot{u}_n|_{V'}&=\sup_{|\eta|_V=1}|\langle\ddot{u}_n,\eta\rangle_{V'V}|=\sup_{\substack{\eta\in\mathrm{span}(e_1,\cdots,e_n)\\|\eta|_V=1}}|\langle\ddot{u}_n,\eta\rangle|\\&\leqslant|f|_{V'}+|f_0|_{F_2}C_0|R|+|W'(Au_n)|_s\cdot(1+|u_n|_V)\end{aligned}$$

因为 W' 是从$L^p(I,E)$到 $L^{p'}(I,S)$的弱连续算子, 所以 W' 必是有界的(详细内容参见[2])• 但$\{Au_n\}$是 $L^p(I,E)$中的有界集, 所以$\{W'(Au_n)\}$是 $L^{p'}(I,V')$中的有界集• 进一步$\{\ddot{u}_n\}$是 $L^{p'}(I,V')$中的有界子集, 因此存在$\{u_n\}$的子列(仍记为本身)及 $u\in L^\infty(I,V)$, $\dot{u}\in L^\infty(I,H)$, $\ddot{u}\in L^{p'}(I,V')$满足

$$u_u\to u(\text{弱})\text{ 在 }L^\infty(I,V);\ \dot{u}_n\to\dot{u}(\text{弱})\text{ 在 }L^\infty(I,H);\ \ddot{u}_n\to\ddot{u}(\text{弱})\text{ 在 }L^{p'}(I,V')$$

以及 $\nabla u_n\to\nabla u(\text{弱})$ 在 $L^\infty(I,E)$, 这里 $E_1=\{v_{ij}\mid v_{ij}\in L^p(\Omega)\quad i,j=1,2,3\}$

$$\left(|m|_{E_1}=\left(\sum_{ij=1}^3|m_{ij}|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}\quad m\in E_1\right)$$

$$u_n(t,x)\to u(t,x)\qquad(\text{a.e. 在 }I\times\Omega)$$

$$\nabla_x u_n(t,x)\to\nabla_x u(t,x)\qquad(\text{a.e. 在 }I\times\Omega)$$

$$Au_n\to Au(\text{弱})\text{ 在 }L^\infty(I,E)$$

很明显, $u\in C(I,H)$, $\dot{u}\in C(I,V')$•

再次从$(3.4)_i(i=1,2,\cdots n)$, 我们有

$$\int_I\langle\ddot{u}_n,\psi e_i\rangle dt=-\int_I\langle W'(Au_n),T_{u_n}\psi e_i\rangle dt+\int_I\langle f,\psi e_i\rangle dt+\int_I\langle f_0,R\psi e_i\rangle_{\Gamma_t}dt$$

$$(i=1,2,\cdots n)\tag{3.11$_i$}$$

我们将证明

$$\int_I\langle W'(Au_n),T_{u_n}\psi e_i\rangle dt\to\int_I\langle W'(Au),T_u\psi e_i\rangle dt,\ (n\to\infty)\quad(i=1,2,\cdots;\ \psi\in L^{2p}(I))\tag{3.12$_i$}$$

我们将用到如下的引理

引理 [11, 引理 1.1.3]

设 $D\subset R_x^n\times R_t$ 是有界域• $g_\mu, g\in L^q(D)(1<q<\infty), \|g_\mu\|_{L^q(D)}\leqslant C, g_\mu\to g$ (a. e. 在 D, 那么 $g_\mu\to g$ 弱在 $L^q(D)$•

对每个给定的正整数 i•

$$\int_I\langle W'(Au_n), T_{u_n}\phi e_i\rangle dt = \int_I\langle W'(Au_n), \frac{1}{2}\{\nabla(\phi e_i)+(\phi e_i)\nabla\}\rangle dt$$

$$+\int_I\langle W'(Au_n), \frac{1}{2}\{(\nabla u_n)((\phi e_i)\nabla)+(\nabla(\phi e_i))(u_n\nabla)\}\rangle dt \triangleq J_1+J_2$$

因为 $Au_n\to Au$ 弱在 $L^\infty(I, E)$, 也弱在 $L^p(I, E)$, 因此

$$W'(Au_n)\to W'(Au) \quad 弱在 L^{p'}(I, S)$$

进一步 $W'(Au_n)(t, x)\to W'(Au)(t. x)$ a, e, 在 $I\times\Omega$

$$J_1=\int_I\langle W'(Au_n), \frac{1}{2}\{\nabla(\phi e_i)+(\phi e_i)\nabla\}\rangle dt\to\int_I\langle W'(Au),$$
$$\frac{1}{2}\{\nabla(\phi e_i)+(\phi e_i)\nabla\}\rangle dt \qquad (n\to\infty)$$

$$J_2=\int_I\langle W'(Au_n), \frac{1}{2}\{(\nabla u_n)((\phi e_i)\nabla)+(\nabla(\phi e_i))(u_n\nabla)\}\rangle dt$$
$$=\int_I\int_\Omega\phi W'(Au_n):[(\nabla u_n)(e_i\nabla)]dtd\Omega$$

为方便计, 记 $S^n=W'(Au_n), e^n=\nabla u_n, e_i\nabla=Z^1, W'(Au)=Z^2, \nabla u=Z^3$, 则

$$J_2=\sum_{a, b, c=1}^3\int_I\int_\Omega\phi S_{ab}^n e_{ac}^n Z_{cb}^1 dtd\Omega$$

设 $D=I\times\Omega$• 对每个给定的 $a, b, c\in\{1, 2, 3\}$, 记 $g_n(t, x)\triangleq S_{ab}^n(t, x)e_{ac}^n(t, x)$, 很明显:

$$g_n(t, x)\to Z_{ab}^2(t, x)Z_{ac}^3(t, x) \qquad (\text{a. e. 在 } D)$$

记 $d=2p/2p-1, 1/d+1/2p=1, 2p/d=2p-1>1$, p' 是 p 的共轭数(即 $1/p+1/p'=1$), $p'/d=1+\dfrac{1}{2(p-1)}>1, \dfrac{1}{p'/d}+\dfrac{1}{2p/d}=1$

$$\int_D|g_n(t, x)|^d dtd\Omega=\int_D|S_{ab}^n|^d|e_{ac}^n|^d dtd\Omega\leqslant\left(\int_D|S_{ab}^n|^{p'}dtd\Omega\right)^{d/p'}$$
$$\cdot\left(\int_D|e_{ac}^n|^{2p}dtd\Omega\right)^{d/2p}=\|S_{ab}^n\|_{L^{p'}(I, L^{p'}(\Omega))}^d$$
$$\in\cdot\left(\int_I\int_\Omega|e_{ac}^n|^{2p}dtd\Omega\right)^{d/2p}\leqslant\|S^n\|_{L^{p'}(I, S)}^d\cdot\left(\int_I\|u_n\|_V^{2p}dt\right)^{d/2p}$$

因为 $\{W'(Au_n)\}, \{u_n\}$ 分别是 $L^{p'}(I, S)$ 及 $L^\infty(I, V)$ 中的有界集• 因此存在正常数 $C_8>0$, $\|g_n\|_{L^d(D)}\leqslant C_8$• 于是由上面引理我们有

$$g_n\to g=Z_{ab}^2Z_{ac}^3 弱在 L^d(D)=L^d(I, L^d(\Omega))$$

因此有

$$\int_I\int_\Omega S_{ab}^n e_{ac}^n Z_{ab}^1\phi dtd\Omega\to\int_I\int_\Omega Z_{ab}^2 Z_{ac}^3 Z_{cb}^1\phi dtd\Omega \quad (n\to\infty)$$

(因为 $Z_{ab}^1\phi\in L^{2p}(D)$)

进一步

$$J_2=\sum_{a, b, c=1}^3\int_I\int_\Omega S_{ab}^n e_{ac}^n Z_{cb}^1\phi dtd\Omega\to\sum_{a, b, c=1}^3\int_I\int_\Omega Z_{ab}^2 Z_{ac}^3 Z_{cb}^1\phi dtd\Omega \quad (n\to\infty)$$

而 $\sum_{a,b,c=1}^{3}\int_I\int_\Omega Z^2_{ab}Z^3_{ac}Z^1_{cb}\psi dt d\Omega = \int_I\int_\Omega W'(Au):\{\nabla u((\psi e_i)\nabla)\}dt d\Omega$

$$= \int_I\langle W'(Au), \frac{1}{2}\{(\nabla u)((\psi e_i)\nabla) + (\nabla(\psi e_i))(u\nabla)\}\rangle dt$$

所以 $J_1 + J_2 \to \int_I\langle W'(Au), T_u(\psi e_i)\rangle dt$

因此$(3.12)_i$ 是真的•

对每个正整数 i, 在$(3.11)_i$ 中令 $n\to\infty$, 我们得到

$$\int_I\langle\ddot{u}, \psi e_i\rangle dt = -\int_I\langle W'(Au), T_u(\psi e_i)\rangle dt + \int_I\langle f, \psi e_i\rangle dt + \int_I\langle f_0, R\psi e_i\rangle_{\Gamma_t}dt$$

$$(\forall i = 1, 2, \cdots, \psi\in L^{2p}(I)) \qquad (3.13)_i$$

而 $\int_I\langle W(Au), T_u(\psi e_i)\rangle dt \triangleq -\int_I\langle \mathrm{div}\, W'(Au), \psi e_i\rangle dt + \int_I\langle W'(Au)\cdot n, R(\psi e_i)\rangle_{\partial\Omega}dt$

$$= -\int_I\{\langle\mathrm{div}\, W'(Au), \psi e_i\rangle + \langle W'(Au)\cdot n, R(\psi e_i)\rangle_{\Gamma_t}\}dt$$

因此从$(3.13)_i(\forall i)$得到

$$\int_I\langle\ddot{u} - \mathrm{div}\, W'(Au) - f, \psi e_i\rangle_{V'V}dt + \int_I\langle W'(Au)\cdot n - f_0, \psi Re_i\rangle_{\Gamma_t}dt = 0$$

于是有

$\ddot{u} - \mathrm{div}\, W'(Au) - f = 0$ (在 $L^d(I, V')$)

$W'(Au)\cdot n - f_0 = 0$ (在 $L^d(I, F_2)$)

进一步 $\ddot{u} - \mathrm{div}\, W'(Au) - f = 0$ (a.e. 在 $I\times\Omega$)

$W'(Au)\cdot n - f_0 = 0$ (a.e. 在 $I\times\Gamma_t$)

取 $\psi\in C^1(I)$, $\psi(T) = 0$, $(\forall i\in N)$, 分步积分$(3.11)_i$, $(3.13)_i$ 的左边得到

$$-\langle\dot{u}_n(0), \psi(0)e_i\rangle_{V'V} - \int_I\langle\dot{u}_n, \dot{\psi}e_i\rangle dt = (3.11)_i \text{ 式右边} \qquad (3.14)_i$$

$$-\langle\dot{u}(0), \psi(0)e_i\rangle_{V'V} - \int_I\langle\dot{u}, \dot{\psi}e_i\rangle_{V'V}dt = (3.13)_i \text{ 式右边} \qquad (3.15)_i$$

比较上述两式得到

$\lim_{n\to\infty}\langle\dot{u}_n(0) - \dot{u}(0), e_i\rangle_{V'V} = 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$

这说明 $\dot{u}_n(0)\to\dot{u}(0)$ 弱在 V', 因此 $\dot{u}(0) = u_1$

取 $\psi\in C^2(I)$, $\psi(T) = 0$, $\dot{\psi}(T) = 0$, 分步积分$(3.14)_i$ 和$(3.15)_i$ 的左边并比较结果可类似得到 $u(0) = u_0$•

注解 2 如果只设 $f\in L^{p'}(I, H)$ 定理中别的条件不变, 结论同样成立•

注解 3 上述定理只讨论了 $\mathrm{mes}\,\Gamma_t > 0$ 的情形• 对于 $\Gamma_t = \phi$, 结论仍然成立• 此时取 $V = (W_0^{m,2p})^3$, $F_1 = V'$•

定理 2 若 W, f, f_0 满足定理 1 中的 1, 2, 3 且 $m \geqslant 2 + [3/(2p)]$, $u_0\in V$, $\det(\mathrm{II} + \nabla u_0(x)) > 0$ 在 Ω, 那么存在 $0 < T_0 \leqslant T$, 方程(2.1), (2.2), (2.4), (2.5) 的满足定理 1 条件的解 u 在$[0, T_0]\times\Omega$ 上满足(2.3), 即 u 是(2.1) ~ (2.5) 的在$[0, T_0]\times\Omega$ 上的解•

证明 设 u 是定理 1 中方程(2.1), (2.2), (2.4), (2.5) 的解• 因为 $m - 1 - [3/(2p)] \geqslant 1$, $2mp > 4$, 由 Sobolev 嵌入定理, $\nabla u_0(x)$ 在 Ω 上连续, $u(t, x)$ 和 $\nabla_x u(t, x)$ 在 $I\times\Omega$ 上也

是连续的, $u(0,x)=u_0(x)$, $\nabla_x u(0,x)=\nabla u_0(x)$, $x\in\Omega$, $\det(\mathrm{II}+\nabla_x u(0,x))=\det(\mathrm{II}+\nabla u_0(x))>0$ 在 Ω, Ω 是 **R** 中的有界闭域, 因此存在 T_0, $0<T_0\leqslant T$, $\det(\mathrm{II}+\nabla_x u(t,x))>0$ 在 $[0,T_0]\times\Omega$•

注解 4 从定理 **2** 我们知道, 若 $\Gamma_u=\partial\Omega$, 当 Ω 是连通域时, $\Phi_t(x)=x+u(t,x)$ 是从 Ω 到 Ω 上的保定向的 C^1 的微分同胚• 如果 $\mathrm{mes}\Gamma_t>0$, $\Phi_t(\cdot)$ 可能只是 Ω 到 Ω 的局部微分同胚•

注解 5 从定理 1, 2 不难知道, 对于有限变形弹性动力学系统, 当其具有线性本构关系时(定理 1 中条件 2, 自动满足) 其解是存在的•

参 考 文 献

1 R. A. Adam, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975).

2 M. S. Berger, *Nonlinearity and Functional Analysis*, Academic Press (1977).

3 Y. C. Chen, W. Von Wahl, Das rand_an fangs wertproblem f r quasilineare we llenleichungen in sobolev raumen nicdriger Ordnung, *J. Reine Angew. Math.*, **337** (1982), 77—112.

4 C. M. Dafermos and W. J. Heusa, Energy methods for quasilinear hyperbolic initial_boundary value problems, Applications to Elastodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **87** (1985), 267—292.

5 D. G. Ebin and R. A. Saxton, The initial_valueproblem for elastodynamics of incompressible bodies, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **94** (1996), 15—38.

6 D. G. Ebin and S. R. Simanca, Deformations of incompressible bodies with free boundary, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **120** (1992), 61—97.

7 M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York (1981).

8 T. J. R. Hughes, T. Kato and J. E. Marsdon, Well_posed quasilinear second_order hyperbolic systems with application to nonlinear elastodynamics and general ralativity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **63** (1977), 273—294.

9 T. J. R. Hughes and J. E. Marsden, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice_Hall, Englewood Cliffs NJ., (1983).

10 T. Kato, Linear and quasilnear equations of evolution of hyperbolic type, in *Hyperbolicity* (G. Daprato and G. Geymonat ed.) Centro Internazionale Malematico Estivo, II Ciclo, Cortona (1976) 125—191.

11 J. L. Lions, *Quelques M thodes de R solution des Probl mes aux Iinites Nonlin rires*, Punod, Gauthier- Villars, (1969).

The Existence of Solution to the Finite Elastodynamics With Mixed Boundary Conditions

Guo Xingming

(Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P.R.China)

Abstract

In this paper the existence of solution to finite elastodynamics constrainted by mixed boundary conditions is derived when the hyperpotential and its gradient (for Green′ strain) satisfy adequate conditions.

Key words finite deformation, nonlinear constitutive, elastodynamics, existence of solution