应用数学和力学, 第 19 卷 第 1 期(1998 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

集值映射的 Hahn_Banach 定理*

孟志青①

(张石生推荐, 1996 年 1 月 26 日收到, 1997 年 8 月 6 日收到修改稿)

摘　　要

本文在偏序局部凸拓扑向量空间中对于 K_凸集值映射和 K_次线性集值映射利用了有效性的概念分别证明了它的 Hahn_Banach 型定理.

关键词　集值函数　K_凸　K_次线性的　K_弱有效点

§1. 引　　言

Hahn_Banach 定理是泛函分析的一个重要结论[1], 它在许多方面有着重要的应用, 如 Clarke 次微分[3]、Ioffe 广义微分[2]和[6]中定义的广义次微分存在性的证明.

本文在局部凸拓扑向量空间中, 对于给定的尖闭凸锥 K 来确定空间的序, 并引进了集值映射的 K_次线性的概念, 当集值映射为数值函数, $K=[0,+\infty)$时, 这时 K_次线性即是数值函数的次线性, 我们利用有效性的概念, 对于集值映射得到了比数值函数的 Hahn_Banach 定理更一般的结论, 最后将这个结论应用在集值映射次微分的研究.

§2. 广义 Hahn_Banach 定理

设 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 是局部凸拓扑向量空间, $\mathfrak{X}^*$ 和 $\mathfrak{Y}^*$ 分别是 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 的全体线性连续泛函构成的对偶空间. 记$\langle x^*, x\rangle$($\langle y^*, y\rangle$)表示线性连续泛函 $x^*\in\mathfrak{X}^*$ ($y^*\in\mathfrak{Y}^*$) 在点 $x\in\mathfrak{X}$($y\in\mathfrak{Y}$)的值. $\phi(x)$($\forall x\in\mathfrak{X}$) 是 $\mathfrak{Y}$ 中非空子集, 集值映射 $\phi: \mathfrak{X}\to 2^{\mathfrak{Y}}$, $x\to\phi(x)$. 设 $K\subset\mathfrak{Y}$ 是确定 $\mathfrak{Y}$ 中序的尖闭凸锥, $\operatorname{int}K\neq\varnothing$, $K^*\subset\mathfrak{Y}^*$ 是 K 的对偶锥[5]

$$K^* = \{q^*\in\mathfrak{Y}^* \mid \langle q^*, q\rangle \geqslant 0,\ \forall q\in K\}$$

定义 2.1[4,5]　设 $Y\subset\mathfrak{Y}$ 是非空子集, 点 $y\in Y$. 如果不存在 $y\in Y$ 使得 $y-y\in\operatorname{int}K$, 则称 y 是 Y 的 K_弱有效点, 将 Y 所有的 K_弱有效点集构成的集合记作 $W(Y, K)$.

定义 2.2[4,5]　设 $\mathfrak{X}$ 是非空凸子集. 如果对任何 $x_1, x_2\in\mathfrak{X}$, $\lambda\in(0,1)$ 有

$$\lambda\phi(x_1) + (1-\lambda)\phi(x_2) \subset \phi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + K$$

则称 ϕ 在 $\mathfrak{X}$ 上是 K_凸的.

---

* 国家自然科学基金和湖南省教委科研基金资助项目

① 湘潭大学计算机系, 湖南湘潭 411105

定义 2.3 如果集值映射 ϕ 满足

(1) $\phi(\lambda x)=\lambda\phi(x) \qquad (\forall x\in\mathfrak{X}, \lambda>0)$

(2) $\phi(x_1)+\phi(x_2)\subset\phi(x_1+x_2)+K \qquad (\forall x_1, x_2\subset\mathfrak{X})$

则称 ϕ 在 $\mathfrak{X}$ 上是 K_次线性集值映射或 K_次线性的．显然如果 ϕ 是 K_次线性集值映射数, 那么 ϕ 在 $\mathfrak{X}$ 上是 K_凸的．设 ϕ 的 K_上图象为

$$K-\mathrm{epi}\phi=\{(x,y)\mid x\in\mathfrak{X}, y\in\phi(x)+K\}$$

定理 2.1 设集值映射 $\phi:\mathfrak{X}\to 2^{\mathfrak{Y}}$ 在 $\mathfrak{X}$ 上是 K_凸的, $\forall x\in\mathfrak{X}$ 有 $\phi(x)\neq\emptyset$, $\mathrm{int}(K\_epi\phi)\neq\emptyset$．设 V 是 $\mathfrak{X}$ 的非空线性子空间, $\mathrm{int}K\neq\emptyset$, $p\in\mathrm{int}K$．如果存在一点 $x_0^*\in\mathfrak{X}^*$ 使得 $0\in W(\bigcup_{x\in V}[\phi(x)-\langle x_0^*, x\rangle p], K)$ 则存在一个连续泛函 $x^*\in\mathfrak{X}^*$ 使得

$$\langle x_0^*, x\rangle=\langle x^*, x\rangle \quad (\forall x\in V)$$

和 $0\in W(\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}[\phi(x)-\langle x^*, x\rangle p], K)$．

证明 设集合

$$A=\{(x,y)\mid x\in\mathfrak{X}, y\in\phi(x)+K\},$$

$$B=\{(x,y)\mid x\in V, y=\langle x_0^*, x\rangle p\}$$

我们容易推知 A 和 B 是 $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$ 中的凸子集, 显然 $B\neq\emptyset$, $\mathrm{int}A\neq\emptyset$, 我们证明 $B\cap\mathrm{int}A=\emptyset$．事实上, 如果 $(x', y')\in B\cap\mathrm{int}A$, 由 $p\neq 0$ 则存在 $\lambda>0$ 使得 $(x', y'-\lambda p)\in A$, 由此, 我们根据 A 和 B 的定义知存在 $q'\in K$, $x'\in V$ 和 $y''\in\phi(x')$ 使得

$$\langle x_0^*, x'\rangle p-\lambda p=y''+q'$$

再由 $p\in\mathrm{int}K$ 和 K 是凸锥, 从上式得到

$$0-(y''-\langle x_0^*, x'\rangle p)=\lambda p+q'\in\mathrm{int}K$$

由定义 2.1 和上式我们知 $0\notin W(\bigcup_{x\in V}[\phi(x)-\langle x_0^*, x\rangle p], K)$, 这与已知矛盾．根据凸集分离定理[1]知存在 $(x^*, y^*)\in\mathfrak{X}^*\times\mathfrak{Y}^*$ 和 $(x^*, y^*)\neq 0$ 使得

$$\langle x^*, x\rangle+\langle y^*, y+q\rangle\geqslant\langle x^*, x_v\rangle+\langle y^*, \langle x_0^*, x_v\rangle p\rangle \tag{2.1}$$

其中, $x\in\mathfrak{X}$, $y\in\phi(x)$, $q\in K$, $x_v\in V$．由 $0\in W(\bigcup_{x\in V}[\phi(x)-\langle x_0^*, x\rangle p], K)$ 知存在 $x\in V$ 使得 $y\in\phi(x)$ 和 $y=\langle x_0^*, x\rangle p$, 因此, $(x, y)\in B\cap A$, 设 $x=x$, $y=y$, $x_v=x$ 和 $\forall q\in K$ 代入(2.1)得

$$\langle y^*, q\rangle\geqslant 0 \qquad (\forall q\in K)$$

由于已知 V 是线性子空间, 故 $y^*\neq 0$, 我们得 $y^*\in K^*\setminus\{0\}$．从 $p\in\mathrm{int}K$ 和文[5]的引理 3.2—1 知 $\langle y^*, p\rangle>0$．再因 V 是线性子空间, 从(2.1)式可推得

$$\langle x^*, x_v\rangle+\langle x_0^*, x_v\rangle\langle y^*, p\rangle=0 \quad (\forall x_v\in V)$$

设 $x^*=-\dfrac{x^*}{\langle y^*, p\rangle}$, 上式即得,

$$\langle x^*, x_v\rangle=\langle x_0^*, x_v\rangle \quad (\forall x_v\in V)$$

在(2.1)中, 令 $q=0$ 得

$$\langle y^*, y\rangle-\langle x^*, x\rangle\langle y^*, p\rangle\geqslant 0 \qquad (\forall x\in\mathfrak{X}, y\in\phi(x)) \tag{2.2}$$

假设 $0\notin W(\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}[\phi(x)-\langle x^*, x\rangle p], K)$, 由定义 2.1 知存在 $x_1\in\mathfrak{X}$, $y_1\in\phi(x_1)$ 使得

$$0-(y_1-\langle x^*, x_1\rangle p)\in\mathrm{int}K$$

据 $y^*\in K^*\setminus\{0\}$ 和文[5]的引理 3.2—1 得

$$\langle y^*, -y_1+\langle x^*, x_1\rangle p\rangle > 0$$

即

$$\langle y^*, y_1\rangle-\langle x^*, x_1\rangle\langle y^*, p\rangle < 0$$

上式与(2.2)式矛盾. 证毕.

推论 2.1 设集值映射 $\phi:\mathfrak{X}\to 2^{\mathfrak{Y}}$ 在 $\mathfrak{X}$ 上是 K_凸的, $\mathrm{int}(K\_epi\phi)\neq\emptyset$, $p\in\mathrm{int}K$. V 是 $\mathfrak{X}$ 中的非空线性子空间, 如果存在 $x_0^*\in\mathfrak{X}^*$, $q_0^*\in K^*\setminus\{0\}$, $x\in V$ 和 $y\in\phi(x)$ 使得

$$\langle q_0^*, y\rangle\geqslant\langle x_0^*, x\rangle\langle q_0^*, p\rangle(\forall x\in V,\ \forall y\in\phi(x))\text{和 } y=\langle x_0^*, x\rangle p,$$

则存连续泛函 $x^*\in\mathfrak{X}^*$ 和 $q^*\in K^*\setminus\{0\}$ 使得

$$\langle x^*, x\rangle=\langle x_0^*, x\rangle\quad(\forall x\in V)\tag{2.3}$$

和

$$\langle q^*, y\rangle\geqslant\langle x^*, x\rangle\langle q^*, p\rangle\qquad(\forall x\in\mathfrak{X},\ \forall y\in\phi(x))\tag{2.4}$$

证明 从已知知 $0\in\bigcup_{x\in V}[\phi(x)-\langle x_0^*, x\rangle p]$, 假设 $0\in W(\bigcup_{x\in V}[\phi(x)-\langle x_0^*, x\rangle p], K)$, 由定义 2.1 存在 $x'\in V$ 和 $y'\in\phi(x')$ 使得

$$0-(y'-\langle x_0^*, x'\rangle p)\in\mathrm{int}K$$

由 $p\in\mathrm{int}K$ 和 $q_0^*\in K^*\setminus\{0\}$, 利用文[5]的引理 3.2—1 得

$$\langle q_0^*, -y'+\langle x_0^*, x'\rangle p\rangle > 0$$

即 $\langle q_0^*, y'\rangle<\langle x_0^*, x'\rangle\langle q_0^*, p\rangle$ 这与推论已知矛盾. 故由定理 2.1 存在线性泛函 $x^*\in\mathfrak{X}^*$ 使得(2.3)成立, 以及在(2.2)中令 $q^*=y^*$ 即得(2.4)

推论 2.2 设 $\phi:\mathfrak{X}\to R^1$ 是凸函数, ϕ 在 $\mathfrak{X}$ 上是连续函数. V 是 $\mathfrak{X}$ 的线性子空间. 如果存在 $x_0^*\in\mathfrak{X}^*$ 和 $x\in\mathfrak{X}$ 使得 $\phi(x)=\langle x_0^*, x\rangle$, $\phi(x)\geqslant\langle x_0^*, x\rangle(\forall x\in\mathfrak{X})$, 则存在 $x^*\in\mathfrak{X}^*$ 使得 $\langle x_0^*, x\rangle=\langle x^*, x\rangle(\forall x\in V)$ 和 $\phi(x)\geqslant\langle x^*, x\rangle(\forall x\in\mathfrak{X})$.

证明 令 $K=R'_+=[0,+\infty)$, $p=1$, 由推论 2.1 知结论成立.

我们有一点延拓的 Hahn_Banach 定理.

定理 2.2 设 $\phi:\mathfrak{X}\to 2^{\mathfrak{Y}}$ 是在 $\mathfrak{X}$ 上 K_次线性集值映射. $\mathrm{int}(K-epi\phi)\neq\emptyset$, $p\in\mathrm{int}K$, $0\in\phi(0)\subset K$. 如果存在 $x_0\in\mathfrak{X}$ 和 $q_0^*\in K^*\setminus\{0\}$ 使得 $\inf_{y\in\phi(x_0)}\langle q_0^*, y\rangle>-\infty$, 则存在一线性连续泛函 $x^*\in\mathfrak{X}^*$ 使得

$$\inf_{y\in\phi(x_0)}\langle q_0^*, y\rangle=\langle x^*, x_0\rangle\langle q_0^*, p\rangle$$

和

$$0\in W(\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}[\phi(x)-\langle x^*, x\rangle p], K)$$

证明 设 $x_0\neq 0$, 由 $p\in\mathrm{int}K$ 和 $q_0^*\in K^*\setminus\{0\}$ 得 $\langle q_0^*, p\rangle>0$. 令 $\lambda=\inf_{y\in\phi(x_0)}\langle q_0^*, p\rangle$, 则

$$\langle q_0^*, y\rangle\geqslant\lambda\langle q_0^*, p\rangle\quad(\forall y\in\phi(x_0))\tag{2.5}$$

已知 ϕ 在 $\mathfrak{X}$ 上是 K_次线性的和 $\phi(0)\subset K$ 我们有

$$\phi(x_0)+\phi(-x_0)\subset\phi(0)+K\subset K$$

由 $q_0^*\in K^*\setminus\{0\}$ 和上式得

$$\langle q_0^*, y\rangle+\langle q_0^*, y\rangle\geqslant 0\qquad(\forall y\in\phi(x_0),\ \forall y\in\phi(-x_0))\tag{2.6}$$

我们证明下式成立

$$\langle q_0^*, y\rangle\geqslant-\lambda\langle q_0^*, p\rangle\qquad(\forall y\in\phi(-x_0))\tag{2.7}$$

事实上, 若(2.7)不成立, 则存在 $\delta>0$ 和 $y_0\in\phi(-x_0)$ 使得

$$\langle q_0^*, y\rangle < -\lambda\langle q_0^*, p\rangle - \delta \tag{2.8}$$

由 λ 的定义知存在 $y_0\in\phi(x_0)$ 使得

$$\langle q_0^*, y_0\rangle < \lambda\langle q_0^*, p\rangle + \delta \tag{2.9}$$

将(2.8)+(2.9), 得

$$\langle q_0^*, y_0\rangle + \langle q_0^*, y_0\rangle < 0$$

上式与(2.6)矛盾. 由 $x_0\neq 0$ 和 $\lambda>-\infty$ 知存在线性泛函 $x_0^*\in\mathfrak{X}^*$ 使得 $\langle x_0^*, x_0\rangle=\lambda$. 从(2.5)和(2.7)我们能推得

$$\langle x_0^*, x_0\rangle p - y \bar{\in} \operatorname{int}K \qquad (\forall y\in\phi(x_0)) \tag{2.10}$$

$$-\langle x_0^*, x_0\rangle p - y \bar{\in} \operatorname{int}K \qquad (\forall y\in\phi(-x_0)) \tag{2.11}$$

因为如果(2.10)不成立, 那么存在 $y\in\phi(x_0)$ 使得

$$\langle x_0^*, x_0\rangle p - y \in \operatorname{int}K$$

利用 $q_0^*\in K^*\setminus\{0\}$ 和文[5]的引理 3.2—1 我们得

$$\langle x_0^*, x_0\rangle\langle q_0^*, p\rangle > \langle q_0^*, y\rangle$$

上式与(2.5)矛盾. 同理可证(2.11)成立. 作子空间 $V=\{x\in\mathfrak{X}\mid x=\alpha x_0,\ \alpha\in R^1\}$, 显然 V 是 $\mathfrak{X}$ 的线性子空间.

我们证明

$$0\in W\Big(\bigcup_{x\in V}[\phi(x)-\langle x_0^*, x\rangle p], K\Big) \tag{2.12}$$

事实上, 如果 $0\bar{\in} W\big(\bigcup_{x\in V}[\phi(x)-\langle x_0^*, x\rangle p], K\big)$, 则存在 $\alpha'\in R^1$ 使得

$$\langle x_0^*, \alpha' x_0\rangle p - y\in\operatorname{int}K \qquad (y\in\phi(\alpha' x_0)) \tag{2.13}$$

下面分三种情形分别得到矛盾.

(a) 当 $\alpha'=0$, 由(2.13)得一 $y\in\operatorname{int}K$ 和 $y\in\phi(0)$, 从已知 $\phi(0)\subset K$ 和 K 是尖锥得 $y\bar{\in}-\operatorname{int}K$, 导致矛盾.

(b) 当 $\alpha'>0$, 由(2.13)和 $\phi(\alpha' x_0)=\alpha'\phi(x_0)$ 得

$$\langle x_0^*, x_0\rangle p - \frac{y}{\alpha'}\in\operatorname{int}K \qquad \Big(\frac{y}{\alpha'}\in\phi(x_0)\Big)$$

上式与(2.10)矛盾.

(c) 当 $\alpha'<0$, 由(2.13)和 $\phi(\alpha' x_0)=-\alpha'\phi(-x_0)$ 得

$$-\langle x_0^*, x_0\rangle p - \frac{y}{-\alpha'}\in\operatorname{int}K \qquad \Big(\frac{y}{-\alpha'}\in\phi(-x_0)\Big)$$

上式与(2.11)矛盾.

现在设 $x_0=0$, $V=\{0\}$, V 是线性子空间. 从已知 $0\in\phi(0)\subset K$ 和 K 是尖锥得 $-\phi(0)\bar{\in}\operatorname{int}K$, 因此

$$0\in W\Big(\bigcup_{x\in V}[\phi(x)-\langle x^*, x\rangle p], K\Big) \tag{2.14}$$

从(2.12)和(2.14), 利用定理 2.1 知存在 $x^*\in\mathfrak{X}^*$ 使得

$$\langle x^*, x_0\rangle = \langle x_0^*, x_0\rangle$$

和 $0\in W\big(\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}[\phi(x)-\langle x^*, x\rangle p], K\big)$.

由定理 2.2 我们容易推得下面推论.

推论 2.3 假设同定理 **2.2** 一样• 则存在线性连续泛函 $x^* \in \mathfrak{X}^*$ 和 $q^* \in K^* \setminus \{0\}$ 使得

$$\inf_{y \in \phi(x_0)} \langle q_0^*, y \rangle = \langle x^*, x_0 \rangle \langle q_0^*, p \rangle$$

和

$$\langle q^*, y \rangle \geqslant \langle x^*, x \rangle \langle q^*, p \rangle \qquad (\forall x \in \mathfrak{X}, \forall y \in \phi(x))$$

推论 2.4 设实函数 $\phi: x \to R^1$ 是 R^1_+ 一次线性的, ϕ 在 $\mathfrak{X}$ 上连续• $p = 1$, $\phi(0) = 0$• 如果存在 x_0 使得 $\varphi(x_0) > -\infty$, 则存在 $x^* \in \mathfrak{X}^*$ 使得 $\phi(x_0) = \langle x^*, x_0 \rangle$和

$$\phi(x) \geqslant \langle x^*, x \rangle \qquad (\forall x \in \mathfrak{X})$$

推论 2.4 显然就是一般函数的Hanhn_Banach 定理• 另外如果存在一个选择函数 $g(x)$ 在 x 的领域 $N(x)$ 上连续, 并且 $g(x) \in \phi(x)$ $(\forall x \in N(x))$, 则称集值映射 ϕ 在 x 处连通• 显然若 ϕ 在 x 处连通有 $\mathrm{int}(K - \mathrm{epi}\phi) \neq ï$, 因此前面的定理中 $K - epi\phi$ 内部非空的条件可以换成 ϕ 在一点处连通•

定义 2.4 如果集值, 映射 ϕ 满足

(1) $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$ $(\forall x \in \mathfrak{X})$;

(2) $\phi(x_1) + \phi(x_2) \subset \phi(x_1 + x_2)$ $(\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{X})$• 称 ϕ 在 $\mathfrak{X}$ 上是次性线集值映射或凸过程(见[8], P. 131)• 显然, ϕ 在 $\mathfrak{X}$ 上是次性线集值映射, 也是 K_次线性映射•

推论 2.5 设 $\phi: \mathfrak{X} \to 2^{\mathfrak{Y}}$ 是在 $\mathfrak{X}$ 上次线性集值映射• $\mathrm{int}(K - \mathrm{epi}\phi) \neq ï$, $p \in \mathrm{int}K$, $0 \in \phi(0) \subset K$• 如果存在 $x_0 \in \mathfrak{X}$ 和 $q_0^* \in K^* \setminus \{0\}$ 使得 $\inf\limits_{y \in \phi(x_0)} \langle q_0^*, y \rangle > -\infty$, 则存在一线性连续泛函 $x^* \in \mathfrak{X}^*$ $y \in \phi(x_0)$ 和 $q_0^* \in K^* \setminus \{0\}$ 使得

$$\inf_{y \in \phi(x_0)} \langle q_0^*, p \rangle = \langle x^*, x_0 \rangle \langle q_0^*, p \rangle$$

和

$$\langle q^*, y \rangle \geqslant \langle x^*, x \rangle \langle q^*, p \rangle \qquad (\forall x \in \mathfrak{X}, \forall y \in \phi(x))$$

§ 3. 在微分学方面的应用

定义 3.1[7] 设集值映射 $\phi: \mathfrak{X} \to 2^{\mathfrak{Y}}$, $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \phi(x)$, $p \in \mathrm{int}K$• 如果对 $x^* \in \mathfrak{X}^*$, 不存在 $y \in \bigcup\limits_{x \in \mathfrak{X}} [\phi(x) - \langle x^*, x \rangle p]$ 使得 $y - \langle x^*, x \rangle p - y \in \mathrm{int}K$, 则称 x^* 是集值映射 ϕ 在点 $(x, y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ 处关于 p 的 K_弱次梯度, ϕ 在 (x, y) 处关于 p 的所有 K_弱次梯度构成的集合记为 $\partial \phi(x, y)_p$•

由定理 2.2 和定义 3.1 得结论:

定理 3.1 假设同定理 **2.2** 一样, 则存在线性连续泛函 x^* 使得

$$x^* \in \partial \phi(0, 0)_p$$

设集值映射 ϕ 的图象:

$$\mathrm{graph}(\phi) = \{(x, y) \mid x \in \mathfrak{X}, y \in \phi(x)\}$$

$b(\mathrm{graph}(\phi))$ 是 $\mathrm{graph}(\phi)$ 的障碍锥(见文[8]中 p. 134)• 我们由定理 2.2 得结论:

定理 3.2 假设同定理 **2.2** 一样, 则存在线性连续泛函 $x^* \in \mathfrak{X}^*$ 和 $q^* \in K^*$ 使得 $(x^*, -q^*) \in b(\mathrm{graph}(\phi))$•

定义 3.2 假设 $\mathrm{graph}(\phi)$ 是凸集, 设 $x_0 \in \mathfrak{X}$, $y_0 \in \phi(x_0)$, 称

$$T_{\text{graph}(\phi)}(x_0, y_0) = d\Big(\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(\text{graph}(\phi) - (x_0, y_0))\Big)$$

是 ϕ 在 (x_0, y_0) 处的切锥, 设集值映射 $D\phi(x_0, y_0): \mathfrak{X} \to 2^{\mathfrak{Y}}$

$$v \in D\phi(x_0, y_0)(u) \text{ 当且仅当}, (v, u) \in T_{\text{graph}(\phi)}(x_0, y_0)$$

称 $D\phi(x_0, y_0)$ 为 ϕ 在 (x_0, y_0) 处的导数. $D\phi(x_0, y_0)(u)$ 在 $\mathfrak{X}$ 上是凸过程(见文[8] p. 178), 我们定义 $D\phi(x_0, y_0)^*$ 为凸集值映射 ϕ 在点 (x_0, y_0) 处的凸微分, 即 $D\phi(x_0, y_0)^*: \mathfrak{Y}^* \to 2^{\mathfrak{X}^*}$,

$x^* \in D\phi(x_0, y_0)^*(q^*)$ 当且仅当 $\langle y^*, v\rangle \geqslant \langle x^*, u\rangle \quad (\forall u \in \mathfrak{X}), \forall v \in D\phi(x_0, y_0)(u)$. (参见文[8] p. 178) 由推论 2.5 得结论.

定理 3.3 若 graph(ϕ) 是凸集, $\text{int}(\text{graph}(\phi)) \neq \emptyset$, $p \in \text{int}K$. 如果存在 $u_0 \in \mathfrak{X}$ 和 $q_0^* \in K^* \setminus \{0\}$ 使得 $\inf\limits_{v \in D\phi(x_0, y_0)(u_0)} \langle q_0^*, v\rangle > -\infty$, 则存在一线性连续泛函 $x^* \in \mathfrak{X}^*$ 和 $q^* \in K^* \setminus \{0\}$ 使得

$$\inf\langle q_0^*, D\phi(x_0, y_0)(u_0)\rangle = \langle x^*, u_0\rangle\langle q_0^*, p\rangle,$$

$$x^* \in D\phi(x_0, y_0)^*(q^*).$$

证明 由文[8] 中 169 页的性质知

$$\text{int}(T_{\text{graph}(\phi)}(x_0, y_0)) \neq \emptyset, D\phi(x_0, y_0)(0) = 0$$

则由推论 2.5 知结论(3) 成立.

下面对于一般非凸集值映射 $\phi: \mathfrak{X} \to 2^{\mathfrak{Y}}$, 由文[8] p. 406 定义 3, 设 $C_{\text{graph}(\phi)}(x_0, y_0)$ 是 ϕ 在点 $(x_0, y_0) \in \text{graph}(\phi)$ 的 Clarke 切锥, $C\phi(x_0, y_0)$ 是 ϕ 在点 (x_0, y_0) 处的导数([8] p. 413), $C\phi(x_0, y_0)^*$ 是 ϕ 在点 (x_0, y_0) 处的凸微分. 由推论 2.5 得结论:

定理 3.4 若 $\text{int}(C_{\text{graph}(\phi)}(x_0, y_0)) \neq \emptyset$, $p \in \text{int}K$. 如果存在 $u_0 \in \mathfrak{X}$ 和 $q_0^* \in K^* \setminus \{0\}$ 使得 $\inf\limits_{c \in C\phi(x_0, y_0)(u_0)} \langle q_0^*, v\rangle > -\infty$, 则存在一线性连续泛函 $x^* \in \mathfrak{X}^*$ 和 $q^* \in K^* \setminus \{0\}$ 使得

$$\inf\langle q_0^*, C\phi(x_0, y_0)(u_0)\rangle = \langle x^*, u_0\rangle\langle q_0^*, p\rangle,$$

$$x^* \in C\phi(x_0, y_0)^*(q^*)$$

定义 3.3 设集值映射 $\phi: \mathfrak{X} \to 2^{\mathfrak{Y}}$, $x_0 \in \mathfrak{X}$, $y_0 \in \phi(x_0)$, $p \in \text{int}K$, 称子集

$$\partial\phi(x_0, y_0) = \Big\{x^* \in \mathfrak{X}^* \mid 0 \in W\Big(\bigcup_{u \in \mathfrak{X}}[C\phi(x_0, y_0)(u) - \langle x^*, u\rangle p], K\Big)\Big\}$$

为 ϕ 在 (x_0, y_0) 处的相对于 p 的锥次微分.

我们利用定理 2.2 得定理 3.5.

定理 3.5 若假设同定理 **3.4** 一样, 则 $\partial\phi(x_0, y_0)_p \neq \emptyset$

我们有如下结论:

定理 3.6 若假设同定理 **3.4** 一样, 则对每一个 $u \in \mathfrak{X}$, 存在 $q^* \in K^* \setminus \{0\}$ 使得

$$\inf\langle q^*, C\phi(x_0, y_0)(u)\rangle = \max\{\langle x^*, u\rangle\langle q^*, p\rangle \mid x^* \in \partial\phi(x_0, y_0)_p\}$$

证明 设 $u \in \mathfrak{X}$, $x^* \in \partial\phi(x_0, y_0)_p$ 和

$$\langle x^*, u\rangle \geqslant \langle x^*, u\rangle \qquad (\forall x^* \in \partial\phi(x_0, y_0)_p)$$

容易知存在 $q^* \in K^* \setminus \{0\}$ 使得

$$\langle q^*, v\rangle \geqslant \langle x^*, u\rangle\langle q^*, p\rangle \qquad (\forall u \in \mathfrak{X}, \forall v \in C\phi(x_0, y_0)(u))$$

因此, 得

$$\inf\langle q^*, C\phi(x_0, y_0)(u)\rangle \geqslant \langle x^*, u\rangle\langle q^*, p\rangle$$

由定理 2.2 知存在 $x^* \in \partial\phi(x_0, y_0)_p$ 使得

$$\inf\langle q^*, C\phi(x_0, y_0)(u)\rangle = \langle x^*, u\rangle\langle q^*, p\rangle$$

因此, $\langle x^*, u\rangle \geqslant \langle x^*, u\rangle$, 从而得 $\langle x^*, d\rangle = \langle x^*, d\rangle$•

由此我们得下面推论•

推论 3.7 若 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, 单值函数 $\phi: \mathscr{X} \to R^1$ 是在点 x 处的 Lipschitz 函数, $K = [0, \infty)$, $p = 1$, 则

$$\phi^0(x_0, u) = \max\{\langle x^*, u\rangle \mid x^* \in \partial\phi(x_0)\} \qquad (\forall u \in \mathscr{X})•$$

其中, $\phi^0(x_0, u)$ 为广义方向导数(见[3]和[8])•

对于一般集值映射, 我们利用它的 K_上图象而引进的广义方向导数和广义锥次微分, 得到了的许多结论, 已另外发表•

参 考 文 献

1 ． ． ŧzÄÀÂÀ³ºÉº ． ． ¼º½À³ ,《泛函分析》, 刘证等译, 高等教育出版社 (1982).

2 院国桢, 共轭 Hanhn_Banach 定理, 湘潭大学自然科学报, **14**(2) (1992), 52—57.

3 F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, New York: A Wiley Interscience Publication (1983), 24—109.

4 Y. Sawaragi, etc., *Theory of Multiobjective Optimization*, *Academic Press*, Inc. Orlando (1985).

5 胡毓达,《多目标规划有效性理论》, 上海科学技术出版社, 上海 (1994).

6 陈光亚、王毓云, Generalijed Hahn_Banach theorems and subdifferential of set_valued, 系统科学与数学, **5** (3) (1985), 223—230.

7 孟志青、邹凯, 集值函数向量优化锥弱有效解的最优化生条件, 湘潭大学自然科学报, **17**(4) (1995), 24—27.

8 J. T. Aubin and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, John Wiley & Sons, New York (1984).

Hahn_Banach Theorem of Set_Valued Map

Meng Zhiqing

(Department of Computer, Xiangtan Uinversity, Xiangtan, Hunan 411105, P. R. China)

Abstract

We have proved generalized Hahn_Banach theorem by using the concept of efficinet for K_convex multifunction and K_sublinear multifunction in partially ordered locally convex topological vector space.

Key words multifunction, K_convex, K_sublinear, K_wead efficient point