应用数学和力学，第18卷 第12期（1997年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

非完整系统Hamilton原理的驻值特性

梁立孚[1] 梁忠宏[2] 石志飞[2]

（叶开沅推荐，1994年2月18日收到，1997年5月29日收到修改稿）

摘 要

本文论证了非完整系统的Hamilton原理的驻值特性，指出运用Appell-Chetaev条件的Hamilton原理和不应用Appell-Chetaev条件的Hamilton原理都是驻值变分原理。并且，讨论了几个有关问题。

关键词 变分原理 非完整系统 稳定作用量 分析动力学

一、引 言

1894年Hertz引入非完整系统的概念[1]，他认为Hamilton原理不适用于非完整系统，它不满足带有不定乘子的Lagrange方程。因此，Hölder[2]，Суслов[3]和Воронец[4]致力于建立新型的变分原理。Capon重申Hertz的观点，他认为Hölder的理论是不对的[5]。Jeffreys和Pars反对Capon的论断[6,7]。Pars将Hölder的著名论文[2]视为变分原理理论的奠基性工作。他认为，对于非完整系统，

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L(q,\ \dot{q},\ t)dt=0 \tag{1.1}$$

形式的Hamilton原理是不对的，而

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L(q,\ \dot{q},\ t)dt=0 \tag{1.2}$$

形式的Hamilton原理是正确的。对线性的约束系统，Kerner认为方程(1.1)形式的Hamilton原理仅仅对完整系统才是正确的[8]。Неймарк和Фуфаев认为Hamilton原理取何种形式取决于对d-δ交换性持何种观点[9]。Зумянцев对这一问题进行了系统的研究，他指出，Суслов形式的Hamilton原理和Воронец形式的Hamilton原理均可变换为Hölder形式的Hamilton原理[10]。Зумянцев进一步指出，仅仅对满足条件

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s=0 \tag{1.3}$$

1 哈尔滨船舶工程大学航天系，哈尔滨 150001
2 哈尔滨工业大学航天学院，哈尔滨 150001

或者

$$\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}A_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}=0 \tag{1.4}$$

的非完整系统的运动，Hamilton原理才具有方程(1.2)的形式，才是稳定作用量原理[11]. 他还强调指出，对非完整系统，条件(1.3)或条件(1.4)仅在极个别的情况下才满足.

在本文中，我们证明应用Appell-Chetaev条件的Hamilton原理和不应用Appell-Chetaev条件的Hamilton原理都是稳定作用量变分原原理. 并且，讨论一些有关的问题.

二、Hamilton原理的驻值特性

让我们考虑一个动力学系统，该系统由Lagrange函数$L(q, \dot{q}, t)$和非完整约束的独立方程

$$f_{\beta}(q, \dot{q}, t)=0 \qquad (\beta=1, 2, \cdots, g) \tag{2.1}$$

来描述. 一般说来约束方程对$\dot{q}$不是线性的. 这里q_s和$\dot{q}_s\equiv dq_s/dt$是Lagrange坐标和广义速度，t是时间. 脚标$s=1, 2, \cdots, n$, $n>g$. 在通常的动力学系统情形，L是$T+U$，其中$T(q, \dot{q}, t)$是系统的动能，$U(q, t)$是力函数. 由于方程(3.1)的独立性，即秩

$$\mathrm{rank}(\partial f_{\beta}/\partial\dot{q}_s)=g \tag{2.2}$$

所以它们可表为如下形式

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_{\beta}(q_s, \dot{q}_{\sigma}, t) \qquad (\sigma=1, 2, \cdots, \varepsilon;\ \varepsilon=n-g) \tag{2.3}$$

其中，$\dot{q}_{\sigma}$为独立的广义速度.

以下，我们将用规范的方法[12] [16]来证明，应用Appell-Chetaev条件的Hamilton原理和不应用Appell-Chetaev条件的Hamilton原理都是稳定作用量原理.

2.1 应用Appell-Chetaev条件的情况

2.1.1 必要性——由Hamilton驻值原理推导运动方程

Hamilton原理的泛函为

$$\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}L(q_1, \dot{q}_1, t)dt \tag{2.4}$$

其附加条件为

$$f_{\beta}(q_{1s}, \dot{q}_{1s}, t)=0 \tag{2.5}$$

或者

$$\dot{q}_{1\,\varepsilon+\beta}=\varphi_{\beta}(q_s, \dot{q}_{1\sigma}, t) \tag{2.6}$$

将Π_1变分，并令$\delta\Pi_1=0$，则有

$$\delta\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1s}}\delta q_{1s}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1s}}\delta\dot{q}_{1s}\right)dt=0 \tag{2.7}$$

其附加条件变换为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial\dot{q}_{1s}}\delta q_{1s}=0 \qquad \text{(Appell-Chetaev条件)} \tag{2.8}$$

或者

$$\delta q_{1\,\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}\delta q_{1\sigma}\qquad (\text{Appell-Chetaev条件}) \tag{2.9}$$

引入Lagrange乘子μ_β，将附加条件(2.8)纳入泛函(2.7)中，则有

$$\delta\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1s}}\delta q_{1s}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1s}}\delta\dot{q}_{1s}\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{1s}}\delta q_{1s}\right]dt=0 \tag{2.10}$$

经分部积分并假设存在边界条件

$$\delta q_{1s}=0\qquad (t=t_0\text{或者}t=t_1) \tag{2.11}$$

则(2.10)式可以变换为

$$\delta\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1s}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{1s}}\right)\delta q_{1s}dt=0 \tag{2.12}$$

由于引入Lagrange乘子，使得δq_{1s}相互独立，故得驻值条件

$$\frac{\partial L}{\partial q_{1s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1s}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{1s}}=0 \tag{2.13}$$

方程(2.13)即所谓真实轨道方程，它表示泛函Π_1取驻值的必要条件。

我们亦可用代入法来处理问题。

经分部积分，并考虑到边界条件(2.11)，可将(2.7)式变换为

$$\delta\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}\right)\delta q_{1\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1\,\varepsilon+\beta}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\,\varepsilon+\beta}}\right)\delta q_{1\,\varepsilon+\beta}\right]dt=0 \tag{2.14}$$

将(2.9)式代入(2.14)式，可得

$$\delta\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[\frac{\partial L}{\partial q_{1\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1\,\varepsilon+\beta}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\,\varepsilon+\beta}}\right)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}\right]\delta q_{1\sigma}dt=0 \tag{2.15}$$

由于$\delta q_{1\sigma}$的独立性，故由上式可得泛函Π_1的驻值条件

$$\frac{\partial L}{\partial q_{1\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1\,\varepsilon+\beta}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\,\varepsilon+\beta}}\right)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}=0 \tag{2.16}$$

方程(2.16)亦为真实轨道方程。

2.1.2　充分性——由运动方程推导Hamilton原理的泛函

将方程(2.13)乘以δq_{1s}，相加并积分，可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1s}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{1s}}\right)\delta q_{1s}\,dt=0 \tag{2.17}$$

经分部积分，并考虑到边界条件(2.11)，(2.17)式可以变换为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1s}}\delta q_{1s}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1s}}\delta\dot{q}_{1s}\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{1s}}\delta q_{1s}\right]dt=0 \tag{2.18}$$

应用附加条件(2.8)，则(2.18)式变换为

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1s}}\delta q_{1s}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1s}}\delta\dot{q}_{1s}\right)dt=0 \tag{2.19}$$

(2.19)式可以处理为一个泛函的驻值问题，

$$\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1} L(q_1,\ \dot{q}_1,\ t)dt \tag{2.4}$$

其附加条件为(2.5)式。

类似如上的做法，将(2.16)式乘以$\delta q_{1\sigma}$，相加并积分，可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{e}\left[\frac{\partial L}{\partial q_{1\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{1\sigma}}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1\ e+\beta}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{1\ e+\beta}}\right)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_{1\sigma}}\right]\delta q_{1\sigma}dt=0 \tag{2.20}$$

经分部积分，并考虑到边界条件(2.11)，则(2.20)式可以变换为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{\sigma=1}^{e}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1\sigma}}\delta q_{1\sigma}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{1\sigma}}\delta \dot{q}_{1\sigma}\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial q_{1\ e+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{e}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_{1\sigma}}\delta q_{1}\right.$$

$$\left.+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{1\ e+\beta}}\ \frac{d}{dt}\ \sum_{\sigma=1}^{e}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_{1\sigma}}\delta q_{1\sigma}\right]dt=0 \tag{2.21}$$

应用附加条件(2.9)，则(2.21)式变换为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{\sigma=1}^{e}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1\sigma}}\delta q_{1\sigma}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{1\sigma}}\delta \dot{q}_{1\sigma}\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1\ e+\beta}}\delta q_{1\ e+\beta}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{1\ e+\beta}}\delta \dot{q}_{1\ e+\beta}\right)\right]dt=0 \tag{2.22}$$

(2.22)式可以处理为一个泛函的驻值问题

$$\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1} L(q_1,\ \dot{q}_1,\ t)dt \tag{2.4}$$

其附加条件为(2.9)式.

2.2 不应用Appell-Chetaev条件的情况

2.2.1 必要性——由Hamilton驻值原理推导运动方程

Hamilton原理的泛函为

$$\Pi_2=\int_{t_0}^{t_1} L(q_2,\ \dot{q}_2,\ t)dt \tag{2.23}$$

其附加条件为

$$f_\beta(q_2,\ \dot{q}_2,\ t)=0 \tag{2.24}$$

将Π_2变分，并令$\delta\Pi_2=0$，则有

$$\delta\Pi_2=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{2s}}\delta q_{2s}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{2s}}\delta \dot{q}_{2s}\right)dt=0 \tag{2.25}$$

其附加条件变换为

$$\delta f_\beta=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_{2s}}\delta q_{2s}+\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_{2s}}\delta \dot{q}_{2s}\right)=0 \tag{2.26}$$

引入 Lagrange乘子μ_β，将附加条件(2.26)纳入泛函(2.25)中，则有

$$\delta\Pi_2=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{2s}}\delta q_{2s}+\ +\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{2s}}\delta \dot{q}_{2s}\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_{2s}}\delta q_{2s}+\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_{2s}}\delta \dot{q}_{2s}\right)\right]dt=0$$

经分部积分，并假设存在边界条件

$$\delta q_{2s}=0 \qquad (t=t_0\text{或者}t=t_1) \tag{2.28}$$

则(2.27)式以可变换为

$$\delta\Pi_2=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_{2s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_{2s}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_{2s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_{2s}}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_{2s}}\right]\delta q_{2s}dt=0 \tag{2.29}$$

由于引入Lagrange乘子，使得δq_{2s}相互独立，故由(2.29)式可得泛函的驻值条件

$$\frac{\partial L}{\partial q_{2s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_{2s}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_{2s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_{2s}}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_{2s}}=0 \tag{2.30}$$

方程(2.30)即所谓测地轨道方程，它表示泛函Π_2取驻值的必要条件.

2.2.2 充分性——由运动方程推导Hamilton原理的泛函

将(2.30)式乘以δq_{2s}，相加并积分，可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_{2s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_{2s}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_{2s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_{2s}}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_{2s}}\right]\delta q_{2s}dt=0 \tag{2.31}$$

经分部积分，并考虑到边界条件(2.28)，可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{2s}}\delta q_{2s}+\frac{\partial L}{\partial \dot q_{2s}}\delta\dot q_{2s}\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_{2s}}\delta q_{2s}+\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_{2s}}\delta\dot q_{2s}\right)\right]dt=0 \tag{2.32}$$

应用附加条件(2.26)，则(2.32)式变换为

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{2s}}\delta q_{2s}+\frac{\partial L}{\partial \dot q_{2s}}\delta\dot q_{2s}\right)dt=0 \tag{2.33}$$

可以将(2.33)式处理为一个泛函的驻值问题

$$\Pi_2=\int_{t_0}^{t_1}L(q_2,\ \dot q_2,\ t)dt \tag{2.23}$$

其附加条件为(2.24)式.

三、几点说明

3.1 关于条件(1.3)和(1.4)

我们在文[18]中曾经导出关系式

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}=\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s} \tag{3.1}$$

可见，在(3.1)成立的情况下，条件(1.3)必成立. 因此，(3.1)式与条件(1.3)是吻合的.

若将约束方程(2.1)变换为约束方程(2.3)，则(3.1)变换为

$$\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_s}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot q_s}\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot q_\sigma} & (s=\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon) \quad (3.2a)\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}=0 & (s=\varepsilon+\beta=\varepsilon+1,\ \varepsilon+2,\ \cdots,\ n) \quad (3.2b)\end{cases}$$

考虑到在条件(1.4)中[10]

$$A_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}-\sum_{\nu=1}^{g}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\nu}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma} \tag{3.3}$$

因此，在(3.2)成立的情况下，条件(1.4)必成立．可见，(3.2)式与条件(1.4)是吻合的．

指这里出，(3.1)和(3.2)的成立是应用Appell-Chetaev条件的结果．因此，对于Appell-Chetaev型的非完整约束，在推导动力学方程时，(3.1)和(3.2)成立，条件(1.3)和(1.4)也成立．

3.2 关于泛函(1.1)和(1.2)

多年来，有一个问题使学术界困惑，对于泛函

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s\right]dt=0 \tag{3.4}$$

能否将变分号提到积分号之外．其实，这个问题并不难解决．研究表明，对非完整约束方程f_β应用Appell-Chetaev条件，能使之变为可积．假设使f_β变换为（按照传统的做法，虽然此时f_β已由不可积变为可积，但仍用f_β来表示）

$$f_\beta=\frac{d}{dt}F_\beta=\dot{F}_\beta \tag{3.5}$$

则(3.4)变换为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\dot{F}_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s\right]dt=0 \tag{3.6}$$

考虑到

$$\dot{F}_\beta=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial F_\beta}{\partial t} \tag{3.7}$$

可得

$$\frac{\partial\dot{F}_\beta}{\partial\dot{q}_s}=\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s} \tag{3.8}$$

将(3.8)代入(3.6)，则有

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\delta q_s\right]dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[L+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta F_\beta\right]dt=0 \tag{3.9}$$

因此，对于非完整系统，和完整系统一样，也可以写出

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}L dt \tag{3.10}$$

上式表明，泛函(1.1)和(1.2)都定义了变分学中的求定积分形式的泛函

$$\int_{t_0}^{t_1}L dt \tag{3.11}$$

的驻值的问题．

如上所述，通过应用Appell-Chetaev条件，使约束方程变为可积，那么，这是否意味着非完整约束将变为完整约束呢？答案是否定的，

应用Appell-Chetaev条件，可以导出封闭的微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q_s}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\underbrace{\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\dfrac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}}_{\text{广义约束力}}=0 & (3.12a)\\ f_\beta=(q,\ \dot{q},\ t)=0 & (3.12b)\end{cases}$$

不应用Appell-Chetaev条件，可以导出封闭的微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q_s}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\underbrace{\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\dfrac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\dfrac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}}_{\text{广义约束力}}=0 & (3.13a)\\ f_\beta(q,\ \dot{q},\ t)=0 & (3.13b)\end{cases}$$

比较(3.12)和(3.13)，它们都具有不可积分的微分约束，即约束方程(3.12b)和(3.13b)是相同的非完整约束方程。但是，在动力学方程中，它们具有不同的广义约束力。文献[18]指出，(3.12a)中的广义约束力是理想约束力，而(3.13a)中的广义约束力是非理想约束力。因此，通过应用Appell-Chetaev条件，只能使非理想约束变为理想约束，而不能使非完整约束变为完整约束。

参考文献

[1] H. Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik in Neuem Zusammenhange Dargestllt*, Leibzig (1893).

[2] O. Hölder, Nachrichten. Kön. der Wissenchaften zu Göttingen, *Math.-Phys.*, (2) (1896), 122—157.

[3] Г. К. Суслов, Оъ одномъ видоизмененіи начала Даламбера, *Матем. Сб.*, 22(4) (1901), 681—697.

[4] П. В. Воронец, Оъ уравненияхъ движения для неголономныхъ системъ, *Матем Сб.*, 22(4) (1901), 659—680.

[5] R. S. Capon, Hamilton principle on relation to nonholonomic mechanical systems, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 5(4) (1952), 472—480.

[6] H. Jeffreys, What is Hamilton principle, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 7(3) (1954), 335—337.

[7] L. A. Pars, Varaition principles in dynamics, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 7(3) (1954), 338—351.

[8] M. Kerner, Le principe de Hamilton et l'holonomisme, *Prace Mat-Fiz. (Warszawa)*, 38 (1931), 1—21.

[9] Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев, *Динамика Неголономных Систем*, М., «Наука» (1967).

[10] В. В. Зумянцев, О принципе Гамильтона для неголономных систем, *ПММ*, 42(3) (1978), 387—399.

[11] В. В. Зумянцев, Об интегральных принципах для неголомных систем, *ПММ*, 46(1) (1982), 1—12.

[12] C. Lanczos, *Variational Principles of Mechanics*, University of Toronto Press

(1962).

[13] 钱伟长，《变分法及有限元》，科学出版社 (1980).

[14] 胡海昌，《弹性力学变分原理及其应用》，科学出版社 (1981).

[15] K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press (1982).

[16] J. T. Oden, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York (1983).

[17] 梅凤翔，《非完整系统力学基础》，北京工学院出版社 (1985).

[18] 梁立孚、石志飞，非完整系统分析动力学中的几个重要问题，应用数学和力学，14(12) (1993), 1057—1067.

The Stationary Value Property of Hamilton's Principle in Non-Holonomic Systems

Liang Lifu

(*Harbin Engineering University, Harbin* 150001, *P. R. China*)

Liang Zhonghong Shi Zhifei

(*Harbin Institute of Technology, Harbin* 150001, *P. R. China*)

Abstract

This paper proves that Hamilton's principle of both using the Appell-Chetaev condition and not using the Appell-Chetaev condition is the variational principle of stationary action. The relevant problems are discussed.

Key words variational principle, non-holonomic system, stationary action, analytical dynamics