应用数学和力学，第18卷 第12期（1997年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

多奇点Liénard型系统解振动的充要条件*

孙继涛[1]　　张银萍[1]

（戴世强推荐，1995年9月6日收到，1997年3月26日收到修改稿）

摘　要

本文在较宽的条件下，对含多个奇点的Liénard型系统

$$\dot{x}=h(y)-F(x),\ \dot{y}=-g(x)$$

解的振动性进行了研究，给出了解振动的充要条件，推广和改进了文[1～4]的结果。

关键词　Liénard型系统　振荡解　充要条件

一、引　　言

关于Liénard系统

$$\dot{x}=y-F(x),\ \dot{y}=-g(x) \tag{1.1}$$

解的振动问题，J. R. Graef在文[1]及G. Villari在文[2]中得到了在一定条件下，系统(1.1)的解振动的充要条件。

对一般的Liénard型系统

$$\dot{x}=h(y)-F(x),\ \dot{y}=-g(x) \tag{1.2}$$

韩茂安在文[3]中给出了系统(1.2)有唯一奇点时，解振动的充分条件。然而，许多实际系统往往具有多个奇点，因此，近年来对多奇点系统的定性研究已引起了国内外学者的极大兴趣[4~10]。作者在文[4]中曾对含多个奇点的Liénard型系统(1.2)的解之振动性进行了研究，给出了其解振动的充要条件。

本文均设$F(x)$，$g(x)$，$h(x)$连续且保证系统(1.2)的解之存在唯一性，并且

$$h(\pm\infty)=\pm\infty,\ h'(y)\geqslant 0\quad (\text{等号仅在可列个点上成立}) \tag{1.3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sup F(x)>-\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\inf F(x)<+\infty \tag{1.4}$$

再设(A)：系统(1.2)只有均在有界区域$D_1\subset D_2=\{(x,y)\mid |x|<a,\ |y|<+\infty\}$内的奇点，且构成指标+1的不稳定奇点系或奇点—环系[7]，$g(x)=0$的最大根$R_2\geqslant 0$，最小根$R_1\leqslant 0$，$O(0,0)\in D_1$。

记　$G(x)=\int_0^x g(s)ds$，$F_+(x)=\max\{0,\ F(x)\}$，$F_-(x)=\max\{0,\ -F(x)\}$

---

* 冶金部基础科学研究基金资助项目

1 上海铁道大学数学室，上海 200333

$$\Gamma_+(x)=\int_0^x(1+F_+(s))^{-1}g(s)ds,\ \Gamma_-(x)=\int_0^x(1+F_-(s))^{-1}g(s)ds$$

显然$F_+(x)\geqslant 0$，$F_-(x)\geqslant 0$，且还有$R_1>-a$，$R_2<a$.

二、引理及证明

引理1 如果假设(1.3)及(A)成立，且系统(1.2)从$\bar{D}_1$外出发的解振动，则有$|x|\geqslant a$时，$xg(x)>0$。

证明 首先由假设(1.3)及(A)知，$g(x)$在$|x|\geqslant a$时无零点. 现用反证法证明$xg(x)>0$在$|x|\geqslant a$时成立. 若不然，则有

(i) $x\geqslant a$时$g(x)<0$和(ii) $x\leqslant -a$时$g(x)>0$.

先证(i)不成立. 若(i)成立，取$y_0>0$使得$h(y_0)-F(a)>0$，且$(a,\ y_0)\in\bar{D}_1$. 考察系统(1.2)从$(a,\ y_0)$出发的轨线. 由于$x\geqslant a$时，$\dot{y}>0$即有$y(t)\geqslant y_0$，故此轨线不可能不与直线$x=a$相交而先与x轴相交. 现再证此轨线不可能与$x=a$相交从而也不会与y轴相交. 由于从$(a,\ y_0)$出发的系统(1.2)的轨线有$y(t)\geqslant y_0$，从而由(1.3)知，$\dot{x}=h(y)-F(a)>0$，因此轨线不可能从右向左穿过直线$x=a$，从而也不与y轴相交. 综上所述，系统(1.2)从$(a,\ y_0)$出发的解不振动，与引理1的假设矛盾，因此(i)不成立，同理可证(ii)不成立. 故引理1证毕.

引理2 如假设(1.3)及(A)成立，且系统(1.2)从$\bar{D}_1$外出发的解振动，则

$$\lim_{x\to+\infty}\sup[\Gamma_-(x)+F(x)]=+\infty \tag{2.1}$$

和

$$\lim_{x\to-\infty}\inf[\Gamma_+(x)-F(x)]=+\infty \tag{2.2}$$

成立.

证明 由引理2的假设和引理1知，$|x|\geqslant a$时有$xg(x)>0$. 现证(2.1)必成立. 用反证法. 设(2.1)不成立，则存在H，使得当$x\geqslant a$时，$|F(x)|<H$，$\sup\limits_{x\geqslant a}\Gamma_-(x)<H$.

由于$(1+F_-(x))^{-1}>(1+H)^{-1}$，因此

$$\int_a^{+\infty}(1+H)^{-1}g(s)ds\leqslant\int_a^{+\infty}(1+F_-(s))^{-1}g(s)ds<H$$

故$G(x)=\int_0^x g(s)ds$有界.因此，存在$M>1$，使得$x\in[0,\ +\infty)$时，$F(x)<M$和$G(x)<M$.由于$h(+\infty)=+\infty$，故存在Y，使得$y\geqslant Y$时，$h(y)>2M$，又$G(x)$有界，故存在$x_0\gg a$，使得

$$\int_{x_0}^{+\infty}g(s)ds<1$$

令$y_0=Y+M$，现证系统(1.2)从$(x_0,\ y_0)$出发的轨线当$t\geqslant 0$时均有$y\geqslant Y$.若不然，设$T>0$为首次使$y(t)$达到Y者，当$t\in[0,\ T)$时$y(t)>Y$，$y(T)=Y$，此时$h(y)-F(x)\geqslant M$，由(1.2)知，$x(T)>x(0)$且

$$y(T)-y(0)=\int_{x(0)}^{x(T)}\frac{-g(x)}{h(y)-F(x)}dx>-\frac{1}{M}\int_{x(0)}^{x(T)}g(s)ds>-\frac{1}{M}$$

又$y(T)-y(0)=Y-(Y+M)=-M$，故$M^2<1$与$M>1$矛盾.故从(x_0, y_0)出发的系统(1.2)的轨线均有$y(t)\geqslant Y$，$t\geqslant 0$. 从而$\dot{x}>M$，$x(t)>x(t_1)\exp\{M(t-t_1)\}$，与(1.2)的解振动矛盾. 因此(2.1)成立，同理可证(2.2)也成立. 引理2证毕.

引理3 若$|x|\geqslant a$时，$xg(x)>0$且(1.3)、(1.4)和(2.1)成立，则系统(1.2)从$(x_0, y_0)\in\{(x,y)|h(y)-F(x)>0, x\geqslant a\}$出发的轨线与曲线$h(y)=F(x)$在$x>x_0$部分(记为$c^+=\{(x, y)|h(y)=F(x)$且$x>x_0\}$)相交；

若$|x|\geqslant a$时，$xg(x)>0$且(1.3)、(1.4)和(2.2)成立，则系统(1.2)从$(x_0, y_0)\in\{(x, y)|h(y)-F(x)<0, x\leqslant -a\}$出发的轨线与曲线$h(y)=F(x)$在$x<x_0$部分（记为$c^-=\{(x, y)|h(y)=F(x)$且$x<x_0\}$)相交.

证明 先证引理3的第一部分. 条件(2.1)可分为两种情况考虑.

1) 如$\lim\limits_{x\to+\infty}\sup F(x)=+\infty$. 考虑系统(1.2)从$(x_0, y_0)\in\{(x, y)|h(y)-F(x)>0, x\geqslant a\}$出发的轨线. 由于$x\geqslant a$，$h(y)-F(x)>0$时，系统(1.2)的轨线的斜率

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-g(x)}{h(y)-F(x)}<0$$

而当$x\geqslant a$时，$F(x)$无界且(1.3)成立，因此，系统(1.2)从(x_0, y_0)出发的轨线必与曲线c^+相交.

2) 如 $$\lim_{x\to+\infty}\Gamma_-(x)=+\infty \tag{2.3}$$

反证法.如果从(x_0, y_0)出发的系统(1.2)之正半轨线不与c^+相交，与文[11]类似可证，当$t\to T^-(0\leqslant T\leqslant+\infty)$时，$x(t)\to+\infty$，又此时$F(x(t))<h(y(t))$即$\dot{x}>0$，从而$\dot{y}<0$，即有$h(y(t))\leqslant h(y_0)$，因此$t\geqslant 0$时，有

$$F(x(t))<h(y(t))\leqslant h(y_0),\qquad t\geqslant 0 \tag{2.4}$$

故
$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=h(y(t))-F(x(t))\leqslant h(y_0)-F_+(x(t))+F_-(x(t))\\&\leqslant h(y_0)+F_-(x(t))\leqslant k[1+F_-(x(t))]\end{aligned}$$

这里$k=\max\{1, h(y_0)\}$，从而

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-g(x)}{h(y)-F(x)}\leqslant\frac{-g(x)}{k[1+F_-(x)]}$$

从$x=x_0$到$x=x(t)$积分得

$$y(x)-y_0\leqslant-\frac{1}{k}\int_{x_0}^{x}(1+F_-(s))^{-1}g(s)ds \tag{2.5}$$

由于$t\to T^-$时$x(t)\to+\infty$，故由(2.3)与(2.5)知，此时$y\to-\infty$.

注意到(1.3)与(2.4)式，得到此时

$$\lim_{x\to+\infty}\sup F(x)\leqslant-\infty$$

与假设(1.4)矛盾. 故当(2.3)式成立时，引理3的第一部分也成立. 综上所述，引理3的第一部分成立. 类似可证引理3的第二部分. 故引理3证毕.

引理4 如$|x|\geqslant a$时，$xg(x)>0$且(1.3)、(1.4)、(2.1)和(A)成立，则系统(1.2)从$(x_0, y_0)\in\{(x, y)|h(y)-F(x)=0, x\geqslant a\}$出发的轨线必与$y$轴交于$\bar{D}_1$的下方；

如$|x|\geqslant a$时，$xg(x)>0$，且(1.3)、(1.4)、(2.2)和(A)成立，则系统(1.2)从$(x_0, y_0)\in\{(x, y)|h(y)-F(x)=0, x\leqslant -a\}$出发的轨线必与$y$轴交于$\bar{D}_1$的上方.

证明 只证第一部分，第二部分类似可证.

由于从(x_0, y_0)出发的系统(1.2)的轨线之斜率是有界的且$\dot{x}<0$，$\dot{y}<0$($x>R_2$时)，从而它不能以$x=l(l\geqslant R_2)$为垂直渐近线，因此它必与直线$x=R_2$交于$P_1(R_2, y_1)$. 由于$R_1\leqslant x\leqslant R_2$时，$F(x)$和$g(x)$均有界，由设(1.3)知，存在$y_2<y_1$，$y_2<0$，使得当$|y|\geqslant|y_2|$，$x\in[R_1, R_2]$时，系统(1.2)轨线的斜率$|dx/dy|<N$. 过$P_2(R_2, y_2)$作斜率为$N$的直线交$x=R_1$于$P_3(R_1, y_3)$，因为$\dot{x}<0$，因此(1.2)的轨线与直线段$\overline{P_2P_3}$相交时从右向左穿过它. 又由于(A)成立，故从$P_1(R_2, y_1)$出发的系统(1.2)的正半轨线必与$y$轴交于$\bar{D}_1$的下方. 综上所述，引理4的第一部分成立. 故引理4成立.

引理5 若$|x|\geqslant a$时，$xg(x)>0$且(1.3)、(1.4)、(2.1)和(A)成立，则从y轴上$\bar{D}_1$上方出发的系统(1.2)的正半轨线必与直线$x=R_2$交于$\bar{D}_1$的下方，从而再与y轴交于$\bar{D}_1$的下方；

若$|x|\geqslant a$时，$xg(x)>0$且(1.3)、(1.4)、(2.2)和(A)成立，则从y轴上$\bar{D}_1$下方出发的系统(1.2)的正半轨线必与直线$x=R_1$交于$\bar{D}_1$的上方，从而再与y轴交于$\bar{D}_1$的上方.

证明 先证第一部分.

由引理4证明的后半部分及(A)知，从y轴上$\bar{D}_1$上方出发的系统(1.2)的轨线或者与直线$x=a$相交于曲线$h(y)-F(x)=0$的上方，此时由引理3和引理4知引理5成立；或者此轨线在带域$\{(x, y)|R_2\leqslant x\leqslant a, |y|<+\infty\}$内与曲线$h(y)-F(x)=0$相交然后与$x=R_2$交于$\bar{D}_1$的下方，最后再与$y$轴交于$\bar{D}_1$的下方. 第一部分成立，第二部分类似可证. 引理5证毕.

三、结　　论

定理 若设(1.3)、(1.4)及(A)成立，则系统(1.2)从$P_0\in\bar{D}_1$出发的解振动的充要条件是$|x|\geqslant a$时，$xg(x)>0$和(2.1)与(2.2)成立.

证明 必要性由引理1和引理2得到. 充分性由引理3～5即得. 证毕.

推论 若设(1.4)成立，且Liénard系统(1.1)只有均在有界区域$D_3\subset D_2$内的奇点，并构成指标+1的不稳定奇点系或奇点一环系，则系统(1.1)从$P_0\in\bar{D}_3$出发的解振动的充要条件是$|x|\geqslant a$时，$xg(x)>0$和(2.1)与(2.2)成立.

文[1～4]研究系统(1.1)或(1.2)的解之振动性时，均要求$|x|\geqslant k$时$xg(x)>0$和$xF(x)>0$，即要求$x\geqslant k>0$时$F(x)$有下界和$x\leqslant -k$时$F(x)$有上界并且$xg(x)>0$ ($|x|\geqslant k$时) 是系统的解振动的充分条件之一.

本文不仅在较宽的条件下，即不要求$F(x)$($x\gg 1$时)有下界和$+F(x)$($-x\gg 1$时)有上界的假设下，给出了含多个奇点的Liénard型系统(1.2)的解振动的充要条件，而且还证明了$xg(x)>0$($|x|\geqslant k$时)也是解振动的必要条件. 从而，推广和改进了文[1～4]的结果.

参 考 文 献

[1] J. R. Graef, On the Generalized Liénard equation with negative damping, *J. Diff. Equs.*, **12** (1972), 34—62.

[2] G. Villari, On the qualitative behaviour of solutions of Liénard equation, *J. Diff. Equs.*, **67** (1987), 269—277.

[3] 韩茂安，关于方程$\dot{x}=\varphi(y)-F(x)$，$\dot{y}=-g(x)$的周期解：无界解及振荡解，南京大学学报数学半年刊，**1** (1984)，89—101.

[4] 孙继涛，系统 $\dot{x}=h(y)-F(x)$，$\dot{y}=-g(x)$的解振动的充要条件，南京大学学报数学半年刊，9 (1992), 113—119.

[5] 李继彬，平面三次系统的一类极限环分布，中国科学（A辑），(7) (1984), 586—596.

[6] A. Sandquist and K. M. Andersen, A necessary and sufficient condition for the existence of unique nontrivial periodic solution to a class of equations of Liénard type, *J. Diff. Equs.*, 46 (1982), 356—378.

[7] 王现，关于Liénard型系统之极限环的注，数学季刊，5 (1990), 122—130.

[8] 孙继涛，Liénard 型系统解的有界性及极限环的存在性，高校应用数学学报，7 (1992), 184—191.

[9] 韩茂安，具有多个奇点的微分方程的全局性质，数学学报，33 (1990), 684—693.

[10] 孙继涛，Liénard型系统的定性行为，数学物理学报，14 (1994), 90—95.

[11] T. Hara and T. Yoneyama, On the global center of generalized Liénard equation and its application to stability problems, *Fnnkical. Ekvac.*, 28 (1985), 171—192.

[12] G. Villari and F. Zanolin, On a dynamical system in the Liénard plane, necessary and sufficient conditions for the intersection with the vertical isocline and applications, *Fnnkical. Ekvac.*, 33 (1990), 19—38.

A Necessary and Sufficient Condition for the Oscillation of Solutions of Liénard Type System with Multiple Singular Points

Sun Jitao Zhang Yinping

(*Shanghai Tiedao University, Shanghai* 200333, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, a necessary and sufficient condition for the solution of Liénard type system with multiple singular points to oscillation under the more general assumption is given. Results of papers [1—4] are also extended and improved in this paper.

Key words Liénard type system, oscillation solution, necessary and sufficient condition