

# 关于非均匀圆柱型正交各向异性 圆板材料性质的研究

秦圣立<sup>1</sup> 阎柯柱<sup>1</sup> 胡象岭<sup>1</sup> 黄家寅<sup>1</sup>

(何福保推荐, 1995年7月14日收到, 1997年6月9日收到修改稿)

## 摘 要

在我们已发表的一文中, 根据梁的弯曲理论得到了非均匀圆柱型正交各向异性圆板的折算刚度随半径按指数变化的规律。

本文的目的在于进一步证明半径对材料性质的影响。按照平面应力—应变关系, 我们得到材料性质的数值 $E_r$ ,  $E_\theta$ ,  $\nu_{\theta r}$ 是半径 $r$ 的函数。我们所得到的解析结果与实验结果是一致的。

**关键词** 非均匀圆柱型圆板 正交各向异性 过渡区 核径比 指数规律

## 一、引 言

Carrier 和 Ithaca<sup>[1]</sup>定性地说明了, 在圆柱型正交各向异性圆板的中心不可能假设是正交各向异性的。他们提出一种关于求解圆板在均匀压力作用下平面应力的渐近方法, 并假设圆板中心有一个各向同性的核, 这个核的半径是圆板半径的10%。在两个区域的交界面上他们引入了材料性质突变的概念。在连续介质中这种突变是不可能的, 故有必要研究半径对非均匀圆柱型正交各向异性圆板的材料性质的影响问题。Dhoopar和Sinha<sup>[2], [3]</sup>用细观力学和实验方法粗略地研究了圆柱型正交各向异性圆板的力学性质。他们在应变能等效原理的基础上导出了决定 $E_\theta$ ,  $E_r$ 和 $\nu_{\theta r}$ 的三个超越代数方程。因为这三个方程的复杂性不能得到关于 $E_\theta$ ,  $E_r$ 和 $\nu_{\theta r}$ 的闭合的表达式, 范赋群和董万林<sup>[4]</sup>用包络方法提出折算刚度随半径 $r$ 按线性变化的规律。我们根据梁的弯曲理论得到折算刚度随半径按指数变化的规律<sup>[5]</sup>, 并且我们知道, 当核径比 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 非均匀圆柱型正交各向异性圆板蜕化为均匀圆柱型正交各向异性圆板的情况<sup>[6]</sup>; 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 它蜕化为各向同性圆板的情况<sup>[6]</sup>。

## 二、 $E_\theta$ , $E_r$ 和 $\nu_{\theta r}$ 的表达式

非均匀圆柱型正交各向异性圆板的折算刚度<sup>[5]</sup>为:

1 曲阜师范大学物理系, 山东曲阜 273165

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= Q_{11}^* + \Delta Q_{11}^* \exp\left[-\frac{M}{EI} r\right] \\ Q_{22} &= Q_{22}^* + \Delta Q_{22}^* \exp\left[-\frac{M}{EI} r\right] \\ Q_{12} &= Q_{12}^* + \Delta Q_{12}^* \exp\left[-\frac{M}{EI} r\right] \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中,

$$\begin{aligned} Q_{11}^* &= \frac{E_r^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*}, \quad Q_{22}^* = \frac{E_{\theta}^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} \\ Q_{12}^* &= \frac{\nu_{\theta r}^* E_{\theta}^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} = \frac{\nu_{\theta r}^* E_r^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} \\ \Delta Q_{11}^* &= Q_{11}^0 - Q_{11}^*, \quad \Delta Q_{22}^* = Q_{22}^0 - Q_{22}^*, \quad \Delta Q_{12}^* = Q_{12}^0 - Q_{12}^* \\ Q_{11}^0 &= \frac{E_0}{1-\nu_0^2}, \quad Q_{22}^0 = \frac{E_0}{1-\nu_0^2}, \quad Q_{12}^0 = \frac{\nu_0 E_0}{1-\nu_0^2} \end{aligned}$$

$E_0, \nu_0$  是各向同性中心的杨氏模量和泊松比;  $E_r^*, E_{\theta}^*, \nu_{\theta r}^*$  和  $\nu_{r\theta}^*$  是直线正交各向异性区材料常数的数值。

在非均匀圆柱型正交各向异性区的任意处, 折算刚度与物质常数  $E_r, E_{\theta}$  和  $\nu_{\theta r}$  之间的关系可表为:

$$Q_{11} = \frac{E_r}{1-\nu_{\theta r} \nu_{r\theta}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{\theta}}{1-\nu_{\theta r} \nu_{r\theta}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{\theta r} E_r}{1-\nu_{\theta r} \nu_{r\theta}} = \frac{\nu_{r\theta} E_{\theta}}{1-\nu_{\theta r} \nu_{r\theta}} \quad (2.2)$$

将(2.2)式代入(2.1)式, 并注意到  $Q_{11}^*, Q_{22}^*, Q_{12}^*$  和  $\Delta Q_{11}^*, \Delta Q_{22}^*, \Delta Q_{12}^*$  的表达式, 我们得到:

$$\frac{E_r}{1-\nu_{\theta r} \nu_{r\theta}} = \frac{E_r^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \left( \frac{E_r^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \right) \exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right] \quad (2.3)$$

$$\frac{E_{\theta}}{1-\nu_{\theta r} \nu_{r\theta}} = \frac{E_{\theta}^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \left( \frac{E_{\theta}^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \right) \exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right] \quad (2.4)$$

$$\frac{\nu_{\theta r} E_{\theta}}{1-\nu_{\theta r} \nu_{r\theta}} = \frac{\nu_{\theta r}^* E_r^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \left( \frac{\nu_{\theta r}^* E_r^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \frac{\nu_0 E_0}{1-\nu_0^2} \right) \exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right] \quad (2.5)$$

或

$$\frac{\nu_{\theta r} E_r}{1-\nu_{\theta r} \nu_{r\theta}} = \frac{\nu_{\theta r} E_r^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \left( \frac{\nu_{\theta r} E_r^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \frac{\nu_0 E_0}{1-\nu_0^2} \right) \exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right] \quad (2.6)$$

其中,  $\varepsilon = E\pi h^4/64MC$  <sup>[5]</sup>,  $h$  是圆板厚度,  $C$  是圆板半径,  $M$  是作用于纤维上的缠绕力矩,  $E$  是纤维的杨氏模量。

求解联立代数方程组(2.3)~(2.6)式, 我们得到  $\nu_{\theta r}, \nu_{r\theta}, E_r, E_{\theta}$  的表达式为:

$$\nu_{\theta r} = \frac{\frac{\nu_{\theta r}^* E_r^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \left( \frac{\nu_{\theta r}^* E_r^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \frac{\nu_0 E_0}{1-\nu_0^2} \right) \exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right]}{\frac{E_r^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \left( \frac{E_r^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \right) \exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right]} \quad (2.7)$$

$$\nu_{r\theta} = \frac{\frac{\nu_{\theta r}^* E_r^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \left( \frac{\nu_{\theta r}^* E_r^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \frac{\nu_0 E_0}{1-\nu_0^2} \right) \exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right]}{\frac{E_{\theta}^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \left( \frac{E_{\theta}^*}{1-\nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \right) \exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right]} \quad (2.8)$$

$$E_r = (1 - \nu_{\theta r} \nu_{r\theta}) \left\{ \frac{E_r^*}{1 - \nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \left( \frac{E_r^*}{1 - \nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \right) \exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right] \right\} \quad (2.9)$$

$$E_\theta = (1 - \nu_{\theta r} \nu_{r\theta}) \left\{ \frac{E_\theta^*}{1 - \nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \left( \frac{E_\theta^*}{1 - \nu_{\theta r}^* \nu_{r\theta}^*} - \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \right) \exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right] \right\} \quad (2.10)$$

### 三、算 例

我们取文[3]中的数据:

玻璃纤维:  $E_f = 7.455 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu_f = 0.2$

Cy-230环氧树脂:  $E_m = 0.342 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu_m = 0.4$

直线正交各向异性区:  $E_r = 0.78 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $E_\theta = 3.80 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu_{\theta r} = 0.31$

我们将 Cy-230环氧树脂作为基体, 缠绕玻璃纤维制成的复合材料圆板作为算例, 即取,

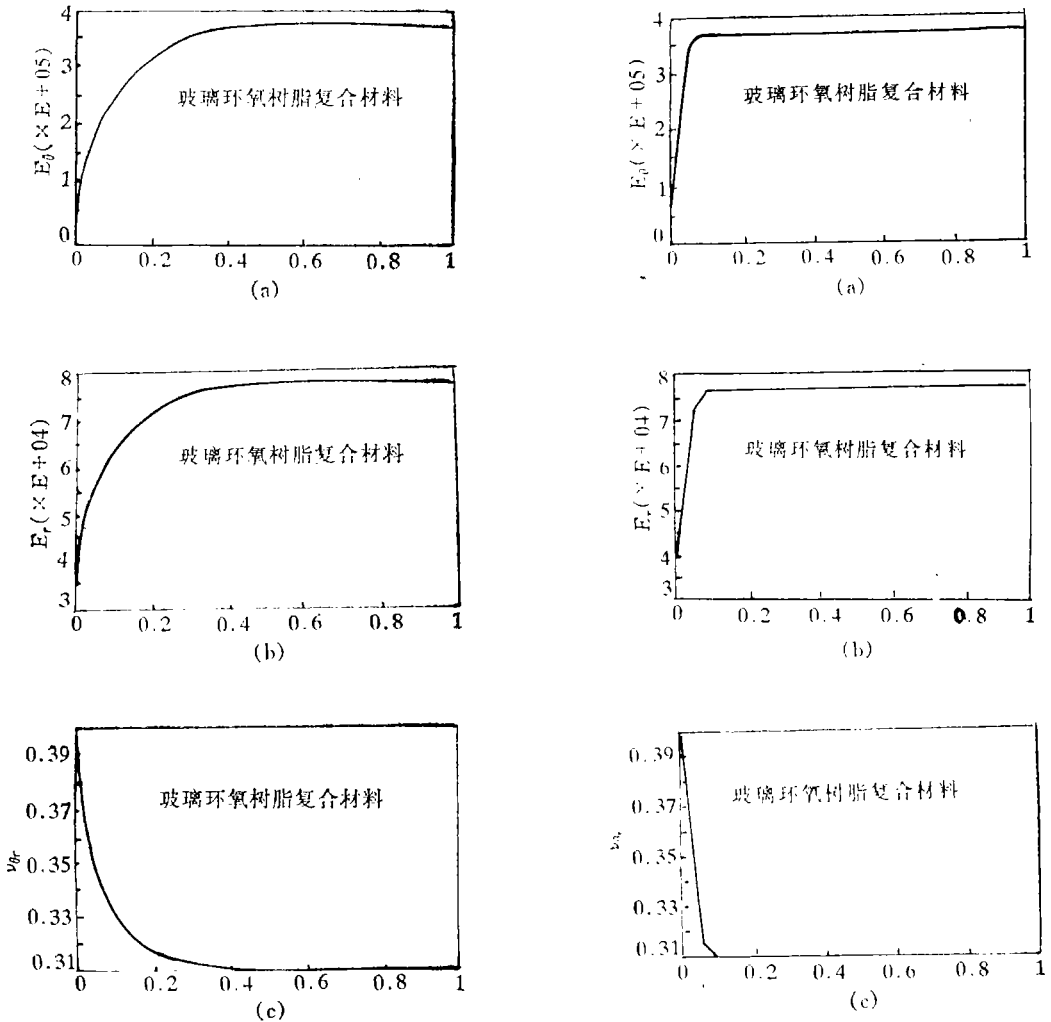


图 1

图 2

$$E_{\theta}^* = E_{\theta} = 3.80 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, E_r^* = 0.78 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_0 = E_m = 0.342 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, \nu_0 = \nu_m = 0.4, \nu_{\theta r}^* = 0.31$$

取圆板厚度为  $h=0.1\text{cm}$ , 圆板半径为  $C=100\text{cm}$ , 分别取核径比为  $e=0.1, 0.025$ .

根据方程(2.7), (2.9)和(2.10)式, 计算半径  $r$  对  $E_{\theta}$ ,  $E_r$  和  $\nu_{\theta r}$  的影响.  $e=0.1$  的情况由图1(a)、(b)和(c)所示,  $e=0.025$  的情况由图2(a)、(b)和(c)所示.

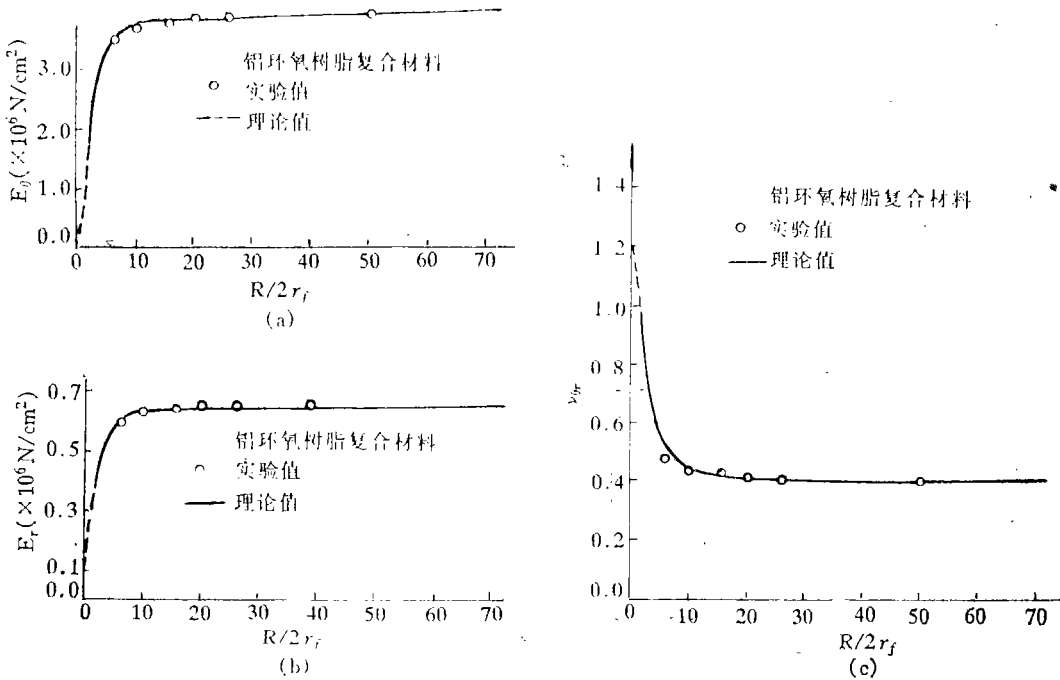


图 3

#### 四、结果和讨论

根据方程(2.7)、(2.9)和(2.10)式, 我们看出当  $e \rightarrow 0$  时, 非均匀圆柱型正交各向异性圆板蜕化为均匀圆柱型正交各向异性圆板的情况; 当  $e \rightarrow \infty$  时, 它蜕化为各向同性圆板的情况. 当给定  $e$  的某一值时, 我们将得到非均匀圆柱型正交各向异性圆板的情况. 我们把  $e$  值定义为核径比  $\lambda$ , 即  $e = \lambda$ , 如果取  $\lambda = 0.1$ , 我们得到具有核径比为  $\lambda = 0.1$  的非均匀圆柱型正交各向异性圆板的情况. 这种情况不同于 Carrier 和 Ithaca<sup>[1]</sup> 所假定的具有核径比为 10% 各向同性核的情况. 在两个区域的交界面上不存在材料性质的突变, 半径  $r$  对材料性质即  $E_r$ ,  $E_{\theta}$  和  $\nu_{\theta r}$  的影响从中心各向同性点到直线正交各向异性区是连续变化的. 我们的结果也不同于 Dhoopar 和 Sinha<sup>[2],[3]</sup> 的结果, 他们利用延长理论曲线的方法才得到  $E_{\theta}$ ,  $E_r$  和  $\nu_{\theta r}$  的中心附近的值. 根据  $E_{\theta}$ ,  $E_r$  和  $\nu_{\theta r}$  的表达式(2.7)、(2.9)和(2.10)式, 我们看出对于某一给定的  $e$  值, 整个区域中材料的性质由方程(2.7)、(2.9)和(2.10)完全决定.

根据方程(2.7)、(2.9)和(2.10)所得到的材料性质  $E_{\theta}$ ,  $E_r$  和  $\nu_{\theta r}$  的解析值, 当  $e=0.1$  和  $e=0.025$  时的曲线分别如图 1(a)、(b)、(c) 和图 2(a)、(b)、(c) 所示. 与 Dhoopar 和 Sinha<sup>[3]</sup> 所得到的如图 3(a)、(b)、(c) 的曲线所示的实验结果进行比较, 可以看出, 我们的结果与他们的实验结果是符合的.

## 参 考 文 献

- [ 1 ] G. F. Carrier and N. Y. Ithaca, Stress distribution in cylindrically aeolotropic plates, *J. Appl. Mech.*, 10(3) (1943), A117—A122.
- [ 2 ] B. L. Dhoopar and P. K. Sinha, A micro-mechanics study on the mechanical properties of cylindrically orthotropic composites, *Fibre Sci. Tech.*, 14(4) (1981), 261—278.
- [ 3 ] P. K. Sinha and B. L. Dhoopar, Effect of radius on material properties of cylindrically reinforced composite sheets: An experimental investigation, *Fiber Sci. Tech.*, 15(2) (1981), 117—125.
- [ 4 ] 范赋群、董万林, 非均匀圆柱型正交各向异性圆板的弯曲, 力学学报, 17(5) (1985), 461—471.
- [ 5 ] 秦圣立, 非均匀圆柱型正交各向异性圆板的弯曲问题, 应用数学和力学, 15(10) (1994), 911—918.
- [ 6 ] 何福保、沈亚鹏编著, 《板壳理论》, 西安交通大学出版社 (1993).

## An Investigation on Material Properties of Non-Homogeneous Cylindrically Orthotropic Circular Plates

Qin Shengli Yan Kezhu Hu Xiangling Huang Jiayin

(Qufu Normal University, Qufu, Shandong 273165, P. R. China)

### Abstract

It has been reported that the reduced stiffness of non-homogeneous cylindrically orthotropic circular plate varying exponentially with radius  $r$  is obtained by using the bending theory of a simple beam.

The aim of this paper is to verify the effect of radius on the material properties. According to the flat stress-strain relation, the values of material properties  $E_r$ ,  $E_\theta$  and  $\nu_{\theta r}$ , which are the functions of radius  $r$  are obtained. Compared with the experimental values, the analytical values of the material properties are in essential agreement with them.

**Key words** non-homogeneous cylindrical orthotropic circular plate, transitional region, core-radius ratio, exponential rule