

# 幂律非线性粘弹性材料中的裂纹扩展\*

张双寅<sup>1</sup> 熊电元<sup>1</sup>

(邬瑞锋推荐, 1995年10月25日收到; 1997年6月22日收到修改稿)

## 摘 要

对蠕变不可压幂律非线性粘弹性材料中裂纹的蠕变扩展进行了分析, 为描述银纹带中的力学行为, 假设在裂纹尖端邻域中断裂过程区中分布着抵抗裂纹张开的粘聚应力 $\sigma_f$ . 通过对均匀应力参考状态平凡解的摄动, 将非线性粘弹性问题化成线性问题处理. 对于幂指数 $n \cong 1$ 的弱非线性情况得到了应力与位移表达式. 提出断裂过程区局域能量判据, 导出了裂纹孕育时间 $t^*$ 与蠕变扩展率 $\dot{a}$ 的预测公式.

**关键词** 非线性粘弹性 蠕变不可压 摄动法 裂纹扩展 裂纹孕育时间

## 一、引 言

银纹损伤是高聚物材料特有的一类损伤断裂现象. 从微(细)观力学角度看, 银纹带的形成是从完好的连续体向裂纹发展过程中的一个中间状态. 在银纹区中仍有某种“藕断丝连”的微纤维存在, 对裂纹的形成与张开起抵抗作用. 此区可称为拟断裂区或断裂过程区. 因此, 这类问题比一般断裂问题更具复杂性.

粘弹性材料具有遗传积分型本构关系, 比同类弹性问题复杂得多. Knauss<sup>[1]</sup>首先研究了线性粘弹性材料的延迟断裂问题(Griffith问题). 后来, Schapery<sup>[2]</sup>处理了存在银纹带的线性粘弹性裂纹问题, 他不管银纹带材料的具体性质, 假设它是完全裂纹的延伸, 但作用着抵抗裂纹张开的断裂粘聚应力 $\sigma_f$ . He等人<sup>[3]</sup>基于塑性增量理论, 用摄动概念分析了幂律不可压材料的裂纹问题, 作者声称此法可用于蠕变裂纹问题. 但是, 不难看出, 由于文[3]所处理的材料模量 $\mu$ 是不随时间变化的常数, 严格而言, 其方法对蠕变问题是不适用的.

本文受文[2]、[3]的启发, 分析了具有幂律非线性粘弹不可压本构关系的裂纹体的断裂问题. 以均匀应力、应变场为参考状态进行摄动分析<sup>[3]</sup>, 将非线性问题简化成准各向同性体的线性粘弹性裂纹扩展问题, 得到了在远场张开型载荷 $q$ 和银纹区粘聚力 $\sigma_f$ 联合作用下的应力场的渐近解和裂纹面张开位移的渐近解表达式. 最后, 根据局域能量判据, 得出了预测裂纹起裂孕育时间和裂纹扩展速率的计算公式.

\* 国家自然科学基金资助课题.

<sup>1</sup> 中国科学院力学研究所, 北京 100080.

## 二、边值问题的描述

### 2.1 裂纹体构形

具有中心穿透裂纹的粘弹体如图 1 所示。承受垂直于裂纹面的对称载荷，裂纹面平行于  $x$  轴，处于  $y=0$  的  $x-z$  坐标面中。裂纹长度为  $2a(t)$ ，裂纹尖端处有微小的断裂过程区。此过程区的放大区示意于图 2。局部坐标原点固定在裂尖上；裂纹面的坐标为  $\xi=a(t)-x$ ，裂尖前方坐标为  $\xi_1=x-a(t)$ ，银纹区为  $0 \leq \xi \leq \alpha$ 。在银纹带上作用着粘聚应力  $\sigma_f(\xi, t)$ 。若令  $\sigma_f$  等于常值屈服应力，则这就是著名的 Dugdale 模型。

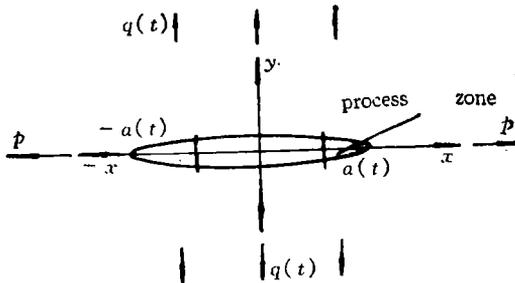


图1 平面裂纹体与受载构形

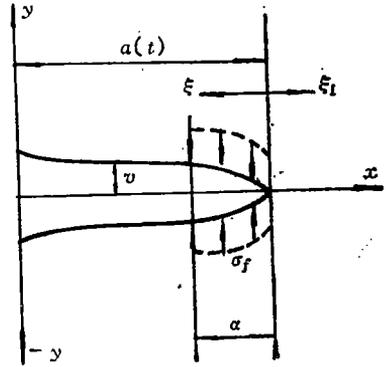


图2 裂尖断裂过程区示意图

### 2.2 材料本构关系

假设小变形，蠕变不可压，幂律非线性粘弹性蠕变型本构关系由下式表示：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \int_0^t D(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \cdot S_{ij} \right] d\tau \quad (2.1)$$

式中  $n \geq 1$  是独立的材料常数， $S_{ij}$  为应力偏量； $\sigma_0$  是具有应力量纲的参数，例如可取它为屈服应力。  $D(t-\tau)$  为遗传核函数，可由单轴蠕变试验测定。  $\sigma_e$  为有效应力，表示为：

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad (2.2)$$

指标  $i$  与  $j$  等于 1, 2, 3；服从张量指标加法规则。

### 2.3 边界条件

载荷条件：在无穷远边界， $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$

$$\sigma_{xx} = -T \leq 0 \quad (2.3a)$$

$$\sigma_{yy} = q(t) \geq 0 \quad (2.3b)$$

裂纹面条件：

$$y=0 \text{ 且 } |x| < a(t) - \alpha(t), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad (2.3c)$$

$$y=0 \text{ 且 } a(t) - \alpha(t) \leq |x| \leq a(t)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_f(\xi, t), \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (2.3d)$$

应该指出, 式(2.3a)表示在无穷远处作用均匀定常压应力, 在裂纹体产生均匀应力、应变场, 并且裂纹保持闭合, 此状态称为参考状态, 用上角标“\*”号表示, 式(2.3b)与(2.3d)表示 I 型外载和断裂过程区内的断裂粘聚应力, 二者联合作用构成对参考状态的摄动,

### 2.4 基本方程

由  $T, q(t)$  与  $\sigma_f(\xi, t)$  共同作用产生的力学场:

$$\bar{u}_i = u_i^* + \dot{u}_i \tag{2.4}$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^* + \varepsilon_{ij} \tag{2.5}$$

位移~应变关系:

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*), \text{ 且 } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.6}$$

不可压条件:

$$\bar{\varepsilon}_{ii} = \varepsilon_{ii}^* = \varepsilon_{ii} = 0, \bar{u}_{i,i} = u_{i,i}^* = u_{i,i} = 0 \tag{2.7}$$

应力场:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}, \text{ 或 } \bar{S}_{ij} = S_{ij}^* + S_{ij} \tag{2.8}$$

平衡条件:

$$\sigma_{ij,j}^* = 0 \text{ 及 } \sigma_{ij,j} = 0 \tag{2.9}$$

本节的边界条件(2.3)、几何条件(2.6)、(2.7)、平衡条件(2.9)连同本构关系(2.1)构成本文问题的完整的提法。

## 三、摄动分析

### 3.1 参考状态的建立

在  $t=0$  时刻施加  $x$  方向的均匀压应力  $P=P(t)=-TH(t)$  并令其保持恒定,  $H(t)$  为单位阶跃函数, 裂纹闭合、产生均匀应力场:

$$\sigma^*(t) = \sigma^* H(t), S_{ij}^*(t) = S_{ij}^* H(t) \text{ 与 } \sigma_{\theta}^*(t) = \sigma_{\theta}^* H(t) \tag{3.1}$$

其中下划“一”线的量为与时间无关的量, 因此有

$$\varepsilon_{ij}^*(t) = \frac{3}{2} \int_0^t D(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \left( \frac{\sigma_{\theta}^*}{\sigma_0} \right)^{n-1} \cdot \underline{S}_{ij}^* H(\tau) \right] d\tau = \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma_{\theta}^*}{\sigma_0} \right)^{n-1} \cdot \underline{S}_{ij}^* D(t) \tag{3.2}$$

$$\text{由于 } \varepsilon_{\theta} = \left[ \frac{2}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ 于是 } \varepsilon_{\theta}^*(t) = D(t) \left[ \frac{\sigma_{\theta}^*}{\sigma_0} \right]^{n-1} \sigma_{\theta}^* \tag{3.3}$$

所以表达式  $\varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{kl}^* / (\sigma_{\theta}^*)^2$  与时间无关。

对于平面应变,  $\varepsilon_{zz}^* = 0, \sigma_{zz}^* = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}^* + \sigma_{yy}^*)$ , 于是

$$\sigma_{xx}^* = -TH(t), \sigma_{yy}^* = 0, \sigma_{zz}^* = \frac{T}{2}H(t) \tag{3.4}$$

所以

$$\sigma_{\theta}^* = \frac{\sqrt{3}}{2} TH(t) \quad (T \geq 0) \tag{3.5}$$

应变场也是均匀的:

$$\varepsilon_{yy}^* = -\varepsilon_{zz}^* = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{\bullet\bullet}^*, \quad \varepsilon_{xz}^* = 0$$

且

$$\varepsilon_{\bullet\bullet}^* = \sigma_0 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{T}{\sigma_0} \right)^n D(t) \quad (3.6)$$

$D(t)$ 为蠕变柔量函数.

### 3.2 摄动应力与应变增量场

在上节建立的由  $P = -TH(t)$  作用引起的均匀参考场之上叠加上由  $\sigma_f$  与  $q(t)$  造成的摄动场, 产生增量应力  $\sigma_{ij}$  与增量应变  $\varepsilon_{ij}$ . 参考塑性增量理论<sup>[3]</sup>, 摄动场的应力偏量与应变之间的关系为:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma_{\bullet\bullet}^*}{\sigma_0} \right)^{n-1} \int_0^t D(t-\tau) \frac{\partial S_{ij}}{\partial \tau} d\tau = & \left[ \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{2}{3} \frac{1-n}{n} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{kl}^* (\varepsilon_{\bullet\bullet}^*)^{-2} \right] \varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (3.7)$$

式中  $\delta_{mn}$  为 Kronecker 记号; 此式与幂律硬化塑性增量应力~增量应变关系<sup>[3]</sup>. 式(3.7)等号右边前两项是弹性应变, 第3项为塑性应变.

对(3.7)式进行张量运算, 得到如下摄动状态关系式:

$$\varepsilon_{zz} = nc \int_0^t D(t-\tau) \frac{\partial S_{zz}}{\partial \tau} d\tau \quad (3.8a)$$

$$\varepsilon_{yy} = nc \int_0^t D(t-\tau) \frac{\partial S_{yy}}{\partial \tau} d\tau \quad (3.8b)$$

$$\varepsilon_{xy} = c \int_0^t D(t-\tau) \frac{\partial S_{xy}}{\partial \tau} d\tau \quad (3.8c)$$

式中

$$c = \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma_{\bullet\bullet}^*}{\sigma_0} \right)^{n-1} = \frac{3}{2} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{T}{\sigma_0} \right]^{n-1} \quad (3.9)$$

不难看出, (3.8)式并非精确的各向同性粘弹性本构关系, 处理上仍有较大难度. 对于许多弱非线性粘弹材料,  $n \leq 1$ , 引入记号  $\beta = c\sqrt{n}$ , (3.8)式可重写为式(3.10), 对弱非线性高聚物这是一个好的近似.

$$\varepsilon_{ij} = \int_0^t \beta \times D(t-\tau) \frac{\partial S_{ij}}{\partial \tau} d\tau \quad (3.10)$$

于是, 非线性粘弹性问题化成准线性粘弹性问题, 前人<sup>[2]</sup>的解法这里可以借用.

### 3.3 对应原理

由经典的弹性——粘弹性对应原理, 对于驻态裂纹问题(固定边值问题)粘弹性解可直接由对应的弹性问题求出, 然后通过拉普拉斯反变换获得原问题的解. 然而, 对于扩展裂纹情况, 事情并非如此直接了当. 为了研究粘弹性材料裂纹扩展问题, Graham<sup>[4]</sup>的扩充对应原理可以应用; 但要满足如下三个条件:

- 裂纹单调扩展, 而不发生闭合;
- 垂直于裂纹面的正应力 $\sigma_{yy}$ 与材料常数无关;
- 裂纹面张开位移可以分解为 $v=v_a(E, \nu)v_b(\xi_1, t)$ .

本文情况完全符合以上三个条件, 扩展的对应原理可以使用, 以下用右上角标字母“R”表示对应的弹性问题解, 在 $q(t)$ 与 $\sigma_f(\xi, t)$ 作用下, 相应弹性问题的应力 $\sigma_{yy}^R$ 有如下表达式:

$$\sigma_{yy}^R = \left\{ \frac{q\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi\xi_1}} - \frac{1}{\pi\sqrt{\xi_1}} \int_0^a \frac{\sqrt{\xi}\sigma_f(\xi)}{(\xi+\xi_1)} d\xi \right\} \cdot H(\xi_1) \quad (3.11)$$

$H(\xi_1)$ 为Heaviside函数; 当 $\xi \geq 0$ 时,  $H(\xi_1) = 1$ , 当 $\xi_1 < 0$ 时,  $H(\xi_1) = 0$  (请见图2).

根据粘聚应力 $\sigma_{yy}^R$ 在裂纹尖端有界的条件, 我们有:

$$q\sqrt{\pi a} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \frac{\sigma_f(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi}} \quad (3.12)$$

因此, 式(3.11)变为:

$$\sigma_{yy}^R = \frac{\sqrt{\xi_1}}{\pi} \int_0^a \frac{\sigma_f(\xi)}{\sqrt{\xi}(\xi+\xi_1)} d\xi \quad (3.13)$$

相应弹性问题垂直裂纹的裂纹面张开位移为

$$v^R = H(\xi) \left( \frac{D_0\beta}{2\pi} \right) \int_0^a \sigma_f(\xi') \left\{ 2 \left( \frac{\xi}{\xi'} \right)^{\frac{1}{2}} - \ln \left[ \left| \frac{\xi'^{\frac{1}{2}} + \xi^{\frac{1}{2}}}{\xi'^{\frac{1}{2}} - \xi^{\frac{1}{2}}} \right| \right] \right\} d\xi' \quad (3.14)$$

式中  $D_0 = D(t)|_{t=0}$  为材料的初始柔量.

根据对应原理, 原粘弹性问题的渐近解为:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^R(\xi_1) H(t) \quad (3.15)$$

$$v(\xi, t) = \int_0^t D(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{v^R}{D_0} \right) d\tau \quad (3.16)$$

为了简洁起见, 引入记号 $I(\xi)$ , 它有表达式:

$$I(\xi) = \int_0^a \sigma_f(\xi') g(\xi, \xi') d\xi'; \quad g(\xi, \xi') = 2\sqrt{\frac{\xi}{\xi'}} - \ln \left| \frac{\sqrt{\xi'} + \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi'} - \sqrt{\xi}} \right|;$$

则方程(3.16)可以写为:

$$v(\xi, t) = H(\xi) \times \frac{\beta}{2\pi} \int_0^t D(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (I(\xi)) d\tau \quad (3.17)$$

上式相似于修正的叠加原理MSP<sup>[6,8]</sup>.

## 四、裂纹起裂孕育期和缓慢扩展速率

### 4.1 局域能量判据

对含裂纹的粘弹体在 $t=0$ 时刻加载, 裂纹并不立刻扩展, 存在一段孕育时间 $t^*$ , 在 $0 \leq t < t^*$ 时裂纹长度不变, 裂纹面随时间逐渐张开. 当裂纹孕育成熟, 即其力学状态满足临界条件时, 裂纹开始增长, 这个时刻称为裂纹孕育时间 $t^*$ .

这里,  $t^*$ 可采用局域能量判据来预测. 假定在裂纹孕育期 $t^*$ 内, 断裂过程区内粘聚应力 $\sigma_f$ 对裂纹面阻抗裂纹面张开并吸收能量.  $W = \int_0^a \frac{1}{2} \sigma_f v d\xi$ . 当 $W$ 等于裂纹表面能 $\Gamma$ 时, 裂纹开始扩展. 于是, 考虑到上下裂纹面对称,

$$\Gamma = \frac{W}{2a} = \frac{1}{a} \int_0^a v \sigma_f d\xi \quad (4.1)$$

其中  $\Gamma$  是断裂表面能, 是材料常数.

#### 4.2 裂纹孕育时间

将(3.17)式代入(4.1), 并引入如下记号

$$J(t) = \int_0^a \sigma_f(\xi, t) I(\xi) d\xi \quad (4.2)$$

我们有

$$\Gamma = \frac{\beta}{4\pi\alpha} \int_0^{t^*} D(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [J(t)] d\tau \quad (4.3)$$

裂纹孕育时间  $t^*$  由上式确定. 这个准则与经典断裂力学的能量释放率判据相似.

#### 4.3 裂纹缓慢扩展速率

当裂纹扩展后, 假定裂尖断裂过程区尺寸  $a$  与粘聚力  $\sigma_f$  的分布与大小均不变, 只随时间同裂尖一起向前平移. 这与平面应力断裂过程区的 Dugdale 模型相似. 当裂纹扩展  $\Delta a$  后, 消耗能量为  $2\Delta a\Gamma$ , 此能量由外载提供.  $q(t)$  在  $\Delta t$  时间内做功为  $2q(t)v^\infty\Delta t$ ,  $v^\infty$  为无穷远处受载边界的平均位移. 即

$$\Delta a\Gamma = q(t)v^\infty\Delta t \quad (4.4)$$

于是,

$$\dot{a} = \frac{q(t)v^\infty}{\Gamma} \quad (4.5)$$

$\dot{a}$  就是裂纹缓慢扩展速率.

## 五、结 束 语

本文尝试分析了幂律非线性粘弹材料的平面应变断裂问题. 假定蠕变变形为不可压, 在裂尖邻域 (即断裂过程区内) 作用着粘聚应力阻抗裂纹面扩张. 通过摄动法得到了近裂尖区应力与位移增量的表达式. 提出局域能量判据, 预测裂纹孕育时间和裂纹亚临界扩展率的公式. 由于原问题固有的大的难度, 必须借助于近似方法. 所得结果适用于  $n \geq 1$  的弱非线性介质. 此外, 作用于过程区的粘聚应力  $\sigma_f$  可用 Dugdale 模型分析, 为了检验此模型的可靠性, 实验研究是必需的, 也是很复杂的.

## 参 考 文 献

- [1] W. G. Knauss, Delayed fracture—the Griffith problem for linearly viscoelastic materials, *Int. J. Fract.*, 6(1) (1970), 7–20.
- [2] R. A. Schapery, A theory of crack initiation and growth in viscoelastic medium: I. theoretical development, *Inter. J. Fract.*, 11(1) (1975), 141–159.
- [3] M. Y. He and J. W. Hutchinson, The penny-shaped crack and the plane strain crack in an infinite body of power-law materials, *TRANS. J. Appl. Mech.*, 48(4) (1981), 830–840.
- [4] G. A. C. Graham, The correspondence principle of linear viscoelastic theory for mixed mode boundary value problems involving time-dependent boundary

- regions, *Quart. Appl. Math.*, 26(2) (1968), 167—174.
- [5] W. N. Findley, et al, *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Theory for Materials*, North-Holland Pub. Co. (1976).
- [6] A. C. Pipkin and T. G. Rogers, A nonlinear integral representation for viscoelastic behaviour, *J. Mech. Phy. Solids*, 16(1) (1968), 59—72.

## Crack Propagation in the Power-Law Nonlinear Viscoelastic Material

Zhang Shuangyin    Xiong Dianyuan

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science,  
Beijing 100080, P. R. China)

### Abstract

An analysis on crack creep propagation problem of power-law nonlinear viscoelastic materials is presented. The creep incompressibility assumption is used. To simulate fracture behavior of craze region, it is assumed that in the fracture process zone near the crack tip, the cohesive stress  $\sigma_c$  acts upon the crack surfaces and resists crack opening. Through a perturbation method, i. e., by superposing the Mode-I applied force onto a referential uniform stress state, which has a trivial solution and gives no effect on the solution of the original problem, the nonlinear viscoelastic problem is reduced to linear problem. For weak nonlinear materials, for which the power-law index  $n \gg 1$ , the expressions of stress and crack surface displacement are derived. Then, the fracture process zone local energy criterion is proposed and on the basis of which the formulae of cracking incubation time  $t^*$  and crack slow propagation velocity  $\dot{a}$  are derived.

**Key words** nonlinear viscoelasticity, creep incompressibility, perturbation method, crack propagation, crack incubation time