应用数学和力学，第18卷 第11期 (1997年11月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

有势算子对耦合物理量的分离*

张 慎 学[1]

（钱伟长推荐，1995年8月29日收到，1996年10月26日收到修改稿）

摘 要

本文通过有势算子对耦合物理量的分离推导了耦合热弹性动力学中的两个特殊的最小值原理.

关键词 势算子 分离 耦合物理量 最小值原理

一、引 言

对一个微分方程定解问题是否存在相应的最小值原理？如果存在，其形式如何？这对该定解问题解的存在与唯一性的研究，以及如何求其近似解等有着重要意义，因此，常常是人们所关注的问题，对于含有耦合物理量的微分方程定解问题，如何建立其最小值原理，目前未见报导，本文利用文[1]的势算子理论将互相耦合的物理量分离开来，在某些条件下，推导了耦合热弹性动力学中两个特殊的最小值原理. 文中使用的方法，对含耦合物理量的其它定解问题最小值原理的建立，具有普遍意义.

二、记号和定义

设$\bar{\Omega}$为介质所占空间闭的有界域，$\bar{\Omega}$的内部和边界分别用Ω和在Kellogg[2]意义下的正规曲面B来表示，$\bar{\Omega}$中的点记为$x=(x_1, x_2, x_3)$，$x_i(i=1, 2, 3)$为直角笛卡儿坐标，$f(x, t)$为$(x, t)\in\bar{\Omega}\times[0, \infty)$上的实函数，$f\in C^{M,N}$是指$f$的$M+N$阶（对空间变量$M$阶对时间变量$N$阶）微商是$\bar{\Omega}\times[0, \infty)$上的连续函数，$(\ )_{,i}$，$(\ )_{,p}$和$(\dot{\ })$分别表示$(\ )$关于$x_i$，$p$（实参数）和时间$t$的偏导数，$(\ )'$表示$(\ )$关于$t$域到$\alpha$域的 Laplace 变换，$f(x, t)$在$\infty$有界是指极限$\lim\limits_{t\to\infty}f(x, t)$对$f(x, t)$的定义域中的每个$x$存在，本文假定关于$(x, t)$的函数均在$\infty$有界，因而他们的Laplace变换在正实轴内部绝对一致收敛[3].

三、初-边值问题的替换形式

线性耦合热弹性动力学中的控制方程[4~6]和定解条件分别为

1 吉林大学数学系，长春 130023

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\equiv u_{(i,j)}\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.1}$$

$$\theta_i=\theta_{,i}\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.2}$$

$$\sigma_{ij}=C_{jikl}e_{kl}-p_{ij}\theta\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.3a}$$

或

$$e_{ij}=J_{ijkl}(\sigma_{kl}+p_{kl}\theta)\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.3b}$$

$$q_i=Q_{ij}\theta_j\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.4}$$

$$\rho\eta=\rho S\theta/T_0+p_{ij}e_{ij}\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.5}$$

$$\sigma_{ij,j}+X_i=\rho\ddot{u}_i\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.6}$$

$$q_{i,i}+r=\rho T_0\dot{\eta}\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.7}$$

$$u_i=\bar{u}_i,\ \ \theta=\bar{\theta}\qquad (\text{在}B\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.8}$$

$$\left.\begin{array}{l}u_i(x,\ 0)=u_{i0}(x),\ \ \dot{u}_i(x,\ 0)=\dot{u}_{i0}(x)\\ \theta(x,\ 0)=\theta_0(x)\qquad (\text{在}\Omega\text{上})\end{array}\right\}\tag{3.9a,b,c}$$

其中　q_i，u_i，e_{ij}，σ_{ij}分别为热流矢量、位移矢量、应变张量和应力张量的笛卡儿分量；温度场$\theta\equiv T-T_0$，T_0为介质处于参考态时的温度，介质在不受外力作用并处于均匀温度时是应力自由的，T为瞬时绝对温度，η是比熵，S是比热；C_{ijkl}，Q_{ij}和p_{ij}分别是弹性系数、热系数和耦合系数；ρ是质量密度，X_i和r是体力和热供应。

文中已知函数假定：

(a) $u_{i0}(x)$，$\theta_0(x)$，$C_{ijkl}(x)$，$p_{ij}(x)$，$\rho(x)$，$Q_{ij}(x)\in C^1(\bar{\Omega})$；

(b) $S(x)\in C(\bar{\Omega})$；$r,X_i\in C^{1,0}$；$\bar{u}_i$，$\bar{\theta}$对$x\in B$连续、对$t\in[0,\infty)$连续可微；

(c) $C_{ijkl}=C_{klij}=C_{jikl}$，$p_{ij}=p_{ji}$，$Q_{ij}=Q_{ji}$；$\rho(x)$，$S(x)$恒正，$C_{ijkl}(x)$正定，$Q_{ij}\theta_j\theta_i\geqslant 0$。

从(3.1)～(3.5)，(3.7)消去e_{ij}，θ_i，η，q_i，可得

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}u_{k,l}-p_{ij}\theta,\ \ u_{(i,j)}=J_{ijkl}(\sigma_{kl}+p_{kl}\theta)\tag{3.10a,b}$$

$$\rho S\dot{\theta}+T_0p_{ij}\dot{u}_{i,j}-(Q_{ij}\theta_{,j})_{,i}-r=0\tag{3.11}$$

用卷积理论，可将(3.6)，(3.11)，(3.9)化为

$$g_0*\sigma_{ij,j}+f_i=\rho u_i\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.12}$$

$$\rho S\theta+T_0p_{ij}u_{i,j}-1*(Q_{ij}\theta_{,j})_{,i}-r_0=0\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.13}$$

这里*代表卷积[7]

$$\begin{array}{l}g_0=t,\ \ f_i=g_0*X_i+\rho(u_{i0}+t\dot{u}_{i0})\\ r_0=1*r+\rho S\theta_0+T_0p_{ij}u_{i0,j}\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\end{array}\tag{3.14a,b,c}$$

将(3.10a)代入(3.12)，再加上(3.13)和(3.8)，可得定解问题（一）：

$$g_0*(C_{ijkl}u_{k,l}-p_{ij}\theta)_{,j}+f_i-\rho u_i=0\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.15}$$

$$\rho S\theta-1*(Q_{ij}\theta_{,j})_{,i}+T_0p_{ij}u_{i,j}-r_0=0\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.16}$$

$$u_i=\bar{u}_i,\ \ \theta=\bar{\theta}\qquad (\text{在}B\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.8}$$

关于问题（一）取Laplace变换得问题（一）′：

$$\alpha^2\rho u_i'-(C_{ijkl}u_{k,l}')_{,j}+(p_{ij}\theta')_{,j}-f_{\alpha i}=0\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.17}$$

$$\alpha\rho S\theta'-(Q_{ij}\theta_{,j}')_{,i}+\alpha p_{ij}u_{i,j}'-r_{0\alpha}=0\qquad (\text{在}\Omega\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.18}$$

$$u_i'=\bar{u}_i',\ \ \theta'=\bar{\theta}'\qquad (\text{在}B\times[0,\infty)\text{上})\tag{3.19}$$

其中

$$f_{ai}=X_i'+\rho(\alpha u_{i_0}+\dot{u}_{i_0}),\quad r_{0a}=r'+\rho S\theta_0+T_0 p_{ij}u_{i_0,j} \tag{3.20}$$

四、关于(一)′的转换最小值原理

为了方便，我们引进下列记号和定义：

$U\equiv[u_i,\ \theta]^T\in H$（或$\tilde{H}$）是指(a) $u_i\in C^{2,2}$，$\theta\in C^{1,1}$；(b)u_i，θ满足(3.8)（或(3.8)对应的齐边界条件）；U是问题（一）的解是指$U\in H$且满足(3.15)、(3.16)；$U'\equiv[u_i',\ \theta']^T\in H'$（或$\tilde{H}'$）当且仅当$U\in H$（或$\tilde{H}$）；$U'$是问题（一）′的解当且仅当$U$是问题（一）的解.

将问题（一）′的前两个方程写成矢量形式

$$B(U')\equiv A(U')-L'=0 \tag{4.1}$$

其中

$$U'=[u_i',\ \theta']^T\in H'\subset L_{2H}'(\Omega) \tag{4.2}$$

$$A(U')\equiv[\alpha^2\rho u_i'-(C_{ijkl}u_{k,l}')_{,j},\ \alpha\rho S\theta'-(Q_{ij}\theta_{,j}')_{,i}]^T \tag{4.3}$$

$$L'\equiv[-(p_{ij}\theta')_{,j}+f_{ai},\ -\alpha T_0 p_{ij}u_{i,j}'+r_{0a}]^T \tag{4.4}$$

$L_{2H}'(\Omega)$是实的 Banach 空间，$L_{2H}'(\Omega)$中的元素u'，v'是定义在$\bar{\Omega}\times[0,\ \infty)$上的矢量场，并定义双线性变换

$$\langle u',\ v'\rangle=\int_\Omega u'v'd\Omega \tag{4.5}$$

此外，规定：$u\in L_{2H}(\Omega)$当且仅当$u'\in L_{2H}'(\Omega)$.

为了方便，以下我们假定$\bar{u}_i=0$，$\bar{\theta}=0$，否则，只需在泛函中分别附加一些与$\bar{u}_i$，$\bar{\theta}$有关的项即可（见文末）.

如果$B(U')$是H'上的有势算子，即有定义在H'上的泛函$K(U')$，使对每一个$U'\in H'$，都有

$$[K(U'+p\tilde{U}')]_{,p}|_{p=0}=\langle B(U'),\ \tilde{U}'\rangle,\quad \tilde{U}'\in\tilde{H}' \tag{4.6}$$

则问题（一）′的解U'是$K(U')$的临界点，且$K(U')$可借助于下式来构造[1]：

$$K(U')=\int_0^1\langle B(s(U'-U_0')+U_0'),\ U'-U_0'\rangle ds+K_0 \tag{4.7}$$

式中 $K_0=K(U_0')$是常数，s是实参数.

设$K_0=0$和$U_0'=0$，我们有

$$K(U')=\int_0^1\langle B(sU'),\ U'\rangle ds$$

$$=\int_0^1\langle A(s(U')-L'),\ U'\rangle ds$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega[\alpha^2\rho u_i'u_i'-(C_{ijkl}u_{k,l}')_{,j}u_i'+2(p_{ij}\theta')_{,j}u_i'-2f_{ai}u_i'$$

$$+\alpha\rho S(\theta')^2-(Q_{ij}\theta_{,j}')_{,i}\theta'+2\alpha T_0 p_{ij}u_{i,j}'\theta'-2r_{0a}\theta']ds \tag{4.8}$$

通过分部积分，对每个$U'\in H'$，注意到$\tilde{H}'$的定义，我们有

$$\delta K(U', \tilde{U}')=[K(U'+p\tilde{U}')]_{,p}|_{p=0}$$
$$=\int_{\Omega}\{[\alpha^2\rho u_i'-(C_{ijkl}u_{k,l}')_{,j}+(p_{ij}\theta')_{,j}-f_{\alpha i}]\tilde{u}_i'$$
$$+[\alpha\rho S\theta'-(Q_{ij}\theta_{,j}')_{,i}+\alpha T_0 p_{ij}u_{i,j}'-r_{0\alpha}]\tilde{\theta}'\}ds \quad (4.9)$$

由此易见，当u_i'，θ'满足(3.17)～(3.20)时，U'必是$K(U')$的临界点，即

$$\delta K(U', \tilde{U}')=0 \qquad (\tilde{U}'\in\tilde{H}') \quad (4.10)$$

再注意到

$$\delta^2 K(U', \tilde{U}')=[K(U'+p\tilde{U}')]_{,pp}|_{p=0}$$
$$=\int_{\Omega}(\alpha^2\rho\tilde{u}_i'\tilde{u}_i'+C_{ijkl}\tilde{u}_{k,l}'\tilde{u}_{k,j}'+\alpha\rho S(\tilde{\theta}')^2$$
$$+Q_{ij}\tilde{\theta}_{,j}'\tilde{\theta}_{,i}')d\Omega\geqslant 0 \qquad (\tilde{U}'\in\tilde{H}') \quad (4.11)$$

这里，等号当且仅当$\tilde{U}'=0$时成立，便有如下的

定理1 设u_i'，θ'满足问题（一）′的方程(3.17)～(3.20)，则定义在H'上的泛函$K(U')$(见(4.8))在问题（一）′的解$U'=[u_i', \theta']^T$处达到最小值．

五、关于问题(一)的最小值原理

我们引进一个相容的权函数集合E．$g(t)\in E$是指(a)$g(t)$对$t\in[0, \infty)$存在，并且是某些非负连续函数$G(\alpha)$的Laplace变换：

$$g(t)=\int_0^\infty G(\alpha)\exp[-\alpha t]d\alpha \quad (5.1)$$

这里$G(\alpha)$在其定义域中只有有限个零点；(b)广义积分

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty g(t+\tau)dtd\tau, \qquad \int_0^\infty\int_0^\infty \dot{g}(t+\tau)dtd\tau \\ \displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \ddot{g}(t+\tau)dtd\tau\end{array}\right\} \quad (5.2)$$

存在．如此引进的$g(t)$和$G(\alpha)$使得本文出现的广义积分均存在，并可交换积分次序[3]．由此，根据Laplace变换的性质，首先，我们有如下一些典型的公式：

(a) $$\int_0^\infty G(\alpha)f'(\cdot, \alpha)d\alpha=\int_0^\infty g(t)f(\cdot, t)dt \quad (5.3)$$

(b) $$\int_0^\infty G(\alpha)f_1'(\cdot, \alpha)f_2'(\cdot, \alpha)d\alpha$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty g(t+\tau)f_1(\cdot, t)f_2(\cdot, \tau)dtd\tau \quad (5.4)$$

(c) $$\int_0^\infty G(\alpha)\alpha f(\cdot, \alpha)d\alpha$$
$$=\int_0^\infty g(t)\dot{f}(\cdot, t)dt+g(0)f(\cdot, 0) \quad (5.5)$$

(d) $$\int_0^\infty G(\alpha)\alpha^2 f_1'(\cdot,\alpha)f_2'(\cdot,\alpha)d\alpha$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty g(t+\tau)\dot{f}_1(\cdot,\ t)\dot{f}_2(\cdot,\ \tau)dtd\tau$$

$$+\int_0^\infty g(t)[\dot{f}_1(\cdot,\ t)f_2(\cdot,\ 0)+\dot{f}_2(\cdot,\ t)f_1(\cdot,\ 0)]dt$$

$$+g(0)f_1(\cdot,\ 0)f_2(\cdot,\ 0) \tag{5.6}$$

(e) $\int_0^\infty G(\alpha)\alpha f_1'(\cdot,\ \alpha)f_2'(\cdot,\ \alpha)d\alpha$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty g(t+\tau)\dot{f}_1(\cdot,\ t)f_2(\cdot,\ \tau)dtd\tau$$

$$+f_1(\cdot,\ 0)\int_0^\infty g(t)f_2(\cdot,\ t)dt \tag{5.7}$$

通过，(5.3)～(5.7)，并利用(4.8)，我们得到

$$\int_0^\infty G(\alpha)K(U')d\alpha$$

$$\begin{aligned}
=\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty g(t+\tau)\ \int_\Omega\{&\rho(x)\dot{u}_i(x,\ t)\dot{u}_i(x,\ \tau)\\
&-[C_{ijkl}(x)u_{k,l}(x,\ t)]_{,j}u_i(x,\ \tau)+2p_{ij}(x)\theta_{,j}(x,\ t)u_i(x,\ \tau)\\
&-2X_i(x,t)u_i(x,\tau)+\rho(x)S(x)\dot{\theta}(x,t)\theta(x,\tau)\\
&-[Q_{ij}(x)\theta_{,j}(x,\ \tau)]_{,i}\dot{\theta}(x,\ t)\\
&+2T_0p_{ij}(x)u_{i,j}(x,\ \tau)\dot{\theta}(x,\ t)-2r(x,\ t)\theta(x,\ \tau)\}d\Omega dtd\tau\\
+\int_0^\infty g(t)\int_\Omega\{&\rho(x)\dot{u}_i(x,\ t)[u_i(x,\ 0)-u_{i_0}(x)]\\
&-\rho(x)\dot{u}_{i_0}(x)u_i(x,\ t)+\frac{1}{2}\rho(x)S(x)\theta(x,\ 0)\theta(x,\ t)\\
&-\frac{1}{2}[Q_{ij}(x)\theta_{,j}(x,\ t)]_{,i}\theta(x,\ 0)+T_0p_{ij}(x)u_{i,j}(x,\ t)\theta(x,\ 0)\\
&-\rho(x)S(x)\theta_0(x)\theta(x,\ t)-T_0p_{ij}(x)u_{i_0,j}(x)\theta(x,\ t)\}d\Omega dt\\
+g(0)\int_\Omega&\rho(x)u_i(x,\ 0)[\frac{1}{2}u_i(x,\ 0)-u_{i_0}(x)]u_i(x,\ 0)d\Omega
\end{aligned}$$

$$\equiv\Phi[U;\ g]\qquad(U\in H,\ g\in E) \tag{5.8}$$

定理2 设$U^*\equiv[u_i^*,\ \theta^*]^T$是问题（一）的解，则对任意给定的$g\in E$，有

$$\Phi[U;\ g]\geqslant\Phi[U^*;\ g]\qquad(U\in H) \tag{5.9}$$

这里，等号当且仅当$U=U^*$时成立。

证明 当U^*是问题（一）的解时，$U^{*\prime}$是问题（一）$'$的解；$U\in H$时，$U'\in H'$。故由定理1、(5.8)及$g(t)$和$G(\alpha)$的定义，我们有

$$\Phi[U;\ g]-\Phi[U^*;\ g]$$

$$=\int_0^\infty G(\alpha)[K(U')-K(U^{*\prime})]d\alpha\geqslant 0\qquad(U\in H) \tag{5.10}$$

并且，等号当且仅当$U=U^*$时成立，证毕。

如果$\bar{u}_i\neq 0$，$\bar{\theta}\neq 0$，我们设

$$K_1(U')=K(U')+K_0(U'),\ \Phi_1[U;\ g]=\Phi[U;\ g]+\Phi_0[U;\ g] \tag{5.11}$$

式中

$$K_0(U')=\frac{1}{2}\int_B(C_{ijkl}u'_{k,l}n_j\bar{u}'_i+Q_{ij}\theta'_{,j}n_i\bar{\theta}')dB \tag{5.12}$$

$$\Phi_0[U;\ g]=\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty g(t+\tau)\int_B\{(C_{ijkl}(x)u_{k,l}(x,\ t)n_j(x)\bar{u}_i(x,\ \tau)$$
$$+Q_{ij}(x)\theta_{,j}(x,\ t)n_i(x)\bar{\theta}(x,\ \tau)\}dBdtd\tau \tag{5.13}$$

于是，用$K_1(U')$代替$K(U')$，用$\Phi_1[U;\ g]$代替$\Phi[U;\ g]$，则容易证明：定理1和定理2的结论仍成立。

参 考 文 献

[1] J. T. Oden, *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill, New York (1972), 94—106.

[2] O. D. Kellogg, *Foundation of Potential Theory*, Springer, Berlin (1929),85.

[3] 南京工学院数学教研组，《工程数学，积分变换》，人民教育出版社 (1981), 34.

[4] Y. C. Fung, *Foundation of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs New Jersey (1965), 341—411.

[5] R. E. Nickell and J. L. Sackman, Variational principle for linear coupled thermoelasticity, *Quarterly of Applied Mathematics*, 26 (1968), 11—26.

[6] S. I. Cuou and C. C. Wang, Estimates of error in finite element approximate solutions to problems linear theromelasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 77 (1981), 263—299.

[7] M. E. Gurtin, Variational principles for linear elastodynamics, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16(1) (1964),34.

Separating Coupled Physic Quantity by Potential Operator

Zhang Shenxue

(Departement of Mathematics, Jilin University, Changchun
130023, *P. R. China)*

Abstract

In the present paper, by the use of the method of separating coupled physic quanity by potential operator, two special minimum principles in coupled thermo-elastodynamics are deduced.

Key words potential operator, separation, coupled physic quantity, minimum principles