应用数学和力学，第18卷 第11期（1997年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

群组决策特征根法*

邱 菀 华[1]

（丁协平推荐，1997年1月9日收到）

摘 要

本文提出了一个群组决策的特征根法GEM（Group eigenvalue method），它彻底克服了判断矩阵的不一致性，为决策支持系统中的专家选择开辟了新路。

关键词 群组决策 理想专家 评分夹角

一、GEM模型

由$S_1,S_2,\cdots,S_m$组成的m个专家群组决策系统G，评价n个对象$B_1,B_2,\cdots,B_n$。第i个专家S_i对第j个被评目标B_j的评分值记为$x_{ij}\in[I,J]$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。$x_{ij}$的值越大，目标$B_j$越优。$S_i$及其群组$G$的评分组成$n$维列向量$x_i$和$m\times n$阶矩阵$x$：

$$x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots.x_{in})^T\in E^n$$

$$x=(x_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

它们是专家和群组在一次决策过程中所作的结论，代表各自对被评物的估价值。

专家的决策水平不仅取决于他的专业水平、经验、知识面和综合能力，而且与决策时的精神状态、情绪和偏好密切相关。所以，现实中决策可靠性达最大值 1（或者说决策的不确定性、不可靠性达最小值 0）的专家是不存在的。因此，我们假设一个评分最准（可靠性达100%）、最公正，即决策水平最高的专家叫理想（最优）专家S_*。他的评分向量

$$x_*=(x_{*1},x_{*2},\cdots x_{*n})^T\in E^n$$

由于人们总是聘请水平较高的专家参与，故我们现实地定义理想专家为，对被评物的认识与专家群体G有最高一致性的专家，即S_*的决策结论与G的完全一致，与专家个体间的差异最小。

定义 具有评分向量与群体中各专家评分向量夹角之和最小的专家，称为该群体的理想（最优）专家。

* 国家自然科学基金资助项目。

1 北京航空航天大学管理学院，北京 100083.

由上定义不难写出x_*是满足函数

$$f=\sum_{i=1}^{m}(b^Tx_i)^2 \tag{1.1}$$

取最大值时的向量，式中$\forall b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T\in E^n$，且不失一般性可设$\|b\|_2=1$. 即

$$\max_{\substack{b\in E^n\\ \|b\|_2=1}}\sum_{i=1}^{m}(b^Tx_i)^2=\sum_{i=1}^{m}(x_*^Tx_i)^2$$

为了求x_*，也即G对被评物的总评分，我们先引入Frobenius定理的结论如下：

引理 若n阶实矩阵$Q\geqslant 0$为不可约矩阵，则

（1） Q有最大的正特征根$\rho_{\max}$，且为单根；

（2） $\rho_{\max}$对应于Q的特征向量可以全部由正分量组成，所有特征向量只相差一个比例因子.

显然，我们的评分矩阵x构成的方矩阵$F=x^Tx$是符合Frobenius定理条件的. 下面的定理证明了，我们要求的x_*，就是引理(2)中$\rho_{\max}$对应的正特征向量.

定理 对于$\forall b\in E^n$

$$\max_{\|b\|_2=1}\sum_{i=1}^{m}(b^Tx_i)^2=\sum_{i=1}^{m}(x_*^Tx_i)^2=\rho_{\max}$$

式中$\rho_{\max}$为矩阵$F=x^Tx$的最大正特征根，x_*为$\rho_{\max}$对应于F的正特征向量，且$\|x_*\|_2=1$.

证明 由式(1.1)

$$f=\sum_{i=1}^{m}(b^Tx_i)^2=\sum_{i=1}^{m}(b^Tx_ib^Tx_i)=b^T\left(\sum_{i=1}^{m}x_ix_i^T\right)b=b^Tx^Txb \tag{1.2}$$

用Lagrange乘子法求f的最大值. 构造函数

$$g(b_1,b_2,\cdots,b_n,\rho)=b^Tx^Txb-\rho(b^Tb-1)$$

令

$$\frac{\partial g(b_1,b_2,\cdots,b_n,\rho)}{\partial b_j}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n);$$

$$\frac{\partial g(b_1,b_2,\cdots,b_n,\rho)}{\partial \rho}=0$$

得

$$x^Txb-\rho b=0;\quad b^Tb=1$$

即

$$Fb=\rho b;\quad \|b\|_2=1$$

因此，f取极值时，ρ是F的特征根，b是F的特征向量. 根据引理，必可找到最大正特征根$\rho_{\max}$对应于F的特征向量x_*全部由正分量组成，且x_*唯一（因$\|x_*\|_2=1$）.

下面证明我们求出的x_*使f达最大值.

设$\lambda\neq\rho_{\max}$为F的任一特征根，其对应于F的特征向量为b_0，则必有

$$\rho_{\max}>\lambda$$

$$Fx_*=\rho_{\max}x_*,\quad Fb_0=\lambda b_0 \tag{1.3}$$

$$x_*^Tx_*=b_0^Tb_0=1 \tag{1.4}$$

对(1.3)式的两边分别左乘x_*^T和b_0^T，并注意到(1.4)式得：

$$x_*^T F x_* = \rho_{\max} x_*^T x_* = \rho_{\max}$$

$$b_0^T F b_0 = \lambda b_0^T b_0 = \lambda$$

故

$$x_*^T F x_* > b_0^T F b_0 \quad \text{或} \quad x_*^T x^T x x_* > b_0^T x^T x b_0$$

代入(1.2)式后得：

$$\sum_{i=1}^{m} (x_*^T x_i)^2 > \sum_{i=1}^{m} (b_0^T x_i)^2$$

由λ的任意性可知：

$$\max_{\|b\|_2=1} \sum_{i=1}^{m} (b^T x_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_*^T x_i)^2 = \rho_{\max}$$

定理证毕。

本定理给出了群体G对多个被评目标作评判决策的新特征根法。这种方法求出的理想专家的评判分，即为多个被评目标的排序。此法只需专家直接对各被评目标打分，然后将评分矩阵转置自乘记为矩阵F。F的最大特征根对应的特征向量就是最优决策结论。与AHP法相比，无需另求被评目标的两两权重比较判断矩阵，因此，GEM法更为精练。

在精度要求为ε的条件下，采用数值代数中的幂法可十分迅速地求出x_*。具体算法为：

① 命$k=0$，$y_0=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)^T \in E^n$, $y_1=Fy_0, z_1=\frac{y_1}{\|y_1\|_2}$；

② 命$k=1,2,\cdots$；$y_{k+1}=Fz_k, z_{k+1}=\frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|_2}$；

③ 用$|z_{k\to k+1}|$表示z_k与z_{k+1}对应分量之差的绝对值最大者，判断$|z_{k\to k+1}|<\varepsilon$么？若是，$z_{k+1}$即为所求的$x_*$；否则转②。

二、应用实例

例1 已知由S_1，S_2，…，S_6六个专家组成G_1对B_1，B_2，B_3三个目标作评判。他们的评分列入表1中。

表1 **专家评分表**

专家 / 评分 / 目标	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
B_1	5	1	2	1	3	1
B_2	4	3	4	2	4	4
B_3	1	4	5	4	5	5

由表1得

$$x^T=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 4 & 2 & 4 & 4\\ 1 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5\end{pmatrix}, \quad F=x^T x=\begin{pmatrix}41 & 49 & 43\\ 49 & 77 & 84\\ 43 & 84 & 108\end{pmatrix}$$

用幂法的各次迭代结果列于表2.

表2 **例1各次迭代结果表**

k	0	1	2	3	4
y_k^T	(1/3,1/3,1/3)	(44.335,70,78.335)	(75.358,123.78,142.3)	(75.2,123.96,142.9)	(75.17,123.95,142.8)
z_k^T	—	(0.3888,0.6139,0.687)	(0.3711,0.6095,0.7005)	(0.3695,0.6091,0.7017)	(0.3694,0.6091,0.7019)

从表2的最后一列查出:

$$x_* = (0.3694,\ 0.6091,\ 0.7019)^T$$

此即为$\varepsilon=0.0003$时的理想专家评分向量x_*. 目标B_1分最高，B_2次之，B_1最差.

例2 文献[3]的第四部分给出5位专家组成的评价5个目标的序贯群体决策算例. 已知

$$x=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$F=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 0.5774 & 0.5774 & 0 & 0.5774 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5774 & 0 & 0.5774 & 0.5774 \\ 0 & 0 & 0.5774 & 0.5774 & 0.5774 \\ 0.5774 & 0.5774 & 0 & 0.5774 & 0 \end{pmatrix}$$

GEM法的计算结果列于表3中($\varepsilon=0.005$).

表3 **例2各次迭代结果表**

k	0	1	2	3	4
y_k	$\begin{pmatrix}1/5\\1/5\\1/5\\1/5\\1/5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1.6\\2.2\\0.6\\2.4\\1.2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.1885\\5.6881\\1.0859\\5.7915\\2.5855\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.313\\5.785\\0.9903\\5.7417\\2.4623\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.354\\5.8119\\0.9582\\5.7177\\2.4161\end{pmatrix}$
z_k	—	$\begin{pmatrix}0.4137\\0.5688\\0.1551\\0.6205\\0.3103\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.4383\\0.5953\\0.1136\\0.6061\\0.2706\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.4495\\0.6029\\0.1032\\0.5984\\0.2566\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.4535\\0.6053\\0.0998\\0.5955\\0.2516\end{pmatrix}$

从该表的最后一列读出5个被评目标的优劣次序为:

$$B_2 > B_4 > B_1 > B_5 > B_3$$

故取前三名B_2，B_4和B_1入选．上述结论不仅与文献[3]完全一致，而且更具体明了．本例表明系统结构清楚后，GEM法用于求解各类多目标问题十分准确便利．

三、结　　论

决策支持系统的前沿课题之一是群体决策问题．GEM法优于Saaty的判断矩阵在于，各专家只需按习惯方式打分就可得到群体对目标的最优排序结果，避免了AHP的两两对比构造判断矩阵易于发生目标先后的不一致性．这无论对于决策理论分析，还是对于理论的应用，都迈开了可喜的一步．

致谢　本文曾得到钱伟长教授的热情指导，在此表示衷心感谢．

参　考　文　献

[1] 顾昌耀、邱菀华，复熵及其在Bayes决策中的应用，控制与决策，6(4) (1991)，253—259.

[2] Gu Changyao and Qiu Wanhua, Complex entropy and its application, *Chinese Journal of Aeronautics*, 5(3) (1992), 159—166.

[3] 吴敬业、汤理，评价专家的可靠性预分析，系统工程，10(5) (1992)，46—50.

An Eigenvalue Method on Group Decision

Qiu Wanhua

(School of Management Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, *P. R. China)*

Abstract

In this paper, a new group decision eigenvalue method abbreviated as GEM is proposed. It overcomes the non-consistence of judgement matrix and will open up a new route for the selection of experts in the decision system.

Key words group decision, ideal expert, intersection angles