应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

四阶常微分方程奇异摄动问题的四阶精度差分方法

刘传汉[1]

（苏煜城推荐，1996年1月8日收到，1997年3月21日收到修改稿）

摘　要

在本文中，我们利用特殊的非均匀网格上的 Hermite 差分格式来近似四阶常微分方程奇异摄动问题，并证明了其四阶精度的一致收敛性，且在文章的最后给出了其数值结果。

关键词　非均匀网格　网格生成函数　Hermite差分格式　一致收敛性

一、引　言

在这里我们考虑的是一类广泛应用于力学中的常微分方程边值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon^2u^{(4)}-(a(x)u)''=f(x),\qquad x\in I=[0,\ 1]\\&u(0)=u(1)=0,\ u''(0)=u''(1)=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中$\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0)$，$\varepsilon_0\ll1$是小参数，且$f(x)$，$a(x)$满足下列条件：

$$f(x)\in C^4(I),\ a(x)\in C^6(I),\ a(x)\geqslant\gamma^2>0,\ |a'(x)|<L,\qquad x\in I\tag{1.2}$$

问题(1.1)的数值方法在[10]，[12]中都讨论过．在[10]中，使用Il'in的思想[3]构造了带有拟合因子的一致收敛差分格式，其解关于ε以$O(h^{1/2})$阶一致收敛于原摄动问题的解．在[12]中，作者引进离散的Green函数，使用 Petrov-Galerkin 有限元方法[5],[9]构造了一致收敛的二阶精度差分格式．

本文主要是利用[1]，[7]中发展起来的技术构造了一致收敛的四阶精度差分格式．为此我们将问题(1.1)化简成下面两个问题：

$$\left.\begin{aligned}&L_1y\equiv y''=f(x),\qquad x\in I\\&y(0)=y(1)=0\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned}&L_2u\equiv\varepsilon^2u''-a(x)u=y(x),\qquad x\in I\\&u(0)=u(1)=0\end{aligned}\right\}\tag{1.4}$$

现在我们在特殊的非均匀网格上构造古典的有限差分格式．使用这些网格的目的是为了在宽度为$O(\varepsilon)$的边界层区域内获得更多的网格点．由于构造了特殊网格，因此就不必知道问题

1 河海大学计算机及信息工程学院，南京 210098

(1.4)解的导数估计．众所周知，条件(1.2)隐含了边界值问题(1.4)有唯一解 u_ε．为了便于计算，我们在同样网格上构造问题(1.3)的差分格式．如果用Simpson公式[4]计算 $y(x_i)$ 的近似值 y_i，整个工作量为 $O(n^2)$ 次，为此我们利用问题(1.4)差分格式原有的系数来计算 y_i，使整个工作量降为 $O(n)$ 次．为了使问题(1.3)的差分格式的解四阶($O(h^4)$)收敛于原问题的解，我们改变了网格生成函数，又为了便于分析和计算，我们取分界点为网格点 t_k．

文章的最后给出了一些数值例子，表明了理论的收敛精度是正确的．

全文的常数 C 与 ε 和离散网格步长无关．

二、连 续 问 题

现在让我们来考虑问题(1.3)和(1.4)．我们可以证明下面两个定理，其中定理 2 的证明基于(1.4)的可逆单调性(见[8]，[11])．

定理1 若(1.2)式成立，则问题(1.3)的解 $y(x)\in C^6(I)$ 满足：

$$|y^{(i)}(x)|\leqslant C,\qquad x\in I\ \ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6) \tag{2.1}$$

定理2 若(1.2)式成立，则问题(1.4)的解 $u_\varepsilon\in C^8(I)$ 满足：

$$|u_\varepsilon^{(i)}(x)|\leqslant\begin{cases}C(1+\varepsilon^{-i}\exp(-\gamma x/\varepsilon)), & 0\leqslant x\leqslant 1/2\\ C(1+\varepsilon^{-i}\exp(-\gamma(1-x)/\varepsilon)), & 1/2\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\qquad (i=0,1,2,\cdots,6) \tag{2.2}$$

三、离 散 格 式

下面我们将考虑离散网格 $I_h=\{x_i=\lambda(t_i):\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n\}$，其中 $t_i=ih,h=1/n,n=2n_0$，$n_0\in N$ 且

$$n\geqslant\frac{9L}{8(1-2t_k)\gamma^2K},\qquad 0<K<1 \tag{3.1}$$

$t_k\in I_h\cap(0,\ 0.5-\varepsilon_0^{1/3})$ 是常数

令网格生成函数为

$$\lambda(t)=\begin{cases}\omega(t):=a\varepsilon t/(q-t), & t\in[0,\ t_k]\\ \pi(t):=A(t-t_k)^2+\omega'(t_k)(t-t_k)+\omega(t_k), & t\in[t_k,\ 0.5]\\ 1-\lambda(1-t), & t\in[0.5,\ 1]\end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $q=t_k+\varepsilon^{1/3}$．系数 A 由 $\pi(0.5)=0.5$ 给出，a 是满足于下式的常数

$$0<a\varepsilon^{1/3}(0.5q-t_k^2)\leqslant 0.5$$

因此 $A\geqslant 0$ 且 $\pi'(t)$ 是非减函数，从而我们有

$$\lambda^{(m)}(t)\geqslant 0,\qquad m=0,\ 1\quad t\in I \tag{3.3}$$

进一步有

$$\left.\begin{aligned}&\omega^{(m)}(t_k)\sim C\varepsilon^{(2-m)/3}, && (m=0,\ 1,\ 2)\\ &\lambda^{(0)}(t)\leqslant 1, && t\in I\\ &\lambda^{(1)}(t)\leqslant 2/(1-2t_k), && t\in I\\ &\omega^{(2)}(t)\leqslant C, && t\in[0,\ t_k)\cup(1-t_k,\ 1]\\ &\pi^{(2)}(t)\leqslant C, && t\in(t_k,\ 0.5)\cup(0.5,\ 1-t_k)\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

为了构造问题(1.3)、(1.4)的差分格式，我们分别在$x_i\in I_h'$，$x_i\in I_h\backslash I_h'$上用Hermite型差分公式来近似微分方程(1.3)、(1.4)，其中

$$I_h'=\{x_i\in I_h: q-3h<t_{i-1}<t_k\text{或}1-t_k<t_{i+1}<1-q+3h\}$$

$$h=1/n,\ t_i=ih\qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

注意集合I_h'可能是空集。

公式的系数不是常数，而是依赖于x_{i-1}，x_i，x_{i+1}。我们可以类似于均匀网格上的方法获得这些系数。现在我们考虑问题(1.3)、(1.4)，设

$$\begin{aligned}N_1y(x_i)=&a_{-1}(i)y(x_{i-1})+a_0(i)y(x_i)+a_1(i)y(x_{i+1})\\&+b_{-1}(i)L_1y(x_{i-1})+b_0(i)L_1y(x_i)+b_1(i)L_1y(x_{i+1})\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}N_2u(x_i)=&A_{-1}(i)u(x_{i-1})+A_0(i)u(x_i)+A_1(i)u(x_{i+1})\\&+B_{-1}(i)L_2u(x_{i-1})+B_0(i)L_2u(x_i)+B_1(i)L_2u(x_{i+1})\end{aligned}\tag{3.6}$$

从下列方程组我们可以得到系数$a_p(i)$，$b_p(i)$，$A_p(i)$，$B_p(i)$，$p=-1$，0，1

$$\left.\begin{aligned}&N_1x_i^m=0\qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)\\&b_{-1}(i)+b_0(i)+b_1(i)=1\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

$$\left.\begin{aligned}&N_2x_i^m=0\qquad (m=0,1,2,3,4)\\&B_{-1}(i)+B_0(i)+B_1(i)=1\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

令$h_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1$，2，$\cdots$，n，则从方程组(3.7)、(3.8)可得：

$$\left.\begin{aligned}&a_{-1}(i)=\frac{-2}{h_i(h_i+h_{i+1})},\quad b_{-1}(i)=\frac{h_i^2-h_{i+1}^2+h_ih_{i+1}}{6h_i(h_i+h_{i+1})}\\&a_0(i)=\frac{2}{h_ih_{i+1}},\quad b_0(i)=\frac{h_i^2+h_{i+1}^2+3h_ih_{i+1}}{6h_ih_{i+1}}\\&a_1(i)=\frac{-2}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})},\quad b_1(i)=\frac{h_{i+1}^2-h_i^2+h_ih_{i+1}}{6h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}\end{aligned}\right\}\tag{3.9}$$

$$\left.\begin{aligned}&A_{-1}(i)=\varepsilon^2a_{-1}(i)+a_{i-1}B_{-1}(i),\quad B_{-1}(i)=b_{-1}(i)\\&A_0(i)=\varepsilon^2a_0(i)+a_iB_0(i),\quad B_0(i)=b_0(i)\\&A_1(i)=\varepsilon^2a_1(i)+a_{i+1}B_1(i),\quad B_1(i)=b_1(i)\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

其中$a_i=a(x_i)$。这样我们就近似微分方程(1.3)、(1.4)如下：

$$\left.\begin{aligned}&N_1^hy_0=y_0=0\\&N_1^hy_i=a_{-1}(i)y_{i-1}+a_0(i)y_i+a_1(i)y_{i+1}\\&\qquad+b_{-1}(i)f_{i-1}+b_0(i)f_i+b_1(i)f_{i+1}=0\qquad (i=1,\ \cdots,\ n-1)\\&N_1^hy_n=y_n=0\end{aligned}\right\}\tag{3.11}$$

$$\left.\begin{aligned}&N_2^hu_0=u_0=0\\&N_2^hu_i=A_{-1}(i)u_{i-1}+A_0(i)u_i+A_1(i)u_{i+1}\\&\qquad+B_{-1}(i)y_{i-1}+B_0(i)y_i+B_1(i)y_{i+1}=0\qquad (i=1,\ \cdots,\ n-1)\\&N_2^hu_n=u_n=0\end{aligned}\right\}\tag{3.12}$$

其中$a_p(i)$，$b_p(i)$，$A_p(i)$，$B_p(i)$，$p=-1$，0，1满足(3.9)、(3.10)，如果$x_i\in I_h'$，$B_{-1}(i)=B_1(i)=0$，$B_0(i)=1$。

从方程组(3.11)、(3.12)，我们就可以得到问题(1.1)的近似解。

四、误差分析

我们可以很容易地证明下面引理：

引理 $a_p(i)$，$B_p(i)$，$p=-1$，0，1由(3.9)、(3.10)给定，若$x_i\in I'_h$，$B_{-1}(i)=B_1(i)=0$，$B_0(i)=1$，则

(i) $a_{-1}(i)+a_0(i)+a_1(i)=0$，$B_{-1}(i)+B_0(i)+B_1(i)=1$

$a_{-1}(i)<0$，$a_0(i)>0$，$a_1(i)<0$，$B_0(i)\geqslant 5/6 \quad (i=1, 2, \cdots, n-1)$

(ii) 若$x_i\in I'_h$，$B_{-1}(i)=B_1(i)=0$，$B_0(i)=1$

若$x_i\in I_h\backslash I'_h$

$$-\frac{5}{24}\leqslant B_{-1}(i)\leqslant B_1(i),\quad \frac{1}{12}\leqslant B_1(i)\leqslant\frac{1}{6} \qquad (i=1, 2, \cdots, n_0-1)$$

$$-\frac{5}{24}\leqslant B_1(i)\leqslant B_{-1}(i),\quad \frac{1}{12}\leqslant B_{-1}(i)\leqslant\frac{1}{6} \qquad (i=n_0+1, \cdots, n-1)$$

证明

(i) 直接证明很容易。

(ii) 若$x_i\in I'_h$，显然。

若$x_i\in I_h\backslash I'_h$，既然对$i=n_0+1$，…，$n-1$证明是类似的，在此我们仅考虑$i=1$，2，…，$n_0-1$，

$$t_{i-1}\leqslant t_k\leqslant q-3h \text{ 或 } t_{i-1}\leqslant q-3h\leqslant t_k \text{ 或 } t_k\leqslant t_{i-1}\leqslant 0.5$$

$$\Rightarrow \frac{h_{i+1}}{h_i}\leqslant 3\Rightarrow B_{-1}(i)\geqslant -\frac{5}{24}$$

既然$\lambda'(t)>0$，$h_{i+1}\geqslant h_i>0$，因此$B_1(i)\geqslant B_{-1}(i)$，且不难证明$1/12\leqslant B(i)\leqslant 1/6$。 证毕

定理3 若(1.2)式成立，则方程组(3.11)(即$N_1^h y^h=0$)有唯一解$y^h=[y_0, y_1,\cdots,y_n]^T$，并且对$y=[y(x_0), y(x_1), \cdots, y(x_n)]^T$，$y^h\in R^{n+1}$，下面稳定不等式成立：

$$\|y-y^h\|_\infty\leqslant 2\|N_1^h y-N_1^h y^h\|_\infty$$

证明 对任意$v=[v_0, v_1, \cdots, v_n]^T$，$N_1^h$的Frechet导数$N_1^{h(\prime)}(v)$是一个三对角矩阵

$$N_1^{h(\prime)}(v)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ a_{-1}(1) & a_0(1) & a_1(1) & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & a_{-1}(n-1) & a_0(n-1) & a_1(n-1) \\ & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中$a_p(i)$，$p=-1$，0，1由(3.9)给出。

我们将$N_1^{h(\prime)}(v)$分解成一个下三角矩阵L和一个上三角矩阵U的乘积，即$N_1^{h(\prime)}(v)=LU$，其中

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -l_1 & l_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & -l_i & l_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -l_{n-1} & l_{n-1} \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_i=\frac{2}{(h_i+h_{i+1})(h_1+\cdots+h_i)}$$

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ & u_{11} & u_{12} & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & u_{i1} & u_{i2} & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$u_{i1}=\frac{h_1+\cdots+h_{i+1}}{h_{i+1}},\ u_{i2}=\frac{-(h_1+\cdots+h_i)}{h_{i+1}}$$

容易看出$[N_1^{h(\prime)}(v)]^{-1}$存在，因此方程组(3.11)有唯一解$y^h$.求出$L^{-1}$，$U^{-1}$，则易知$\|L^{-1}\|_\infty\leqslant 2$，$\|U^{-1}\|_\infty\leqslant 1$，从而

$$\|[N_1^{h(\prime)}(v)]^{-1}\|_\infty=\|U^{-1}L^{-1}\|_\infty\leqslant\|U^{-1}\|_\infty\|L^{-1}\|_\infty\leqslant 2 \tag{4.1}$$

既然$N_1^hy-N_1^hy^h=N_1^{h(\prime)}(v)(y-y^h)$，由(4.1)可得：

$$\|y-y^h\|_\infty\leqslant 2\|N_1^hy-N_1^hy^h\|_\infty$$

证毕

定理4 若(1.2)式成立，则方程组(3.12)(即$N_2^hu^h=0$)有唯一解$u^h=[u_0,\ u_1,\ \cdots,\ u_n]^T$，并且对$u_e=[u(x_0),\ u(x_1),\ \cdots,\ u(x_n)]^T$，$u^h\in R^{n+1}$，下面稳定不等式成立：

$$\|u_e-u^h\|_\infty\leqslant\frac{1}{\delta}\left(\|N_2^hu_e-N_2^hu^h\|_\infty+\frac{17}{12}\|y-y^h\|_\infty\right)$$

其中$\delta=2(1-K)\gamma^2/3$，　　$0<K<1$

证明 对任意$v=[v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_n]^T$，$N_2^h$的 Frechet 导数$N_2^{h(\prime)}(v)$是一个三对角矩阵

$$N_2^{h(\prime)}(v)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ A_{-1}(1) & A_0(1) & A_1(1) & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & A_{-1}(n-1) & A_0(n-1) & A_1(n-1) \\ & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中$A_p(i)$，$p=-1$，0，1由(3.10)给出.

令 $\delta^*=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1}\delta_i$，$\delta_i=|A_0(i)|-|A_{-1}(i)|-|A_1(i)|$. 由于$\delta_i=\delta_{n-i}$，我们将只考虑$i=1$，2，…，$n_0-1$. 注意到$B_{-1}(i)\geqslant-5/24$，我们将考虑两种情况：$B_{-1}(i)<0$和$B_{-1}(i)\geqslant 0$.

1. $B_{-1}(i)<0$，$A_{-1}(i)<0$，$A_0(i)>0$

(i) $A_1(i)\leqslant 0$，
$$\begin{aligned}\delta_i&=\varepsilon^2(a_{-1}(i)+a_0(i)+a_1(i))+a_{i-1}B_{-1}(i)+a_iB_0(i)+a_{i+1}B_1(i)\\&=a_i-B_{-1}(i)a'(\theta_{i-1})h_i+B_1(i)a'(\theta_{i+1})h_{i+1}\\&\geqslant 2\gamma^2/3-3Lh_{i+1}/8\end{aligned}$$

(ii) $A_1(i)\geqslant 0$，
$$\begin{aligned}\delta_i&=-2\varepsilon^2a_1(i)+a_{i-1}B_{-1}(i)+a_iB_0(i)-a_{i+1}B_1(i)\\&>(1-2B_1(i))a_i-\frac{5}{24}|a'(\theta_{i-1})|h_i-\frac{1}{6}|a'(\theta_{i+1})|h_{i+1}\\&\geqslant 2\gamma^2/3-3Lh_{i+1}/8\end{aligned}$$

其中　　$x_{i-1}\leqslant\theta_{i-1}\leqslant x_i$，$x_i\leqslant\theta_{i+1}\leqslant x_{i+1}$

2. $B_{-1}(i)\geqslant 0$，$\delta_i\geqslant 2\gamma^2/3-3Lh_{i+1}/8$.

容易看出

$$\delta^* = \min_{1\le i\le n-1} \delta_i \geq \min_{1\le i\le n-1}\left(\frac{2}{3}\gamma^2 - \frac{3}{8}Lh_{i+1}\right)$$

既然存在$\theta\in(t_i, t_{i+1})$使$h_{i+1}=\lambda'(\theta)h$，并由(3.1)、(3.4)得：

$$\delta^* \geq 2(1-K)\gamma^2/3 \triangleq \delta, \qquad 0<K<1$$

和

$$\|[N_2^{h(\prime)}(v)]^{-1}\|_\infty \leq 1/\delta \tag{4.2}$$

由Hadamard定理[6]知，方程组(3.12)有唯一解u^h。

令

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ B_{-1}(1) & B_0(1) & B_1(1) & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & B_{-1}(n-1) & B_0(n-1) & B_1(n-1) & \\ & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中$B_p(i)$，$p=-1, 0, 1$满足(3.10)，如果$x_i\in I_h'$，$B_{-1}(i)=B_1(i)=0$，$B_0(i)=1$。由引理可证得：

$$\|B\|_\infty \leq 17/12 \tag{4.3}$$

既然$N_2^h u_\varepsilon - N_2^h u^h = N_2^{h(\prime)}(v)(u_\varepsilon - u^h) + B(y-y^h)$，由(4.2)、(4.3)可得：

$$\|u_\varepsilon - u^h\|_\infty \leq \frac{1}{\delta}\left(\|N_2^h u_\varepsilon - N_2^h u^h\|_\infty + \frac{17}{12}\|y-y^h\|_\infty\right)$$

证毕

下面两个定理是本文的主要结果。

定理5 若(1.2)式成立，则$\|y-y^h\|_\infty \leq Ch^4$，其中离散网格由(3.1)、(3.2)给出且$n>\max\{9L/8(1-2t_k)\gamma^2K, 3/t_k\}$，$0<K<1$。

证明 如果$y(x)\in C^6(I)$，则

$$\begin{aligned} N_1^h y(x_i) - N_1^h y_i &= N_1^h y(x_i) \\ &= (h_{i+1}-h_i)(2h_i^2+2h_{i+1}^2+5h_ih_{i+1})y^{(5)}(x_i)/180 \\ &\quad - \frac{h_i^5}{360(h_i+h_{i+1})}y^{(6)}(\theta_i^1) - \frac{h_{i+1}^5}{360(h_i+h_{i+1})}y^{(6)}(\theta_i^2) \\ &\quad + \frac{h_i^3(h_i^2-h_{i+1}^2+h_ih_{i+1})}{144(h_i+h_{i+1})}y^{(6)}(\theta_i^3) + \frac{h_{i+1}^3(h_{i+1}^2-h_i^2+h_ih_{i+1})}{144(h_i+h_{i+1})}y^{(6)}(\theta_i^4) \end{aligned}$$

其中θ_i^1，θ_i^2，θ_i^3，$\theta_i^4\in(x_{i-1}, x_{i+1})$。由(3.4)和定理1，3，我们可得：

$$\|y-y^h\|_\infty \leq Ch^4$$

证毕

定理6 若(1.2)式成立，则$\|u-u^h\|_\infty \leq Ch^4$，其中离散网格同定理5。

证明 如果$u(x)\in C^6(I)$，则

$$\begin{aligned} N_2^h u(x_i) - N_2^h u_i &= N_2^h u(x_i) \\ &= \varepsilon^2[(h_{i+1}-h_i)(2h_i^2+2h_{i+1}^2+5h_ih_{i+1})u^{(5)}(x_i)/180] \\ &\quad + \varepsilon^2\left[-\frac{h_i^5}{360(h_i+h_{i+1})}u^{(6)}(\theta_i^1) - \frac{h_{i+1}^5}{360(h_i+h_{i+1})}u^{(6)}(\theta_i^2)\right. \\ &\quad \left. + \frac{h_i^3(h_i^2-h_{i+1}^2+h_ih_{i+1})}{144(h_i+h_{i+1})}u^{(6)}(\theta_i^3) + \frac{h_{i+1}^3(h_{i+1}^2-h_i^2+h_ih_{i+1})}{144(h_i+h_{i+1})}u^{(6)}(\theta_1^4)\right] \\ &\triangleq \varepsilon^2(P_i+Q_i) \end{aligned}$$

其中θ_i^1，θ_i^2，θ_i^3，$\theta_i^4\in(x_{i-1},\ x_{i+1})$。既然对$i=n_0+1$，…，$n-1$证明是类似的，在此我们将仅考虑$i=1$，2，…，$n_0-1$，即$x_i\in(0,\ 1/2)$.下面我们分三种情况给出$\varepsilon^2(P_i+Q_i)$的估计.

情况1 $t_{i-1}\geqslant t_k$，我们有

$$
\begin{aligned}
|\varepsilon^2P_i|+|\varepsilon^2Q_i| &\leqslant C\varepsilon^2h^4(1+\varepsilon^{-5}\exp(-\gamma x_i/\varepsilon))+C\varepsilon^2h^4(1+\varepsilon^{-6}\exp(-\gamma x_{i-1}/\varepsilon))\\
&\leqslant Ch^4+C\varepsilon^{-3}\exp(-\gamma\lambda(t_k)/\varepsilon)h^4+C\varepsilon^{-4}\exp(-\gamma\lambda(t_k)/\varepsilon)h^4\\
&\leqslant Ch^4+C\varepsilon^{-4}\exp(-C/\varepsilon^{1/3})h^4\\
&\leqslant Ch^4
\end{aligned}
$$

因此$\varepsilon^2|P_i+Q_i|\leqslant Ch^4$.

情况2 $t_{i-1}<t_k$且$t_{i-1}\leqslant q-3h$，则

$$t_{i+1}<q\text{且}q-t_{i+1}\geqslant(q-t_{i-1})/3$$

因此并由(3.4)我们可得：

$$h_{i+1}\leqslant Ch\varepsilon/(q-t_{i-1})^2$$

且

$$h_{i+1}-h_i\leqslant Ch^2\omega''(t_{i+1})\leqslant Ch^2\varepsilon/(q-t_{i-1})^3\leqslant Ch^2$$

很容易看出

$$
\begin{aligned}
|\varepsilon^2P_i|+|\varepsilon^2Q_i| &\leqslant Ch^4\varepsilon^5/(q-t_{i-1})^7\cdot(1+\varepsilon^{-5}\exp(-\gamma x_i/\varepsilon))\\
&\quad+Ch^4\varepsilon^6/(q-t_{i-1})^8\cdot(1+\varepsilon^{-6}\exp(-\gamma x_{i-1}/\varepsilon))\\
&\leqslant Ch^4+Ch^4\cdot(q-t_{i-1})^{-8}\exp(-\gamma x_{i-1}/\varepsilon)\\
&\leqslant Ch^4
\end{aligned}
$$

因此$\varepsilon^2|P_i+Q_i|\leqslant Ch^4$.

情况3 $0<q-3h<t_{i-1}<t_k$，此时只可能有

$$\varepsilon^{1/3}\leqslant Ch\text{即}\varepsilon^2\leqslant Ch^6$$

且

$$
\begin{aligned}
N_2^hu(x_i)-N_2^hu_i &=(A_{-1}(i)u(x_{i-1})+A_0(i)u(x_i)+A_1(i)u(x_{i+1}))+y(x_i)\\
&=\varepsilon^2u''(\theta_i)+\varepsilon^2u''(x_i)\\
&=2\varepsilon^2u''(\theta_i')\triangleq S_i
\end{aligned}
$$

$$|S_i|\leqslant C\varepsilon^2(1+\varepsilon^{-2}\exp(-\gamma x_{i-1}/\varepsilon))\leqslant C(\varepsilon^2+\exp(-C/h))\leqslant Ch^4$$

其中θ_i，$\theta_i'\in(x_{i-1},\ x_{i+1})$. 综上我们有

$$|N_2^hu(x_i)-N_2^hu_i|\leqslant Ch^4$$

再由定理4，5，我们可得：

$$\|u_\varepsilon-u^h\|_\infty\leqslant Ch^4$$

证毕

五、数 值 例 子

我们考虑下面例子：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon^2u^{(4)}-u''=2+\pi^2(\varepsilon^2\pi^2+1)\sin(\pi x)\\&u(0)=u(1)=0,\ u''(0)=u''(1)=0\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

此方程的精确解为

$$u(x)=\sin(\pi x)+2\varepsilon^2\left(\frac{\exp[-x/\varepsilon]+\exp[-(1-x)/\varepsilon]}{1+\exp[-1/\varepsilon]}-1\right)-x(x-1)$$

我们用E_n表示$|u_\varepsilon(x_i)-u^h(x_i)|$，$i\in I_h$的最大值，即

$$E_n=\|u_{\varepsilon h}-u^h\|_\infty$$

且定义收敛阶数Ord为：

$$\mathrm{Ord}=(\log E_n-\log E_{2n})/\log 2$$

在此我们期望Ord＝4。

表 1 给出了(5.1)的数值结果。

表 1 $a=6.0,\ t_k=0.125,\ n\geqslant 24$

n \ ε	2^{-6}	2^{-12}	2^{-18}	2^{-24}	2^{-30}	
32	3.2429e−6	2.4419e−4	9.2643e−4	1.3227e−3	9.9899e−4	E_n
	3.98	3.84	3.68	3.58	3.66	Ord
64	2.0567e−7	1.7101e−5	7.2185e−5	1.1098e−4	7.8858e−5	E_n
	3.99	3.96	3.90	3.88	3.89	Ord
128	1.2906e−8	1.1015e−6	4.8443e−6	7.5378e−6	5.3016e−6	E_n
	4.00	3.99	3.97	3.97	3.97	Ord
256	8.075e−10	6.9552e−8	3.0943e−7	4.8150e−7	3.3878e−7	E_n
q	0.3750000	0.1875000	0.1406250	0.1289063	0.1259766	

本文写于研究生期间，曾得到导师王国英副教授的大力帮助，在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] N. S. Bakhvalov, K optimaizacii metodov resheniya kraevykh zacach pri nalichii pogranichnogo sloya, *Zh. Vychisl. Mat. Mat.Fiz.*, 9 (1969), 841—859.

[2] B. P. Doolan, J. J. H. Miller and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin (1980).

[3] A. M. Il'in, Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative, *Math. Notes. Acad. Sci. USSR*, 6 (1969), 569—602.

[4] J. Thomas King, *Introduction to Numerical Computation*, McGraw-Hill Inc. (1984).

[5] E. O' Riordan and M.Stynes, An analysis of a superconvergence result for a singularly perturbed boundary value problem, *Math. Comp.*, 46 (1986), 81—92.

[6] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Interative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, 1st Ed. Academic Press, New York London (1970).

[7] R. Vulanovic, A uniform numerical method for quasilinear singular perturbation problems without turning points, *Computing*, 41 (1989), 97—106.

[8] G. I. Shishkin, Raznostnaya skhema na neravnomernoi setke dlya differentialnogo uravneniya s malym parametrom pri starshei proizvodnoi, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 23 (1983), 609—619.

[9] M. Stynes and E. O' Riordan, A uniform accurate finite element method for a singular perturbation problem in conservative form,*SIAM. J. Numer. Anal.*, 23(2) (1986), 369—375.

[10] Sun Qiren, Uniformly convergent difference method for a class of singular

perturbation problem of fourth-order quasilinear ordinary differential equation, *Proceedings of MMM*, Shanghai (1987).

[11] R. Vulanovic, On a numerical solution of a type of singularly perturbed boundary value problem by using a special discretization mesh, *Zb. Rad. Prir. Mat. Fak. Univ. Novom. Sadu Ser. Mat.*, 13 (1983), 187—201.

[12] 王国英、陈明伦, 四阶常微分方程奇异摄动问题的二阶精度差分解, 应用数学和力学, 11(5) (1990), 431—438.

Fourth-Order Accurate Difference Method for the Singular Perturbation Problem

Liu Chuanhan

(*College of Computer and Information Engineering, Hehai University, Nanjing* 210098, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, the numerical solution of fourth-order ordinary differential equatations is considered. To approximate the differential equation, the Hermitian scheme on a special nonequidistant mesh is used. The fourth order convergence uniform in the perturbation parameter is proved. The numercal result shows the pointwise convergence, too.

Key words nonequidistant mesh, mesh generating function, Hermitian scheme, uniformly convergence