应用数学和力学，第18卷 第10期（1997年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

无力磁场和Beltrami流

酆庆增[1]

（钱伟长推荐，1996年1月18日收到，1997年3月17日收到修改稿）

摘　　要

场矢量处处平行其旋度的管式矢量场具有复杂的拓扑结构，而且通常表现出混沌行为．本文提供了具有常数比例因子的这类矢量场在三种基本坐标系内的解析解，并指出完全导电流体内的一个Beltrami流能维持一个定常无力磁场，如果磁场矢量处处平行速度．

关键词　解析解　最大螺旋度　混沌磁力线

一、引　　论

Lüst和Schlüter[1]曾指出，宇宙磁场可能常满足条件

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=\alpha\boldsymbol{H} \tag{1.1}$$

这里$\boldsymbol{H}$为磁场强度，α是标量因子．在这个条件下电流处处平行磁场，而且洛仑兹力

$$\boldsymbol{L}=\frac{1}{4\pi}\mathrm{curl}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}$$

消失．考虑到磁场无散度

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0 \tag{1.2}$$

我们得到

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{grad}\alpha=0 \tag{1.3}$$

这可以从对方程(1.1)取散度推出．因此，磁力线总是位于α等于常数的曲面上；除非在某区域D

$$\alpha=\mathrm{constant} \tag{1.4}$$

则单根磁力线可以填满D的某一子空间，也就是说，可能会出现混沌磁力线．

Woltjer[2]证明了在完全导电流体内磁螺旋度

$$\mathscr{H}_m=\int_V \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{A}dV \tag{1.5}$$

是不变的，只要在包围体积V的表面S上$\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{A}=0$，这里$\boldsymbol{A}$是矢势，$\boldsymbol{n}$是$S$的单位外法线矢量．这个量表示磁力线的连结度或打结性[3]．

理想不可压缩流体的运动由欧拉方程描述

---

1 北京大学力学和工程科学系，国家湍流重点实验室，北京 100871

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=\boldsymbol{u}\times \mathrm{curl}\boldsymbol{u}-\mathrm{grad}h \tag{1.6}$$

这里，$h=p/\rho+u^2/2$，连续性方程为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u}=0 \tag{1.7}$$

Arnold[4]注意到，由于定常欧拉流满足

$$\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}h=0$$

流线总是位于h等于常数的曲面上；仅当某区域 D 内速度矢量处处平行涡旋矢量的情况下，即

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u} \tag{1.8}$$

才允许流线避开这个限制。这就是 Beltrami 流，它与无力磁场问题在数学上是相似的。Beltrami 流的流线在λ为常数的区域内可以变为混沌的，相应的现象称作“Lagrange 湍流”[5]。

Moffaff[3]曾证明流螺旋度

$$\mathscr{H}_f=\int_V \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{u}dV \tag{1.9}$$

对一正压理想流动是不变的，如果在包围体积V且跟随流体运动的曲面S上$\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{u}=0$.这个结果可以解释为涡线的连结度或打结性的守恒。从方程(1.8)可推出 Beltrami 流具有最大螺旋度，这隐含着存在复杂的拓扑结构。

注意到以下事实也许是重要的：一个Beltrami 流在完全导电流体内能诱导一个定常无力磁场，因为我们有

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=\mathrm{curl}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})=0 \tag{1.10}$$

只要$\boldsymbol{H}$处处平行$\boldsymbol{u}$，而且一个无力磁场不会影响流动。根据Woltjer定理[2]，常因子 α无力场代表一个封闭系统可以达到的最低磁能状态。这就一般地证明了常数因子α 无力场的稳定性。

常数因子α无力磁场的轴对称解首先是由Chandrasekhar[6] 给出的。我们将在下面给出在三个基本坐标系内的更一般的解析解。在本文其余部分，我们将考虑α等于常数的情形。

二、球极坐标系内的解

一个无力磁场可表示成二部分之和

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{T}+\boldsymbol{P} \tag{2.1}$$

这里$\boldsymbol{T}$和$\boldsymbol{P}$满足如下方程

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{T}=\alpha\boldsymbol{P} \tag{2.2}$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{P}=\alpha\boldsymbol{T} \tag{2.3}$$

显然$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{H}$是管式矢量场，而且$\boldsymbol{H}$满足方程(1.1)。如果我们令

$$\boldsymbol{T}=\mathrm{grad}f\times\boldsymbol{r} \tag{2.4}$$

这里f是一标量函数，从方程(2.2)我们有

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{\alpha}\mathrm{curl}(\mathrm{grad}f\times\boldsymbol{r}) \tag{2.5}$$

按照 Elsasser[7]，$\boldsymbol{T}$ 叫做环向矢量场，$\boldsymbol{P}$ 叫做极向矢量场．Chandrasekhar[6] 首先提出，无力场可以进行这样的分解．

由于方程(2.3)左边可以表示为

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{P}=-\frac{1}{\alpha}\Delta(\mathrm{grad}f\times\boldsymbol{r})=-\frac{1}{\alpha}\mathrm{grad}(\Delta f)\times\boldsymbol{r}$$

这里Δ是拉普拉斯算子，从方程(2.3)和(2.4)我们有

$$\mathrm{grad}(\Delta f+\alpha^2 f)\times\boldsymbol{r}=0 \tag{2.6}$$

这要求

$$\Delta f+\alpha^2 f=g(r) \tag{2.7}$$

这里非齐次项g是r的任意标量函数．我们可以找到方程(2.7)的特解f_0，它也仅依赖于r．方程(2.7)的一般解可表示为二部分之和

$$f=\psi(r,\ \theta,\ \varphi)+f_0(r) \tag{2.8}$$

这里ψ是Helmholtz方程

$$\Delta\psi+\alpha^2\psi=0 \tag{2.9}$$

的一般解，f_0是方程(2.7)的特解．由于$\mathrm{grad}f_0\times\boldsymbol{r}=0$，从方程(2.4) 可知，$f_0$ 设有物理后果．我们可以不失一般性地令

$$f_0=0 \tag{2.10}$$

方程(2.9)的分离变量解很容易求得，可表示成如下形式

$$\psi=R_l(\alpha r)Y_{lm}(\theta,\ \varphi) \tag{2.11}$$

这里R_l是l阶一般球函数，它是 l 阶球贝塞尔函数 j_l(第一类)和y_l(第二类)的任意线性组合

$$R_l(\alpha r)=Aj_l(\alpha r)+By_l(\alpha r) \tag{2.12}$$

Y_{lm}是球谐函数

$$Y_{lm}(\theta,\ \varphi)=CP_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix} \tag{2.13}$$

这里P_l^m是连带勒让得函数，$(r,\ \theta,\ \varphi)$是球极坐标．由(2.11)给出的 ψ 我们可计算环向场和极向场．无力磁场在球极坐标系中的分量可表示为

$$\left.\begin{aligned}
H_r&=l(l+1)\frac{1}{\alpha r}R_l(\alpha r)Y_{lm}(\theta,\ \varphi)\\
H_\theta&=R_l(\alpha r)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_{lm}(\theta,\varphi)+\frac{1}{\alpha r}\frac{\partial}{\partial r}[rR_l(\alpha r)]\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}(\theta,\varphi)\\
H_\varphi&=-R_l(\alpha r)\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}(\theta,\ \varphi)+\frac{1}{\alpha r}\frac{\partial}{\partial r}[rR_l(\alpha r)]\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_{lm}(\theta,\varphi)\\
&l=1,\ 2,\ \cdots;\quad m=0,\ 1,\ \cdots,\ l
\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

$m=0$的情形相应于轴对称场，这是Chandrasekhar[6]给出的．

α 间断面上的条件是

$$H_r=0,\quad H_\theta\text{和}H_\varphi\text{连续}^{[6]} \tag{2.15}$$

磁力线由以下方程决定

$$\frac{dr}{H_r}=\frac{rd\theta}{H_\theta}=\frac{r\sin\theta d\varphi}{H_\varphi} \tag{2.16}$$

对$m=0$的情形，我们得到首次积分

$$rR_l(\alpha r)\sin\theta P_l^1(\cos\theta)=\text{constant} \tag{2.17}$$

三、柱坐标系内的解

考虑柱坐标系$(r,\ \theta,\ z)$内的无力磁场．如果我们令

$$\boldsymbol{T}=\text{grad}f\times\boldsymbol{k} \tag{3.1}$$

这里$\boldsymbol{k}$是z轴方向的单位矢量，从方程(2.2)我们有

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{\alpha}\text{curl}(\text{grad}f\times\boldsymbol{k}) \tag{3.2}$$

同时方程(2.3)要求

$$\text{grad}(\Delta f+\alpha^2 f)\times\boldsymbol{k}=0 \tag{3.3}$$

从这个条件我们得到

$$\Delta f+\alpha^2 f=g(z) \tag{3.4}$$

这里g是z的任意函数．方程(3.4)的解可表示为二部分之和

$$f=\psi(r,\ \theta,\ z)+f_0(z) \tag{3.5}$$

这里ψ是Helmholtz方程的一般解，f_0是方程(3.4)的特解．由于$\text{grad}f_0\times\boldsymbol{k}=0$，显然从方程(3.1)可知$f_0$无物理后果．Helmholtz方程在柱坐标系内的分离变量解为

$$\psi=R(\sqrt{\alpha^2-s^2}\,r)\Theta(k\theta)Z(sz) \tag{3.6}$$

这里

$$\left\{\begin{aligned}&R(\sqrt{\alpha^2-s^2}\,r)=A_1J_k(\sqrt{\alpha^2-s^2}\,r)+A_2Y_k(\sqrt{\alpha^2-s^2}\,r) &(3.7)\\ &\Theta(k\theta)=B_1\cos k\theta+B_2\sin k\theta,\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots &(3.8)\\ &Z(sz)=C_1\cos sz+C_2\sin sz &(3.9)\end{aligned}\right.$$

J_k和Y_k分别是第一和第二类贝塞尔函数；A_1，A_2，B_1，B_2，C_1，C_2是任意常数．矢量场$\boldsymbol{T}$和$\boldsymbol{P}$可按方程(3.1)和(3.2)计算．柱坐标系内无力磁场的各分量由下式给出

$$\left.\begin{aligned}H_r&=\frac{1}{r}R\Theta'Z+\frac{1}{\alpha}R'\Theta Z'\\ H_\theta&=-R'\Theta Z+\frac{1}{\alpha r}R\Theta'Z'\\ H_z&=\frac{\alpha^2-s^2}{\alpha}R\Theta Z\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

这里

$$R'=\frac{dR}{dr},\quad \Theta'=\frac{d\Theta}{d\theta},\quad Z'=\frac{dZ}{dz} \tag{3.11}$$

磁力线由以下方程决定

$$\frac{dr}{H_r}=\frac{rd\theta}{H_\theta}=\frac{dz}{H_z} \tag{3.12}$$

对于$k=0$的情形（即无力场不依赖于θ），很容易找到这些方程的一个积分，我们有

$$rR'Z=\text{constant} \tag{3.13}$$

对于$s=0$的情形（即无力场不依赖于z）可得另一积分

$$R\Theta = \text{constant} \tag{3.14}$$

在这两种情形下，磁力线总是位于二维曲面上．但这些情形的迭加会产生混沌磁力线．

四、直角坐标系内的解

考虑直角坐标系$(x,\ y,\ z)$内的无力场．方程式(3.1)～(3.3)依然成立（显然，我们也可以选择其它单位矢量取代$\boldsymbol{k}$）．方程(3.3)要求

$$\Delta f + \alpha^2 f = g(z) \tag{4.1}$$

这里g是z的任意函数．方程(4.1)的解可表示为二部分之和

$$f = \psi(x,\ y,\ z) + f_0(z) \tag{4.2}$$

这里ψ是Helmholtz方程在直角坐标系内的一般解，f_0是方程(4.1)的特解．由于$\operatorname{grad} f \times \boldsymbol{k} = 0$，$f_0$无物理后果．Helmholtz 方程在直角坐标系内的分离变量解可表为

$$\psi = X(sx)Y(ty)Z(\sqrt{\alpha^2 - s^2 - t^2}\, z) \tag{4.3}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} X &= A_1\cos sx + A_2\sin sx \\ Y &= B_1\cos ty + B_2\sin ty \\ Z &= C_1\cos\sqrt{\alpha^2 - s^2 - t^2}\, z + C_2\sin\sqrt{\alpha^2 - s^2 - t^2}\, z \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

矢量场$\boldsymbol{T}$和$\boldsymbol{P}$可按方程(3.1)和(3.2)计算．无力磁场在直角坐标系内的分量由下式给出

$$\left.\begin{aligned} H_x &= XY'Z + \frac{1}{\alpha}X'YZ' \\ H_y &= -X'YZ + \frac{1}{\alpha}XY'Z' \\ H_z &= \frac{\alpha^2 + t^2}{\alpha}XYZ \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

这里

$$X' = \frac{dX}{dx},\quad Y' = \frac{dY}{dy},\quad Z' = \frac{dZ}{dz} \tag{4.6}$$

磁力线由以下方程决定

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z} \tag{4.7}$$

对于$s=0$的情形（即无力场不依赖于x），可得到这些方程的一个积分

$$H_x = Y'Z = \text{constant} \tag{4.8}$$

所以系统是可积的．对于$t=0$的情形（即无力场不依赖于y），我们得到

$$H_y = -X'Z = \text{constant} \tag{4.9}$$

对于$\alpha^2 = s^2 + t^2$的情形（即无力场不依赖于z），我们有

$$H_z = \alpha XY = \text{constant} \tag{4.10}$$

在这些可积情形中，磁力线是规则的，但这些情形的迭加会产生混沌磁力线．

作者感谢S．Chandrasekhar教授的善意评论．

参考文献

[1] R. Lüst and S. Schlüter, Kraftfreie magnetfelder, *Z. Astrophys.*, **34** (1954), 263—282.

[2] L. Woltjer, A theorem on force-free magnetic fields, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **44** (1958), 489—491.

[3] H. K. Moffatt, The degree of knottedness of tangled vortex lines, *J. Fluid Mech.*, **35** (1969), 117—129.

[4] V. I. Arnold, Sur la topologie des écoulements stationaires des fluides parfaits, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **26** (1965), 17—20.

[5] T. Dombre, et al., Chaotic streamlines and Lagrangian turbulences: the ABC flow, *J. Fluid Mech.*, **167** (1986), 353.

[6] S. Chandrasekhar, On force-free magnetic fields, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **42** (1956), 1—5.

[7] W. M. Elssasser, Introduction effects in terrestrial magnetism, *Phys. Rev.*, **69** (1946), 106—116.

[8] R. H. G. Helleman, Self-generated chaotic behavior in nonlinear mechanics, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, Vol. **5** eds. by E. D. G. Cohen, North-Holland (1980), 165—233.

On Force-Free Magnetic Fields and Beltrami Flows

Feng Qingzeng

(National Laboratory for Turbulence Research; Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, *P. R. China)*

Abstract

Solenoidal vector fields, which satisfy the condition that the field vector everywhere parallels to its curl, have complex topological structures, and usually show chaotic behaviors. In this paper, analytical solutions for vector fields with constant proportional factor in three basic coordinate systems are presented and it is pointed out that a Beltrami flow can sustain a steady force-free magnetic field in a perfectly conducting fluid, provided the magnetic field is parallel to the velocity everywhere.

Key words analytical solutions, maximal helicity, chaotic lines of force