

# 均布载荷作用下变厚度开顶扁球壳的 非线性稳定问题

严圣平<sup>1</sup>

(何福保推荐, 1996年5月20日收到)

## 摘 要

本文首先应用逐步加载法将具有硬中心的开顶扁球壳在均布载荷作用下的非线性微分方程组线性化, 然后利用样条配点法解线性微分方程组, 得到了临界载荷的数值。

**关键词** 变厚度开顶扁球壳 非线性稳定性 逐步加载法 样条配点法

## 一、引 言

在建筑和精密仪器的弹性元件中, 经常使用具有硬中心的边缘固定的开顶扁球壳。在建筑工程中, 要防止其失稳现象发生; 而在精密仪器的弹性元件中, 则可利用其失稳时的跳跃现象作为自动控制的信号。

## 二、基本方程和边界条件

图 1 所示变厚度开顶扁球壳在均布载荷  $q$  作用下的基本方程为

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - N_r \left( \frac{r}{R} + \frac{dw}{dr} \right) + \frac{dD}{dr} \left( \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) &= \frac{q}{2r} (r^2 - b^2) \\ \frac{r}{Eh} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) + \frac{dw}{dr} \left( \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} \right) &= \frac{1}{Eh^2} \frac{dh}{dr} \left[ r \frac{d(rN_r)}{dr} - \mu r N_r \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

式中:  $w$  为壳弯曲时的挠度;  $N_r$  为壳体径向薄膜力;  $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$  为抗弯刚度, 这里  $h$  为壳体厚度,  $E, \mu$  分别为弹性模量及泊松比。

设壳体厚度按指数规律变化, 其表达式为

$$h = h_0 \exp \left[ -\frac{\beta}{6} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (2.2)$$

<sup>1</sup> 中国矿业大学数力系, 江苏徐州 221008

通过适当选取 $h_0$ 和 $\beta$ 的值,可用上式来拟合实际问题中的某些壳厚的变化规律。

边界条件为

$$\text{当 } r=a \text{ 时: } w=0, \frac{dw}{dr}=0, \frac{d}{dr}(rN_r) - \mu N_r = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{当 } r=b \text{ 时: } \frac{dw}{dr}=0, \frac{d}{dr}(rN_r) - \mu N_r = 0 \quad (2.4)$$

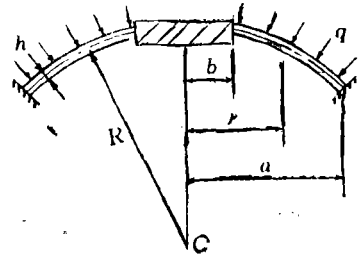


图 1

引入无量纲量

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{r}{a}, \quad \lambda = \frac{b}{a}, \quad Y = \frac{w}{h_0}, \quad K = \frac{a^2}{Rh_0} \\ Q &= \frac{6a^4(1-\mu^2)q}{Eh_0^4}, \quad \Phi = K\rho + \frac{dY}{d\rho}, \quad S = \frac{12(1-\mu^2)a^2\rho N_r}{Eh_0^3} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

将式(2.5)代入式(2.1)、(2.3)、(2.4),并引用算子 $L = \rho(d/d\rho)(1/\rho)(d/d\rho)$ ,便得

$$\left. \begin{aligned} L(\rho\Phi) &= \beta \left[ \rho^2 \frac{d\Phi}{d\rho} + \mu\rho\Phi - (1+\mu)\rho^2 K \right] + [S\Phi + Q(\rho^2 - \lambda^2)] \exp\left(\frac{\beta\rho^2}{2}\right) \\ L(\rho S) &= \frac{\beta}{3} \left( \mu\rho S - \rho^2 \frac{dS}{d\rho} \right) - 6(1-\mu^2)(\Phi^2 - K^2\rho^2) \exp\left(-\frac{\beta\rho^2}{6}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$(\lambda \leq \rho \leq 1)$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时: } Y=0, \quad \Phi=K, \quad \frac{dS}{d\rho} - \mu S = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{当 } \rho=\lambda \text{ 时: } \Phi=K\lambda, \quad \lambda \frac{dS}{d\rho} - \mu S = 0 \quad (2.8)$$

### 三、用逐步加载法将基本方程线性化

设第 $k-1$ 次加载后 $Q, \Phi, S$ 的值分别为 $Q_{k-1}, \Phi_{k-1}, S_{k-1}$ 。在第 $k-1$ 次加载后的基础上进行第 $k$ 次加载,设第 $k$ 次加载量 $q_k$ 是个小量,在此加载步骤中, $\Phi, S$ 分别获得一小增量 $\varphi_k, s_k$ ,则第 $k$ 次加载后 $Q, \Phi, S$ 的值分别为

$$Q_k = Q_{k-1} + q_k, \quad \Phi_k = \Phi_{k-1} + \varphi_k, \quad S_k = S_{k-1} + s_k \quad (3.1)$$

因为基本方程(2.6)在第 $k-1$ 次及第 $k$ 次加载后都是成立的,故有

$$\left. \begin{aligned} L(\rho\Phi_{k-1}) &= \beta \left[ \rho^2 \frac{d\Phi_{k-1}}{d\rho} + \mu\rho\Phi_{k-1} - (1+\mu)\rho^2 K \right] \\ &\quad + [S_{k-1}\Phi_{k-1} + Q_{k-1}(\rho^2 - \lambda^2)] \exp\left(\frac{\beta\rho^2}{2}\right) \\ L(\rho S_{k-1}) &= \frac{\beta}{3} \left( \mu\rho S_{k-1} - \rho^2 \frac{dS_{k-1}}{d\rho} \right) - 6(1-\mu^2)(\Phi_{k-1}^2 - K^2\rho^2) \exp\left(-\frac{\beta\rho^2}{6}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} L(\rho(\Phi_{k-1}+\varphi_k)) &= \beta \left[ \rho^2 \frac{d(\Phi_{k-1}+\varphi_k)}{d\rho} + \mu\rho(\Phi_{k-1}+\varphi_k) - (1+\mu)\rho^2 K \right] \\ &+ [(S_{k-1}+s_k)(\Phi_{k-1}+\varphi_k) + (Q_{k-1}+q_k)(\rho^2-\lambda^2)] \exp\left(\frac{\beta\rho^2}{2}\right) \\ L(\rho(S_{k-1}+s_k)) &= \frac{\beta}{3} \left[ \mu\rho(S_{k-1}+s_k) - \rho^2 \frac{d(S_{k-1}+s_k)}{d\rho} \right] \\ &- 6(1-\mu^2)[(\Phi_{k-1}+\varphi_k)^2 - K^2\rho^2] \exp\left(-\frac{\beta\rho^2}{6}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

将式(3.3)减去式(3.2), 并略去两个增量的乘积, 便得基本方程(2.6)的线性化方程

$$\left. \begin{aligned} L(\rho\varphi_k) &= \beta \left( \rho^2 \frac{d\varphi_k}{d\rho} + \mu\rho\varphi_k \right) + [S_{k-1}\varphi_k + \Phi_{k-1}s_k + q_k(\rho^2-\lambda^2)] \cdot \exp\left(\frac{\beta\rho^2}{2}\right) \\ L(\rho s_k) &= \frac{\beta}{3} \left( \mu\rho s_k - \rho^2 \frac{ds_k}{d\rho} \right) - 12(1-\mu^2)\Phi_{k-1}\varphi_k \cdot \exp\left(-\frac{\beta\rho^2}{6}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

由式(2.7)、(2.8)可得用增量表示的边界条件为

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时: } y_k=0, \varphi_k=0, \frac{ds_k}{d\rho} - \mu s_k=0 \quad (3.5)$$

$$\text{当 } \rho=\lambda \text{ 时: } \varphi_k=0, \lambda \frac{ds_k}{d\rho} - \mu s_k=0 \quad (3.6)$$

式中  $y_k$  为第  $k$  次加载步骤中  $Y$  所获得的增量。

#### 四、用样条配点法求解线性微分方程

设  $\rho_m=m/n=\lambda$ ,  $\rho_i=i/n$  ( $i=m-1, m, m+1, \dots, n, n+1$ ), 则  $\varphi_k, s_k$  可表为

$$\varphi_k = \sum_{i=m-1}^{n+1} A_{ki} \Omega_3((\rho-\rho_i)n), \quad s_k = \sum_{i=m-1}^{n+1} B_{ki} \Omega_3((\rho-\rho_i)n) \quad (4.1)$$

式中  $\Omega_3(\rho)$  为等距结点分布的三次  $B$  样条函数,  $A_{ki}, B_{ki}$  为待求系数。

将式(4.1)代入基本方程(3.4), 并以  $\rho=\rho_i$  代入, 便得

$$\left. \begin{aligned} & \left[ i^2 - \frac{i}{2} - \frac{1}{6} + \frac{i^2\beta(3i-\mu)}{6n^2} - \alpha_1 S_{k-1,i} \right] A_{k,i-1} - 2 \left[ i^2 + \frac{1}{3} + \frac{i^2\mu\beta}{3n^2} + 2\alpha_1 S_{k-1,i} \right] A_{ki} \\ & + \left[ i^2 + \frac{i}{2} - \frac{1}{6} - \frac{i^2\beta(3i+\mu)}{6n^2} - \alpha_1 S_{k-1,i} \right] A_{k,i+1} \\ & - \alpha_1 \Phi_{k-1,i} (B_{k,i-1} + 4B_{ki} + B_{k,i+1}) - 6\sigma_1 \left( \frac{i^2}{n^2} - \lambda^2 \right) q_k \\ & = 0 \\ & \frac{2i(1-\mu^2) \cdot \exp(-\beta i^2/6n^2)}{n} \Phi_{k-1,i} (A_{k,i-1} + 4A_{ki} + A_{k,i+1}) \\ & + \left[ i^2 - \frac{i}{2} - \frac{1}{6} - \frac{i^2\beta(3i+\mu)}{18n^2} \right] B_{k,i-1} \\ & - 2 \left( i^2 + \frac{1}{3} + \frac{i^2\mu\beta}{9n^2} \right) B_{ki} + \left[ i^2 + \frac{i}{2} - \frac{1}{6} + \frac{i^2\beta(3i-\mu)}{18n^2} \right] B_{k,i+1} \\ & = 0 \end{aligned} \right\} \quad (i=m, m+1, \dots, n) \quad (4.2)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \frac{i \cdot \exp(\beta i^2 / 2n^2)}{6n} \\ \Phi_{k-1,i} &= \Phi_{k-1} \Big|_{\rho=\rho_i} = K\rho_i + \sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j \Big|_{\rho=\rho_i} = K\rho_i + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{A_{j,i-1} + 4A_{j,i} + A_{j,i+1}}{6} \\ S_{k-1,i} &= S_{k-1} \Big|_{\rho=\rho_i} = \sum_{j=1}^{k-1} s_j \Big|_{\rho=\rho_i} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{B_{j,i-1} + 4B_{j,i} + B_{j,i+1}}{6} \end{aligned} \right\} (4.3)$$

将式(4.1)代入边界条件(3.5b,c)、(3.6), 便得

$$\left. \begin{aligned} A_{k,n-1} + 4A_{kn} + A_{k,n+1} &= 0 \\ (3n+\mu)B_{k,n-1} + 4\mu B_{kn} - (3n-\mu)B_{k,n+1} &= 0 \end{aligned} \right\} (4.4)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{k,m-1} + 4A_{km} + A_{k,m+1} &= 0 \\ (3n\lambda+\mu)B_{k,m-1} + 4\mu B_{km} - (3n\lambda-\mu)B_{k,m+1} &= 0 \end{aligned} \right\} (4.5)$$

由式(2.5f)得

$$\varphi_k = dy_k/d\rho$$

对上式积分, 并考虑到边界条件(3.5a), 便得各结点处的挠度增量

$$\begin{aligned} y_{ki} &= y_k \Big|_{\rho=\rho_i} = \int_1^{\rho_i} \varphi_k d\rho \\ &= \frac{1}{n} \left[ - \sum_{j=i-1}^{n-2} A_{kj} + \frac{23}{24} (A_{k,i-1} - A_{k,n-1}) + \frac{1}{2} (A_{ki} - A_{kn}) + \frac{1}{24} (A_{k,i+1} - A_{k,n+1}) \right] \\ &\quad (i=m, m+1, \dots, n) \end{aligned} (4.6)$$

在上式中令*i*=*m*, 便得壳内边缘无量纲挠度增量

$$y_{km} = \frac{1}{n} \left[ - \sum_{j=m-1}^{n-2} A_{kj} + \frac{23}{24} (A_{k,m-1} - A_{k,n-1}) + \frac{1}{2} (A_{km} - A_{kn}) + \frac{1}{24} (A_{k,m+1} - A_{k,n+1}) \right] (4.7)$$

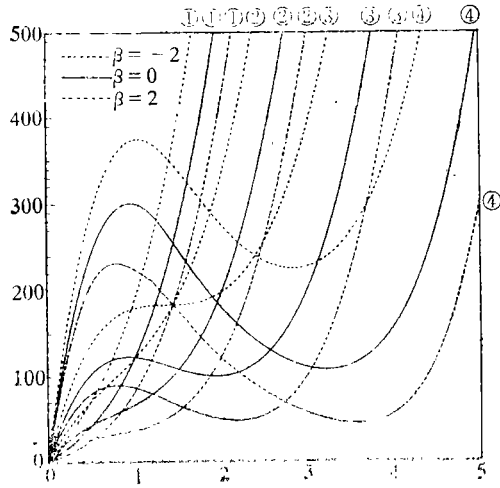
这样, 原问题便化为求解由式(4.2)、(4.4)、(4.5)、(4.7)组成的线性代数方程组。若给定 $y_{km}$ 和*n*的值, 利用递推公式便可求出 $q_k$ 的值。

## 五、结果分析

作者取 $y_{km}=0.001$ ,  $n=100$  对 $\lambda=0.3$ ,  $K=0, 2, 4, 6$ ,  $\beta=-2, 0, 2$  的(板)壳进行了计算, 其特征曲线如图2所示,  $V_m$ 表示壳内边缘 $\rho=\lambda$ 处的无量纲挠度, 作者还取 $n=1000$ 对一些壳进行了计算, 与 $n=100$ 时的结果相比, 其相对误差小于 $10^{-3}$ 。

记壳体失稳的临界点的几何参数为 $K_0$ 。其含义是: 当 $K < K_0$ 时, 壳体不会发生失稳现象; 当 $K \geq K_0$ 时, 壳体就会发生失稳现象。记临界载荷为 $Q^*$ 。图3中给出了 $K_0$ - $\lambda$ 关系曲线, 图4中给出了 $Q^*$ - $\lambda$ 关系曲线。

对于图3中的三条曲线, 都存在 $K_0$ 的一个极小值, 相应于这一极小值的壳体对失稳反映最灵敏。



①  $K=0$ ; ②  $K=2$ ; ③  $K=4$ ; ④  $K=6$

图2  $Y_m-Q$ 曲线( $\mu=0.3, \lambda=0.3$ )

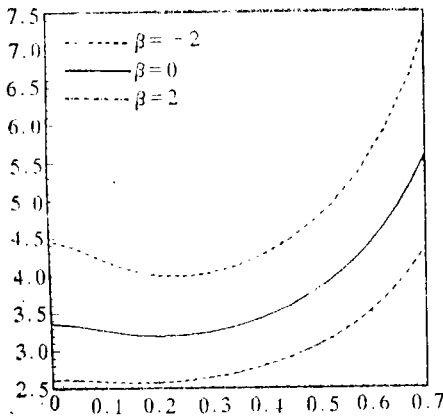


图3  $\lambda-K_0$ 曲线( $\mu=0.3$ )

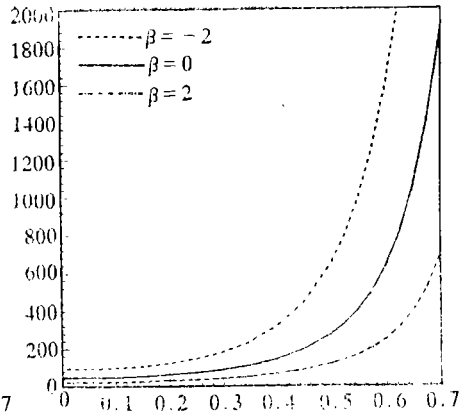


图4  $\lambda-Q^*$ 曲线( $\mu=0.3$ )

参 考 文 献

[1] 李岳生、齐东旭, 《样条函数方法》, 科学出版社 (1979).  
 [2] A. C. 沃耳密尔著, 卢文达译, 《柔韧板与柔韧壳》, 科学出版社 (1959).

# Nonlinear Stability of Truncated Shallow Spherical Shell with Variable Thickness under Uniformly Distributed Load

Yan Shengping

*(China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, P. R. China)*

## Abstract

In this paper, to begin with, the nonlinear differential equations of a truncated shallow spherical shell with variable thickness under uniformly distributed load are linearized by step-by-step loading method. The linear differential equations can be solved by spline collocation method. Critical loads have been obtained accordingly.

**Key words** truncated shallow spherical shell with variable thickness, nonlinear stability, step-by-step loading method, spline collocation method