应用数学和力学，第18卷 第9期（1997年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

白噪声参激Hopf分叉系统的两次分叉研究

刘先斌[1]　陈　虬[1]　陈大鹏[1]

（1996年3月6日收到，1997年5月3日收到修改稿）

摘　要

本文研究了白噪声参数激励下的Hopf分叉系统的两次分叉行为。明确了由于噪声的介入而使得系统的分叉类型产生了实质性的改变并导致了分叉点的漂移。

关键词　白噪声　参数激励　随机平均法

一、引　言

一般地，分叉理论研究当非线性动力系统的控制参数发生一个很小的变化时，其平衡产生的分支现象。非线性分析的目的在于研究系统的稳态运动，考察其稳定特性以及当动力系统的控制参数变化时其瞬态运动情况。而所谓随机分叉（stochastic bifurcation）是指，处于分叉邻域中的非线性系统在噪声作用下产生的转变（transition）现象。

本世纪七十年代末，Prigoging和Nicolis[1]，Haken[2]，Graham[3]注意到噪声对远离平衡态系统的长期行为（Long time behavior）以及对非平衡相变（Nonequilibrium phase transition）有着重要的影响，并开始了对随机分叉行为的研究。由于噪声介入的非线性随机系统的完整描述存在两个方面的含义：

（1）状态变量的样本函数满足的随机微分方程，对于白噪声（White noise）系统，为Ito随机微分方程。

（2）样本轨线之间的几率分布所满足的，对于Ito系统，FPK方程。

因而对于随机分叉的研究也存在着两种不同的思路。最初人们从白噪声系统方程的平稳解——不变测度（invariant measure）出发对随机分叉现象的数学物理本质进行研究以确定最大可能意义之下的分叉点位置和分叉解的形式[3]、[4]、[5]。

随着对随机分叉现象研究的不断深入，人们认识到它实质上是随机系统样本轨线的一种非线性奇异现象，反应了系统样本稳定性的突变机理。而不变测度方法对随机分叉信息的把握并不全面[4][6][22]。这是由于，根据遍历理论可知，不变测度$\mu(x)$实质是对任意样本轨线在x的无穷小邻域逗留时间的度量。因而它不可能对样本轨线本身状态作出精确的描述，而它们的极值亦只能在一定程度上反映系统最可能和最不可能的运动。

在对线性随机系统样本稳定性研究的基础之上[7],[8]，自八十年代以来，更多的研究者致

1 西南交通大学，成都 610031。

力于非线性随机系统样本稳定性的研究并重点考察了有关系统的最大Lyapunov指数的计算[9]、[10]、[11]、[12]，这是由于最大的Lyapunov指数已成为定义概率1意义上随机分叉点的重要指标．此时人们更加重视对非线性随机动力系统扩散解过程样本轨道“几何属性”的考察[13]．这个时期研究工作的重心与在确定动力系统理论研究中日益得到广泛应用的遍历理论的思路是一致的．

本文对于一类Hopf分叉系统受白噪声参激的情形，采用了经典的Khasminskii方法计算了其在平衡点处的线性化系统的最大Lyapunov指数，并确定了系统在概率1意义下的首次分叉点的位置；接着采用随机平均方法(stochastic averaging method)考察了对应于振幅随机微分方程的不变测度并确定了系统在最大可能意义下的二次分叉点和分叉解；明确了此时由于噪声的介入，使得分叉类型产生了实质的改变．

二、白噪参激Hopf分叉系统模型

考虑一类典型的Hopf分叉系统受参数随机扰动的模型

$$\begin{aligned}\dot{u}&=\mu u+\omega_0 v-\varepsilon u^3+u\sigma_1\xi_1(t)\\ \dot{v}&=-\omega_0 u+\mu v-\varepsilon u^2 v+v\sigma_2\xi_2(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 μ为分叉参数，ω_0为常数，ε为微小量．$\xi_1(t)$，$\xi_2(t)$分别表示相互独立的单位高斯白噪声过程，且随机微分方程(2.1)是Stratonovitch意义下的．参数σ_1，σ_2分别表示$\xi_1(t)$，$\xi_2(t)$的强度，并且设σ_1^2，σ_2^2，μ是与ε同阶的微小量．

对于确定的Hopf分叉系统($\sigma_1=\sigma_2=0$)，由于其线性化系统的Lyapunov矩阵的特征值的实部μ的退化而在平衡点($x=x=0$)处产生了一个极限环．我们首先将通过对系统(2.1)的线性化系统

$$\begin{aligned}\dot{u}&=\mu u+\omega_0 v+u\sigma_1\xi_1(t)\\ \dot{v}&=-\omega_0 u+\mu v+v\sigma_2\xi_2(t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

的最大Lyapunov指数和旋转数(rotation number)的确定以考察噪声对Hopf分叉系统的稳定性及其分叉行为的影响．

考虑Wong-Zakai修正项[14]，可以得到等价于Stratonovitch随机微分方程(2.2)的Ito随机微分方程

$$d\boldsymbol{u}=A\boldsymbol{u}dt+B_1\boldsymbol{u}dW_1+B_2\boldsymbol{u}dW_2\tag{2.3}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}\mu+\dfrac{\sigma_1^2}{2} & \omega_0\\ -\omega_0 & \mu+\dfrac{\sigma_2^2}{2}\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

$W_1(t)$和$W_2(t)$分别为独立的单位Wiener过程，对应(2.3)的向量解过程$\boldsymbol{u}$为一扩散过程[14]．

三、Khasminskii变换及其一维相扩散过程的不变测度

对扩散过程$\boldsymbol{u}$作Khasminskii变换[8]，将其映射到单位圆上．取变换

$$s_1=\cos\theta=\frac{u}{\|u\|},\quad s_2=\sin\theta=\frac{v}{\|u\|} \tag{3.1}$$

记

$$s=(s_1,s_2)^T=(\cos\theta,\ \sin\theta)^T,\ \rho=\ln\|u\|,\ \|u\|=(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

对ρ和$\theta(=\mathrm{arctg}(v/u))$采用Ito微分法则[14]并结合方程(2.3)可得以下有关ρ和θ的Ito随机微分方程

$$d\rho=Q(\theta)dt+\Sigma_r(\theta)dW_r(t) \tag{3.3}$$

$$d\theta=\Phi(\theta)dt+\Psi(\theta)dW_\theta(t) \tag{3.4}$$

其中$W_r(t)\,(r=1,2)$，$W_\theta(t)$是相互独立的单位过程．其中

$$Q(\theta)=s^TAs+\frac{1}{2}\mathrm{tr}B-s^TBs \tag{3.5}$$

$$\Sigma_r(\theta)=s^TB_rs\qquad(r=1,2) \tag{3.6}$$

$$\Phi(\theta)=-\tilde{s}^TAs+\tilde{s}^TBs \tag{3.7}$$

$$\Psi^{-2}(\theta)=\tilde{s}^TBs \tag{3.8}$$

在这个方程中，设

$$B(\theta)=\sum_{r=1}^{2}(B_rs)(B_rs)^T \tag{3.9}$$

$$\tilde{s}=-\frac{ds}{d\theta}=(s_2,-s_1)^T=(\sin\theta,-\cos\theta)^T$$

因而对应于(3.5)～(3.8)，进一步可得

$$Q(\theta)=\mu+(\sigma_1^2\cos^2\theta+\sigma_2^2\sin^2\theta)-(\sigma_1^2\cos^4\theta+\sigma_2^2\sin^4\theta) \tag{3.10}$$

$$\Sigma_1(\theta)=\sigma_1\cos^2\theta,\ \ \Sigma_2(\theta)=\sigma_2\sin^2\theta \tag{3.11}$$

$$\Phi(\theta)=-\omega_0+\frac{1}{2}(\sigma_2^2-\sigma_1^2)\sin\theta\cos\theta+(\sigma_1^2\cos^2\theta-\sigma_2^2\sin^2\theta)\sin\theta\cos\theta \tag{3.12}$$

$$\Psi^2(\theta)=(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{3.13}$$

对应于方程(2.3)的微分生成算子[8]为

$$\begin{aligned}L&=\Phi(\theta)\frac{d}{d\theta}+\frac{1}{2}\Psi^2(\theta)\frac{d^2}{d\theta^2}\\&=\left[-\omega_0+\frac{1}{2}(\sigma_2^2-\sigma_1^2)\sin\theta\cos\theta+(\sigma_1^2\cos^2\theta-\sigma_2^2\sin^2\theta)\sin\theta\cos\theta\right]\frac{d}{d\theta}\\&\quad+\left[\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\sin^2\theta\cos^2\theta\right]\frac{d^2}{d\theta^2}\end{aligned} \tag{3.14}$$

根据方程(3.4)及其系数关系(3.12)、(3.13)可知，θ为单位圆周上的一维扩散过程，其平稳的概率密度函数—不变测度 (invariant measure)$\mu(\theta)$满足以下的FPK方程[14]

$$L^*\mu(\theta)=0 \tag{3.15}$$

L^*是对应于L的伴随算子，即有

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\theta^2}[\Psi^2(\theta)\mu(\theta)]-\frac{d}{d\theta}[\Phi(\theta)\mu(\theta)]=0 \tag{3.16}$$

对(3.15)进行直接积分，可得$\mu(\theta)$的通解为：

$$\mu(\theta)=\frac{C}{\Psi^2(\theta)W(\theta)}+\frac{G}{\Psi^2(\theta)W(\theta)}\int W(\theta)d\theta \tag{3.17}$$

其中

$$W(\theta)=\exp\left[-2\int\Phi(\theta)\Psi^{-2}(\theta)d\theta\right] \tag{3.18}$$

C，G为待定的积分常数。

根据经典的一维扩散过程理论可知[15]，扩散过程θ在单位圆周上的奇点对其不变测度$\mu(\theta)$的具体形式有着决定性的影响。下面考察θ在单位圆周上的奇点特征。

显然当$\theta=0$，$\pi/2$，π，$3\pi/2$时

$$\Phi(\theta)=-\omega_0+\frac{1}{2}(\sigma_2^2-\sigma_1^2)\sin\theta\cos\theta+(\sigma_1^2\cos^2\theta-\sigma_2^2\sin^2\theta)\sin\theta\cos\theta=-\omega_0<0$$

$$\Psi^2(\theta)=(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\sin^2\theta\cos^2\theta=0$$

因此根据扩散过程奇点的定义可知[16]：0，$\pi/2$，π，$3\pi/2$均为扩散过程θ的左Shunt点。这时根据Kozin和Prodromou[17]，R. Mitchell和Kozin[18]以及Nishioka[19]的讨论可知有结论：

（1） θ在单位圆上的中心对称点处的不变测度形式相同，即

$$\mu(\theta)=\mu(\theta\pm\pi) \tag{3.19}$$

（2） θ在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上的不变测度为

$$\mu(\theta)=\begin{cases} GF(\theta) & \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<0\right) \\ GF\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) & \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{3.20}$$

其中

$$F(\theta)=\Psi^{-2}(\theta)W^{-1}(\theta)\int_{-\pi/2}^{\theta}W(\varphi)d\varphi \tag{3.21}$$

通过对(3.18)以及(3.20)、(3.21)的计算可知，当$\theta\in[-\pi/2,\ 0]$时，不变测度$\mu(\theta)$有形式

$$\mu(\theta)=\frac{G}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\exp(\gamma f(\theta))(\sin\theta)^{\alpha-2}(\cos\theta)^{\beta-2}\int_{-\pi/2}^{\theta}\exp[-\gamma f(\varphi)]\sin^{-\alpha}\varphi\cos^{-\beta}\varphi d\varphi \tag{3.22}$$

其中

$$f(\theta)=\mathrm{ctg}\theta-\mathrm{tg}\theta \tag{3.23}$$

$$\gamma=\frac{2\omega_0}{\sigma_1^2+\sigma_2^2},\quad \alpha=\frac{2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2},\quad \beta=\frac{2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \tag{3.24}$$

积分常数G可由不变测度$\mu(\theta)$的归一化条件

$$\int_0^{2\pi}\mu(\theta)d\theta=1$$

确定；并有结论

$$G^{-1}=2\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}F(\theta)d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}F\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)d\theta\right) \tag{3.25}$$

四、最大的Lyapunov指数与旋转数

由于扩散过程θ在单位圆周上的奇点均为左shunt点，因而根据一维扩散过程理论[18]可知，扩散过程θ在整个单位圆周上是遍历的（ergodic），于是根据Oseledec的乘法遍历定理(Multiplicative ergodic theorem)[13]可知，对应随机微分动力系统(2.3)的最大的Lyapunov指数和旋转数

$$\lambda=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.1}$$

$$\alpha=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\operatorname{arctg}\left(\frac{v}{u}\right) \tag{4.2}$$

分别由下面两式确定

$$\lambda=E[Q(\theta)]=\int_0^{2\pi}Q(\theta)\mu(\theta)d\theta \tag{4.3}$$

$$\alpha=E[\Phi(\theta)]=\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\mu(\theta)d\theta \tag{4.4}$$

Lyapunov指数反映了系统(2.1)解平均的指数变化率，而旋转数则反映了单位向量(s_1, s_2)的平均的旋转速率。

先考虑最大的Lyapunov指数。将(3.10)，(3.22)～(3.24)代入(4.3)并作积分变换$u=\operatorname{tg}\theta$有

$$\lambda=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}p(u)\gamma_1\exp[\gamma f(u)]u^{-1}du\int_{-\infty}^{u}\exp[-\gamma f(v)]v^{-1}dv}{\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_1\exp[\gamma f(u)]u^{-1}du\int_{-\infty}^{u}\exp[-\gamma f(v)]v^{-1}dv} \tag{4.5}$$

其中

$$f(u)=\frac{1}{u}-u \tag{4.6}$$

$$p(u)=\mu+\frac{1}{1+u^2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2u^2)-\frac{1}{(1+u^2)^2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2u^4) \tag{4.7}$$

$$\gamma_1=\frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \tag{4.8}$$

式(4.5)中的积分式是超越积分，因而无法得到其精确的完全积分的解析式。由于噪声的强度σ_1^2，σ_2^2是与ε同阶的微量，ω_0是一正常数。因而可以认为，γ，$\gamma_1\to+\infty$很大，这时运用以下的Laplace渐近积分定理可求得(4.5)的渐近积分式。

定理（Laplace）[20] 设$\varphi(x)$和$h(x)$是定义在有限或半无限区间$[\alpha,\ \beta]$上的实值连续函数，且

（1） $\varphi(x)\exp[h(x)]$在$[\alpha,\ \beta]$上对每一γ值均绝对可积；

（2） $h'(x)$，$h''(x)$是$[\alpha,\ \beta]$上的连续函数；

（3） $h(x)$在α处取得最大值，且$h'(x)<0$

于是当$\gamma\to+\infty$时，有

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\exp[\gamma h(x)]dx\approx-\varphi(\alpha)\exp(\gamma h(\alpha))\frac{1}{h'(\alpha)\gamma}$$

若以上定理的(3)改为

(3)′　$h(x)$在β处最大值，且$h'(\beta)>0$，则当$\gamma\to+\infty$时，有

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\exp[\gamma h(x)]dx\approx\varphi(\beta)\exp(\gamma h(\beta))\frac{1}{h'(\beta)\gamma}$$

运用渐近积分定理可知，当$\sigma_1^2+\sigma_2^2\to0$时，有

$$\begin{aligned}\lambda&=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\mu+(\sigma_1^2\cos^2\theta+\sigma_2^2\sin^2\theta)-(\sigma_1^2\cos^4\theta+\sigma_2^2\sin^4\theta)]d\theta\\&=\mu+\frac{1}{8}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+o(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2\end{aligned}\tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\omega_0+\left[\frac{1}{2}(\sigma_2^2-\sigma_1^2)+(\sigma_1^2\cos^2\theta+\sigma_2^2\sin^2\theta)\right]\sin\theta\cos\theta\right\}d\theta\\&=-\omega_0+o(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2\end{aligned}\tag{4.10}$$

根据式(4.9)可知，当$\lambda\geqslant0$时，即当$\mu\geqslant-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)/8$时，系统(2.1)的样本轨线在概率1的意义上失稳．因而$\mu=-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)/8$是受白噪声扰动的分叉系统(2.1)的分叉点，它相对于确定的分叉点$\mu=0(\sigma_1=\sigma_2=0)$提前出现了．从这个意义上来看，噪声项的介入减弱了原系统的稳定性．

五、不变测度、极值与噪声导致的Hopf分叉系统的二次分叉现象

对应于具有时齐解扩散过程的随机动力系统(2.1)，其不变测度$\mu(u)$定义为其对应的FPK方程解—转移概率密度函数$p(u,t|u_0)$当$t\to+\infty$时的极限（若此极限存在）．原则上不变测度总是与随机动力系统(2.1)的平稳解相关连的．而所谓(2.1)的解过程u平稳是指(u,ξ)是概率空间$(M\times\Omega,\ \mu)$上的平稳的向量随机过程，其中Ω对应于Wiener过程的样本空间，M对应于样本轨线$u=u(t,u_0,\omega)$的相空间．随机动力系统平稳解的重要意义有如确定动力系统的稳态解（平稳点、零点、不动点），而不变测度的"不变性"的意义是指它对定义在Ω上的推移算子半群的运算保持不变．这个性质与样本轨线所具有的对于相空间M中的点映射半群运算的"不变性"一道构成了概率空间$(\Omega\times M,\ \mu)$上有关随机流（Stochastic flow）和随机动力系统（Stochastic dynamical system）的定义基本前提．实质上不变测度的存在性与$(u,\ \xi)$的平稳性互为充要条件．

不变测度的物理意义在于它反映了系统长期性态在状态空间的分布几率关系，是对系统长期性态的重要描述．尽管不变测度对于非线性随机系统分叉信息的把握并不全面，尚有一定的局限性，但它始终将是随机分叉研究的一个很重要的辅助特征量．它对于随机系统失稳与否的判别机理与经典的离出问题（exit problem）的有关方法相一致，并且它与转变时间(transition time)一起构成了刻划噪声导致的转变现象与一般的混沌运动之间的差别的较为有效的特征量[21],[22]．

为了进一步完善对噪声导致的分叉行为的刻划，这里我们通过对不变测度及其极值情况的研究以考察随机分叉系统在经历了首次分叉以后，其可能出现的二次分叉现象并确定其在最大可能意义下的分叉解．

考虑对随机分叉系统(2.1)引入新变量，运动振幅$a(t)$和位相$\varphi(t)$，以及变量变换

$$u=a(t)\sin\phi(t),\ v=a(t)\cos\phi(t),\ \phi(t)=\omega_0 t+\varphi(t) \tag{5.1}$$

并认为$a(t)$，$\varphi(t)$均是慢变随机过程．经此变换，可得分叉系统(2.1)的有关a，φ的标准方程

$$\dot{a}=\left[\mu a-\frac{\varepsilon a^3}{2}(1-\cos2\phi)\right]+\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}a}{2}[(a_1\xi_1(t)+a_2\xi_2(t))+(a_2\xi_2(t)-a_1\xi_1(t))\cos2\phi] \tag{5.2}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2}\sin2\phi(a_1\xi_1(t)-a_2\xi_2(t)) \tag{5.3}$$

其中

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}a_1=\sigma_1,\quad \varepsilon^{\frac{1}{2}}a_2=\sigma_2 \tag{5.4}$$

且 a_1，a_2为正常数．对以上方程应用随机平均法(stochastic averaging method)可得有关振幅的Ito随机微分方程

$$da=m_a dt+\sigma_a dW_a(t) \tag{5.5}$$

其中 $W_a(t)$是单位的Wiener过程，m_a是漂移系数，σ_a是扩散系数且

$$m_a=\left(\mu'+\frac{m_{al}}{2}\right)a-\frac{\varepsilon}{2}a^3 \tag{5.6}$$

$$\sigma_a=m_a^{\frac{1}{2}}a \tag{5.7}$$

$$\mu'=\mu+\frac{\varepsilon}{8}(a_1^2+a_2^2)\pi K \tag{5.8}$$

$$m_{al}=\frac{3\varepsilon}{8}(a_1^2+a_2^2)\pi K \tag{5.9}$$

上式中K为白噪声过程$W_a(t)$的常数谱密度．对应于Ito方程(5.5)的FPK方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial a}\left\{\left[\left(\mu'+\frac{m_{al}}{2}\right)a-\frac{1}{2}a^3\right]p\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}[m_{al}a^2p] \tag{5.10}$$

及其初值条件

$$p(a,t|a_0.t_0)\to\delta(a-a_0),t\to t_0 \tag{5.11}$$

其中 $p(a,t|a_0,\ t_0)$为扩散过程$a(t)$的转移概率密度函数．而扩散过程$a(t)$的不变测度$\mu(a)$则满足以下退化的FPK方程

$$-\frac{\partial}{\partial a}\left\{\left[\left(\mu'+\frac{m_{al}}{2}\right)a-\frac{1}{2}a^3\right]\mu(a)\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}[m_{al}a^2\mu(a)]=0 \tag{5.12}$$

的解．对此方程直接积分可得

$$\mu(a)=\left(\frac{1}{m_{al}}\right)^m\frac{a^{2m-1}}{\Gamma(m)}\exp\left(-\frac{a^2}{2m_{al}}\right) \tag{5.13}$$

其中

$$m=\frac{\mu'}{m_{al}}>0,\quad \Gamma(m)=\int_0^{+\infty}\exp[-t]t^{m-1}dt$$

$\Gamma(m)$称为伽玛函数

关于不变测度$\mu(a)$的极值，Namachchivaya[5]认为它具有重要的意义，他以为：

（1） 极值点的个数与位置是$\mu(a)$的最显著的特征之一．它含有非线性随机系统稳态行为的根本信息．

（2）　作为确定系统稳态行为的推广，当噪声的强度趋近于零时，$\mu(a)$的极值趋近于表现确定系统的稳态行为．

（3）　若$a(t)$是一遍历过程，则根据Oseledec的乘法遍历定理可知，$\mu(a)$可以被当作样本轨线在a的邻域中停留时间的度量．因此极大值表示样本轨线在此点停留较多时间是稳定的而极小值则相反．这个原理与离出问题对稳定性的判别相似．

对于FPK方程(5.12)，最大可能意义上的振幅$\bar{a}$由极大值问题

$$\left.\frac{d\mu(a)}{da}\right|_{a=\bar{a}}=0,\quad \left.\frac{d^2\mu(a)}{da^2}\right|_{a=\bar{a}}<0 \tag{5.14}$$

确定．

根据(5.14)的第一式可得

$$a^{2m-1}>0,\quad a^2=2\mu'-m_{al} \tag{5.15}$$

欲使上面的第一式成立，须$2m-1>0$，即当

$$\mu>\frac{\pi K}{16}(\sigma_1^2+\sigma_2^2) \tag{5.16}$$

时，可得$\bar{a}=0$．此时考察(5.14)的第二式可知，当$\mu>\frac{\pi K}{16}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$时

$$\left.\frac{d^2\mu(a)}{da^2}\right|_{a=0}=0$$

根据(5.15)的第二式可得

$$a^2=2\mu'-m_{al}=2\mu-\frac{\pi K}{8}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

要使有意义，须使$2\mu'-m_{al}\geqslant 0$，即

$$\mu\geqslant\frac{\pi K}{16}(\sigma_1^2+\sigma_2^2) \tag{5.17}$$

且由(5.14)的第二式可知，当$\mu\geqslant\mu_2\left(=\frac{\pi K}{16}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\right)$时且在$\bar{a}=(2\mu-2\mu_2)^{\frac{1}{2}}$处有

$$\frac{d^2\mu(a)}{da^2}<0$$

即当$\mu\geqslant\mu_2$时，$\mu(a)$在$\bar{a}$处取得极大值．而$a=(2\mu-2\mu_2)^{\frac{1}{2}}$则对应于相空间中最大可能意义之下的“颜色最深”的极限环．此时系统(2.1)的分叉解的样本轨道的长期行为围绕在这个极限环周围形成了一个边界模糊的区域．而这个极限环则反映了，$\mu\geqslant\mu_2$时，平均振幅$a(t)$样本轨道长期状态的最大可能的运动．而μ_2无疑可以认为是系统除概率1意义上的分叉点$\mu=\mu_1\left(=-\frac{1}{8}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\right)$之外的另一个最大可能意义上的分叉点．

经过以上的分析可知，系统(2.1)存在有两个分叉点：概率1意义上的分叉点μ_1和最大可能意义上的分叉点μ_2且$\mu_1<0<\mu_2$．μ_1先于确定的Hopf分叉系统的分叉点$\mu=0$，μ_1的出现使系统的失稳提前了．当μ逐渐沿轴正向经过μ_1时，平凡解$a=0$失稳（概率1意义上），并分叉出非平凡的$a(t)$．但此时$a(t)$并不能构成一极限环．它的具体形式待定，因而μ_1不能理解为概率1意义上的Hopf分叉点．当μ穿过μ_2时，系统出现了最大可能意义上的极限环，但由于在$\mu_1\leqslant\mu\leqslant\mu_2$时，$a=0$是几乎肯定意义不稳定的，因而这个极限环已不能理解为从$a=0$分叉出来的．而μ_2亦不能理解为Hopf分叉点．

六、结　　论

本文通过对白噪声参激的Hopf分叉系统的最大Lyapunov指数、旋转数以及不变测度的考察获得了以下主要结论：

参激白噪声使得分叉类型产生了根本的改变，并使得分叉点的位置产生了变化．系统在分叉参数经过第二个分叉点后将产生最大可能意义上的极限环，而当经过第一个分叉点后并不能产生极限环．其分叉解的具体形式有待于进一步研究．

参 考 文 献

[1] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Nonequilibrum Systems*, Wiley, New York (1977).

[2] H. Haken, *Synergetics*, Springer-Verlag, Berlin (1977).

[3] R. Graham, Stochastic methods in nonequilibrium thermodynamics, in L. Arnold etc. eds., *Stochastic Nonlinear Systems in Physics, Chemistry and Biology*, Berlin, Springer-Verlag (1981), 202—212.

[4] C. Meunier and A. D. Verga, Noise and bifurcation, *J. Stat. Phys.*, **50**(1—2) (1988), 345—375.

[5] N. Sri Namachchivaya,Stochastic bifurcation, *Appl. Math. & Compt.*,**38** (1990) 101—159.

[6] L. Arnold, Lyapunov exponents of nonlinear stochastic systems, *Nonlinear Stochastic Dynamic Engrg. Systems*, F. Ziegler and G. I. Schueller eds., Springer-Verlag, Berlin, New York (1987), 181—203.

[7] R. Z. Khasminskii, Necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of linear stochastic systems, *Theory Prob. & Appl.*, **12**(1) (1967), 144—147.

[8] R. Z. Khasminskii, *Stochastic Stability of Differential Equations*, Sijthoff and Noordhoff Alphen aan den Rijn, the Netherlands, Rockville, Maryland, USA (1980).

[9] L. Arnold and V. Wihstutz, eds., Lyapunov Exponents, *Proc. of a Workshop held in Bremen*, November (12—15), 1984, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1986).

[10] S. T. Ariaratnam and W. C. Xie, Lyapunov exponent and rotation number of a twodimensional nilpotent stochastic system, *Dyna. & Stab. Sys.*, **5**(1) (1990), 1—9.

[11] S. T. Ariaratnam, D. S. F. Tam and W. C. Xie, Lyapunov exponents of two-degree-of-freedom linear stochastic systems, *Stochastic Structural Dynamics* 1, Y. K. Lin and I. Elishakoff eds., Springer-Verlag, Berlin (1991), 1—9.

[12] N. Sri Namachchivaya and S. Talwar, Maximal Lyapunov exponent and rotation number for stochastically perturbed co-dimension two bifurcation, *J. Sound & Vib.*, **169** (3) (1993),349—372.

[13] L. Arnold and W. Kliemann, Qualitative theory of stochastic systems, *Porb. Anal. and Related Topics*, A. T. Bharucha-Reid eds. Academic Press, New

York, Lindon, **3** (1993), 1—79.

[14] Z. Schuss, *Theory and Applications of Stochastic Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York (1980).

[15] K. Ito and H. P. McKean, Jr., *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, Springer-Verlag, New York (1965).

[16] S. Karlin and H. M. Yaylor, *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York (1981).

[17] F. Kozin ane S. Prodromou, Necessary and sufficient conditions for almost sure sample stability of linear Ito equations, *SIAM J. Appl. Math.*, **21** (1971), 413—424,

[18] R. R. Mitchell and F. Kozin, Sample stability of second order linear differential equations with wide band noise coefficients, *SIAM. J. Appl. Math.*, **27** (1974), 571—605.

[19] K. Nishoka, On the stability of two-dimensional linear stochastic systems, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **27** (1976), 221—230.

[20] 徐利治、陈文忠，《渐近分析方法及应用》，国防工业出版社 (1991).

[21] 尼科里斯、普利高津，《探索复杂性》(罗久里，陈奎宁泽)，四川教育出版社，成都 (1986).

[22] 刘先斌，《随机力学系统的分叉行为与变分方法研究》，西南交通大学博士学位论文，成都 (1995).

On the Two Bifurcatinos of a White-Noise Excited Hopf Bifurcation System

Liu Xianbin　Chen Qiu　Chen Dapeng

(*Southwest Jiaotong University, Chengdu* 610031, *P. R. China*)

Abstract

The present work is concerned with the behavior of the serond bifurcation of a Hopf bifurcation system excited by white noise. It is found that the intirvention of noises induces a drift of the bifurcation point along with the substantial change in bifurcation type.

Key words white noise, parametric excitation, stochastic averaging method