应用数学和力学，第18卷 第9期（1997年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

磁拱的运动学无力场

鄞 庆 增[1]

（钱伟长推荐，1996年1月18日收到，1997年5月6日收到修改稿）

摘 要

本文首先推导了完全导电流体内运动学磁拱无力场的基本方程，接着考虑了静态解和不定常相似性解。

关键词 无力场 磁拱 完全导电流体

一、引 论

发生在高导电率和低密度区域的宇宙磁场常常满足无力条件

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=\alpha(r,\ t)\boldsymbol{H} \tag{1.1}$$

这里 $\boldsymbol{H}$表示磁场强度，α是时间和位置的某个标量函数．这是因为在这种情形下压力梯度，或者重力，或者惯性力都不能与洛仑兹力平衡[1]．磁场是无散的，即有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0 \tag{1.2}$$

定态无力场由方程(1.1)决定，其中α不依赖于时间．如果我们要研究无力场的运动学演化，就必须引入磁感应方程．在导电率为无限的条件下，磁感应方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=\mathrm{curl}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})=(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{H} \tag{1.3}$$

其中 $\boldsymbol{v}$是流体速度矢量．

胡文瑞[2]利用方程(1.1)～(1.3)研究过轴对称运动学无力场．现在我们关注磁拱无力场的运动学演化，这与太阳耀斑和日冕环的物理学有关．太空实验室ATM曾报导[3]太阳耀斑的基本磁位形看来具有拱状的结构．

二、曲线坐标系和基本方程

我们采用正交曲线坐标系$(r,\ \theta,\ \varphi)$，它与笛卡儿坐标系$(x,\ y,\ z)$的关系为

$$\begin{cases} x=(R+r\cos\theta)\cos\varphi \\ y=(R+r\cos\theta)\sin\varphi \\ z=r\sin\theta \end{cases} \tag{2.1}$$

这里 R是拱或环的中心线半径（见图1）．这个曲线坐标系的线元由下式给出

1 北京大学力学和工程科学系，国家湍流重点实验室，北京 100871．

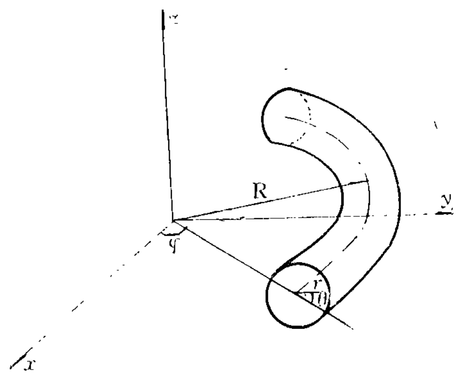

图1 曲线坐标系

$$ds^2 = h_1^2 dr^2 + h_2^2 d\theta^2 + h_3^2 d\varphi^2 \tag{2.2}$$

这里
$$\left.\begin{aligned} &h_1 = 1, \quad h_2 = r \\ &h_3 = R + r\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

在这曲线坐标系中，无散条件(1.2)取以下形式

$$\frac{\partial}{\partial r}[r(R+r\cos\theta)H_r] + \frac{\partial}{\partial\theta}[(R+r\cos\theta)H_\theta] + \frac{\partial}{\partial\varphi}(rH_\varphi) = 0 \tag{2.4}$$

我们假定磁场不依赖于φ角．因此，令

$$\boldsymbol{H} = \left(\frac{1}{r(R+r\cos\theta)}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\ -\frac{1}{R+r\cos\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r},\ H_\varphi\right) \tag{2.5}$$

可使得方程(2.4)满足，这里$\psi = \psi(r, \theta, t)$．

无力条件(1.1)现在变为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\theta}[h_3 H_\varphi] = \alpha\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial r}[h_3 H_\varphi] = \alpha\dfrac{\partial\psi}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right] + \dfrac{1}{h_2 h_3}\dfrac{\partial\psi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[\dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\right] = -\alpha H_\varphi \end{cases} \tag{2.6}$$

如果我们令

$$h_3 H_\varphi = G(\psi, t) \tag{2.7}$$

(2.6)的第一、二个方程约化为

$$\alpha(r, \theta, t) = \frac{\partial G}{\partial\psi} \tag{2.8}$$

(2.6)的第三个方程变为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{R+r\cos\theta}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = -G\frac{\partial G}{\partial\psi} \tag{2.9}$$

磁感应方程(1.3)可以写成分量的形式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H_r}{\partial t}=H_r\dfrac{\partial v_r}{\partial r}+\dfrac{H_\theta}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}-v_r\dfrac{\partial H_r}{\partial r}-\dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial H_r}{\partial\theta} & (2.10)\\ \dfrac{\partial H_\theta}{\partial t}=H_r\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}+\dfrac{H_\theta}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-v_r\dfrac{\partial H_\theta}{\partial r}-\dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial H_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{1}{r}(H_\theta v_r-H_r v_\theta) & (2.11)\\ \dfrac{\partial H_\varphi}{\partial t}=H_r\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\dfrac{H_\theta}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}-v_r\dfrac{\partial H_\varphi}{\partial r}-\dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial H_\varphi}{\partial\theta} & \\ \qquad+\dfrac{1}{R+r\cos\theta}[(v_r H_\varphi-v_\varphi H_r)\cos\theta+(v_\varphi H_\theta-v_\theta H_\varphi)\sin\theta] & (2.12)\end{cases}$$

考虑到

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0 \qquad (2.13)$$

将方程(2.5)中的$\boldsymbol{H}$代入，方程(2.10)和(2.11)简化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+v_r\dfrac{\partial\psi}{\partial r}+\dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\right]=0 & (2.14)\\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+v_r\dfrac{\partial\psi}{\partial r}+\dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\right]=0 & (2.15)\end{cases}$$

这样我们得到首次积分

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+v_r\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0 \qquad (2.16)$$

方程(2.16)右边可以包含时间的任意函数，但它不影响磁场的值，所以我们简单地略去它.

利用方程(2.5)我们可将方程(2.12)写成如下形式

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial\psi}\left(v_r\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{2G}{R+r\cos\theta}(v_\theta\sin\theta-v_r\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{v_\varphi}{R+r\cos\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) \qquad (2.17)$$

方程(2.9)，(2.13)，(2.16)，(2.17)是决定未知函数ψ，G，v_φ，v_r，v_θ的基本方程.

三、静 态 解

如果速度处处为零，即

$$v_r=v_\theta=v_\varphi=0 \qquad (3.1)$$

或者速度处处平行磁场:

$$\boldsymbol{v}=\beta\boldsymbol{H} \qquad (3.2)$$

从方程(2.5)，(2.16)，(2.17)我们得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial G}{\partial t}=0 \qquad (3.3)$$

这样静态无力场由方程(2.9)决定. 如果方程(2.8)中α是常数，则

$$G=\alpha\psi \qquad (3.4)$$

方程(2.9)变为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{R+r\cos\theta}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\alpha^2\psi=0 \tag{3.5}$$

引入以下变换

$$s=R+r\cos\theta,\quad \tau=r\sin\theta \tag{3.6}$$

方程(3.5)能重写成以下形式

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}-\frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial s}+\alpha^2\psi=0 \tag{3.7}$$

令

$$\psi(s,\ \tau)=sS(s)T(\tau) \tag{3.8}$$

从方程(3.7)我们得到

$$T''\pm\omega^2T=0 \tag{3.9}$$

$$S''+\frac{1}{s}S'+\left[(\alpha^2\mp\omega^2)-\frac{1}{s^2}\right]S=0 \tag{3.10}$$

这里撇号代表对宗量的微商．如果我们取方程(3.9)，(3.10)中上面的符号，则方程(3.7)的解可写为

$$\begin{aligned}\psi(s,\ \tau)=s\Big\{&\int_\alpha^\infty[A_1(\omega)\sin\omega\tau+A_2(\omega)\cos\omega\tau)I_1(\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\ s)d\omega\\&+\int_\alpha^\infty[A_3(\omega)\sin\omega\tau+A_4(\omega)\cos\omega\tau]K_1(\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\ s)d\omega\\&+\int_0^\alpha[A_5(\omega)\sin\omega\tau+A_6(\omega)\cos\omega\tau]J_1(\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\ s)d\omega\\&+\int_0^\alpha[A_7(\omega)\sin\omega\tau+A_8(\omega)\cos\omega\tau]Y_1(\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\ s)d\omega\Big\}\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中 J_1和Y_1分别是第一类和第二类一阶贝塞尔函数，I_1和K_1是一阶变形贝塞尔函数，$A_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$是由边条件决定的系数．如果我们取方程(3.9)，(3.10)中下面的符号，方程(3.7)的解为

$$\begin{aligned}\psi(s,\ \tau)=s\Big\{&\int_0^\infty[B_1(\omega)\exp(-\omega\tau)+B_2(\omega)\exp(\omega\tau)]J_1(\sqrt{\omega^2+\alpha^2}\ s)d\omega\\&+\int_0^\infty[B_3(\omega)\exp(-\omega\tau)+B_4(\omega)\exp(\omega\tau)]Y_1(\sqrt{\omega^2+\alpha^2}\ s)d\omega\Big\}\end{aligned} \tag{3.12}$$

Chandrasekhar[4]指出在α的间断面上必须满足的条件：(1)$\boldsymbol{H}$的法线分量为零，(2)$\boldsymbol{H}$的切向分量连续．我们可以选择公式(3.11)中的A，或公式(3.12)中的B来满足这些条件．

四、不定常问题

我们假设速度也不依赖φ角．因此可令

$$\boldsymbol{v}=\left(\frac{1}{r(R+r\cos\theta)}\frac{\partial F}{\partial\theta},\ -\frac{1}{R+r\cos\theta}\frac{\partial F}{\partial r},\ v_\varphi\right) \tag{4.1}$$

使得方程(2.13)满足，这里$F=F(r,\ \theta,\ t)$．引入(3.6)定义的新变量s和τ，基本方程(2.9)，(2.16)，(2.17)可重写成如下形式

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2\psi}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}-\dfrac{1}{s}\dfrac{\partial\psi}{\partial s}=-G\dfrac{\partial G}{\partial\psi}\\
\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\dfrac{1}{s}\left[\dfrac{\partial\psi}{\partial s}\dfrac{\partial F}{\partial\tau}-\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}\dfrac{\partial F}{\partial s}\right]=0\\
\dfrac{\partial G}{\partial t}+\dfrac{1}{s}\left[\dfrac{\partial\psi}{\partial s}\dfrac{\partial F}{\partial\tau}-\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}\dfrac{\partial F}{\partial s}\right]\dfrac{\partial G}{\partial\psi}-\dfrac{2G}{s^2}\dfrac{\partial F}{\partial\tau}\\
\quad=\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial s}\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}-\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\tau}\dfrac{\partial\psi}{\partial s}-\dfrac{v_\varphi}{s}\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}
\end{cases}
\tag{4.2}
$$

为了寻找不定常运动的相似性解，我们设

$$
\psi=f_1(s,\ \tau)t^{k_1},\ F=f_2(s,\ \tau)t^{k_2},\ v_\varphi=f_3(s,\ \tau)t^{k_3},\ G=c\psi^n t^{k_4} \tag{4.3}
$$

这里$k_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$和n是实数。将(4.3)代入(4.2)，自洽性条件要求

$$
k_2=k_3=-1,\ k_4=(1-n)k_1 \tag{4.4}
$$

方程(4.2)变为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\tau^2}-\dfrac{1}{s}\dfrac{\partial f_1}{\partial s}=-c^2nf_1^{2n-1}\\
k_1f_1+\dfrac{1}{s}\left[\dfrac{\partial f_1}{\partial s}\dfrac{\partial f_2}{\partial\tau}-\dfrac{\partial f_1}{\partial\tau}\dfrac{\partial f_2}{\partial s}\right]=0\\
ck_1(1-n)f_1^n-\dfrac{2c}{s^2}f_1^n\dfrac{\partial f_2}{\partial\tau}=\dfrac{\partial f_3}{\partial s}\dfrac{\partial f_1}{\partial\tau}-\dfrac{\partial f_3}{\partial\tau}\dfrac{\partial f_1}{\partial s}-\dfrac{f_3}{s}\dfrac{\partial f_1}{\partial\tau}
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

我们假设方程(4.5)的解具有如下形式

$$
f_i=\xi_i s^{a_i}\tau^{b_i}\qquad(i=1,\ 2,\ 3) \tag{4.6}
$$

将(4.6)代入(4.5)，我们得到

$$
\begin{cases}
a_1=\dfrac{1}{1-n},\ b_1=0,\ a_2=b_2=1,\ a_3=0,\ b_3=1\\
\xi_2=(1-n)k_1,\ \xi_3=(n-1)\sqrt{\dfrac{1-2n}{n}}k_1,\ c=\dfrac{\sqrt{1-2n}}{(1-n)\sqrt{n}}\xi_1^{1-n}
\end{cases}
\tag{4.7}
$$

其中 $0<n<0.5$. 方程(4.2)的相似性解可写成如下形式

$$
\begin{cases}
\psi=\xi_1 s^{\frac{1}{1-n}}t^{k_1},\ F=(1-n)k_1 s\tau t^{-1},\\
v_\varphi=(n-1)\sqrt{\dfrac{1-2n}{n}}k_1\tau t^{-1},\ G=\dfrac{\sqrt{1-2n}}{(1-n)\sqrt{n}}\xi_1 s^{\frac{n}{1-n}}t^{k_1}
\end{cases}
\tag{4.8}
$$

参 考 文 献

[1] S. Chandrasekhar and L. Woltjer, On force-free magnetic fields, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, USA, **44** (1958), 285—289.

[2] 胡文瑞, 关于冻结型无作用力磁场, 中国科学, **20** (1977), 69—82.

[3] D. S. Spicer, An unstable arch model of a solar flare, *Solar Phys.*, **53** (1977), 305—345.

[4] S. Chandrasekhar, On force-free magnetic fields, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, USA, **42** (1956), 1—5.

Kinematical Force-Free Fields of a Magnetic Arch

Feng Qingzeng

(National Laboratory for Turbulence Research, Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, *P. R. China)*

Abstract

Basic equations are derived for kinematical force-free fields of a magnetic arch in a perfect conducting fluid, and the stationary and unsteady similarity solutions are dislussed in this paper.

Key words force-free fields, magnetic arch, perfect conducting fluid