应用数学和力学，第18卷 第9期（1997年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

由泛复函生成多项式型空间调和函数和球函数

王 其 申[1]

（徐次达推荐，1996年3月19日收到）

摘 要

本文以泛复变函数为工具，成功地构造出多项式型空间调和函数族，通过坐标变换和正交化过程，进而又获得了球函数。

关键词 泛复函 调和函数 球函数

一、引 言

调和函数是物理学中应用极为广泛的一类函数。借助复变解析函数这一工具，人们完全掌握了平面调和函数；通过分离变数并求解Sturm-Liouville方程，人们又获得了球坐标和柱坐标的调和函数——球函数和柱函数。自然会问：是否存在类似复变解析函数那样的函数，从它出发可以直接导出空间调和函数族？有无新的方法获得球函数？

80年代初出现的泛复变函数这一新的数学分支为我们寻求上述问题的答案提供了工具。此前，笔者曾以泛复函为工具，成功地构造过二维双调和函数族[1,2]，本文则将继续利用这一工具，构造多项式型空间调和函数族。然后通过坐标变换并对变换后的函数族进行正交化，又成功的导出了球函数，包括勒让德多项式和连带（缔合）勒让德函数。

二、由泛复函构造多项式型空间调和函数

空间直角坐标系下的调和方程是：

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=0 \tag{2.1}$$

为了寻求(2.1)式的多项式型解，考虑以 $u=x+ky+sz$ 为宗量的任意广义解析函数 $f(u)=f(x+ky+sz)$。显然，要使 $f(u)$ 满足(2.1)式，除了 $f_{uu}=0$ 的特殊情况外，必须且只须：

$$1+k^2+s^2=0 \tag{2.2}$$

这里 k，s是非实域的泛复常数。

按照泛复函理论[1]，只要k，s满足(2.2)式，不仅任意广义解析的泛复函数 $f(x+ky+sz)$ 必满足(2.1)式，而且它的实分量也满足(2.1)式，即它们必为空间调和函数。

1 安庆师院物理系，安庆 246011。

考虑最简单的广义解释函数 $u^n=(x+ky+sz)^n(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，按二项式定理，不难将其展开为：

$$u^n=\sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-m}C_n^m C_{n-m}^l x^{n-m-l}y^l z^m k^l s^m \tag{2.3}$$

考虑到(2.2)式，$k^l s^m(m=0,\ \cdots,\ n;\ l=0,\ \cdots,\ n-m)$中只有$(2n+1)$个是独立的，其余均可化为它们的组合，例如：

$$k^{2l}s^m=(-1)^l\sum_{q=0}^{l}C_l^q s^{m+2q}\qquad\left(l=0,\ \cdots,\ \left[\frac{n-m}{2}\right]\right)$$

$$k^{2l+1}s^m=(-1)^l\sum_{q=0}^{l}C_l^q k s^{m+2q}\qquad\left(l=0,\ \cdots,\ \left[\frac{n-m-1}{2}\right]\right)$$

于是(2.3)式可以实分解为$2n+1$个分支：

$$u^n=\sum_{N=0}^{n-1}(\varphi_{n1}^N s^N+\varphi_{n2}^N k s^N)+\varphi_{nn}s^n \tag{2.4}$$

其中

$$\varphi_{n1}^N=\sum_{m+2q=N}C_n^m\sum_{l=q}^{L}(-1)^l C_{n-m}^{2l}C_l^q x^{n-m-2l}y^{2l}z^m$$

$$\varphi_{n2}^N=\sum_{m+2q=N}C_n^m\sum_{l=q}^{L'}(-1)^l C_{n-m}^{2l+1}C_l^q x^{n-m-2l-1}y^{2l+1}z^m$$

$$\varphi_{nn}=\sum_{m+2l=n}(-1)^l C_n^m y^{2l}z^m$$

$$(N=0,\ \cdots,\ n-1;\ L=[(n-m)/2],\ L'=[(n-m-1)/2]) \tag{2.5}$$

这就是n阶多项式型空间调和函数族。

三、球坐标、正交化和球函数

有意思的是，从上节导出的n阶多项式型空间调和函数族(2.5)可以导出球函数族。

首先，作球坐标变换，令

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$$

则(2.5)式转化为：

$$\varphi_{n1}^N=r^n\sum_{m+2q=N}\left[\sum_{l=q}^{L}(-1)^l C_{n-m}^{2l}C_l^q\cos^{n-m-2l}\varphi\sin^{2l}\varphi\right]C_n^m\sin^{n-m}\theta\cos^m\theta$$

$$\varphi_{n2}^N=r^n\sum_{m+2q=N}\left[\sum_{l=q}^{L'}(-1)^l C_{m-n}^{2l+1}C_l^q\cos^{n-m-2l-1}\varphi\sin^{2l+1}\varphi\right]C_n^m\sin^{n-m}\theta\cos^m\theta$$

$$\varphi_{nn}=r^n\sum_{m+2l=n}(-1)^l\sin^{2l}\varphi\sin^{2l}\theta\cos^m\theta$$

$$(N=0,\ \cdots,\ n-1) \tag{3.1}$$

为了证明上述函数族等价于球函数族，我们先以引理形式不加证明的给出两个重要公式.

引理1 成立如下三角级数展开式[2]：

$$\sum_{l=q}^{[n/2]}(-1)^l C_n^{2l} C_l^q \cos^{n-2l}\varphi \sin^{2l}\varphi=\sum_{j=0}^{q} A_j \cos(n-2j)\varphi$$

$$\sum_{l=q}^{[(n-1)/2]}(-1)^l C_n^{2l+1} C_l^q \cos^{n-2l-1}\varphi \sin^{2l+1}\varphi=\sum_{j=0}^{q} B_j \sin(n-j)\varphi$$

式中

$$A_q=(-1)^q C_n^q/4^q=B_q \qquad (q=0,\ \cdots,\ [n/2]\text{或}[(n-1)/2]) \tag{3.2}$$

引理2 对于任意自然数n和$j(j<n)$，成立如下恒等式：

$$\sum_{p=0}^{[j/2]-t} 2^{j-2t-2p} C_n^{j-2t-2p} C_{n-j+2t+2p}^{t+p} C_{t+p}^{p}=C_n^t C_{2n-2t}^{j-2t} \qquad (t=0,\ \cdots,\ [j/2])$$

现在我们来证明函数族(3.1)可以正交化为球函数族，采用数学归纳法.

首先，不难看出：

$$\varphi_{n1}^0=r^n\sin^n\theta\cos n\varphi=a_0r^nP_n^n(\cos\theta)\cos n\varphi$$

$$\varphi_{n2}^0=r^n\sin^n\theta\sin n\varphi=a_0r^nP_n^n(\cos\theta)\sin n\varphi$$

$$\varphi_{n1}^1=r^n\sin^{n-1}\theta\cos\theta\cos(n-1)\varphi=a_1r^nP_n^{n-1}(\cos\theta)\cos(n-1)\varphi$$

$$\varphi_{n2}^1=r^n\sin^{n-1}\theta\cos\theta\sin(n-1)\varphi=a_1r^nP_n^{n-1}(\cos\theta)\sin(n-1)\varphi$$

它们正如所期望的那样属于球函数族[3]. 记：

$$\Phi_{ni}^N=\varphi_{ni}^N \qquad (N=0,\ 1;\ i=1,\ 2)$$

$$(f,\ g)=\int_0^{2\pi} f(r,\ \theta,\ \varphi)g(r,\ \theta,\ \varphi)d\varphi/\pi$$

并假定对所有的$N<j$，φ_{ni}^N均已正交化为：

$$\Phi_{ni}^N=a_Nr^nP_n^{n-N}(\cos\theta)\sin(i\pi/2-n+N)\varphi \qquad (i=1,\ 2)$$

我们来证明：

$$\begin{aligned}\Phi_{ni}^j&=\varphi_{ni}^j-\sum_{q=1}^{[j/2]}(\varphi_{ni}^j,\ \Phi_{ni}^{j-2q})/(\Phi_{ni}^{j-2q},\ \Phi_{ni}^{j-2q})\\&=a_jr^nP_n^{n-j}(\cos\theta)\sin(i\pi/2-n+j)\varphi \qquad (j=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1;i=1,\ 2)\end{aligned}$$

事实上，由引理1可知：

$$\varphi_{ni}^j=r^n\sum_{m+2q=j}C_n^m\sin^{n-m}\theta\cos^m\theta\sum_{h=0}^{q}A_h\sin(i\pi/2-n+m+2h)\varphi$$

这样，考虑到(3.2)式并利用引理2有：

$$\begin{aligned}\Phi_{ni}^j&=r^n\sum_{m+2q=j}(-1)^qC_{n-m}^q\sin(i\pi/2-n+j)\varphi C_n^m\sin^{n-m}\theta\cos^m\theta/4^q\\&=r^n\sin(i\pi/2-n+j)\varphi\sin^{n-j}\theta\sum_{q=0}^{[j/2]}\sum_{p=0}^{q}(-1)^{p+q}C_n^{j-2q}C_{n-j+2q}^qC_q^p\cos^{j-2q+2p}\theta/4^q\\&=2^{-j}r^n\sin(i\pi/2-n+j)\varphi\sin^{n-j}\theta\end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{t=0}^{[j/2]} (-1)^t \cos^{j-2t}\theta \sum_{p=0}^{[j/2]-t} 2^{j-2p-2t} C_n^{j-2t-2p} C_{n-j+2t+2p}^{t+p} C_{t+p}^p$$

$$=2^{-j} r^n \sin(i\pi/2-n+j)\varphi \sin^{n-j}\theta \sum_{t=0}^{[j/2]} (-1)^t C_n^t C_{2n-2t}^{j-2t} \cos^{j-2t}\theta$$

$$=a_j r^n P_n^{n-j}(\cos\theta)\sin(i\pi/2-n+j)\varphi \qquad (j=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1;\ i=1,\ 2)$$

式中 $a_j=2^{n-j}n!/(2n-j)!(j=0,\ \cdots,\ n-1)$. 类似地

$$\Phi_{nn}=\varphi_{nn}-\sum_{q=1}^{[n/2]} (\varphi_{nn},\ \Phi_{n1}^{n-2q})/(\Phi_{n1}^{n-2q},\ \Phi_{n1}^{n-2q})$$

$$=r^n \sum_{m+2l=n} (-1)^l C_{2l}^l C_n^m \sin^{2l}\theta \cos^m\theta/4^l$$

$$=(r/2)^n \sum_{t=0}^{[n/2]} (-1)^t \cos^{n-2t}\theta \sum_{p=0}^{[n/2]-t} 2^{n-2t-2p} C_n^{n-2t-2p} C_{2t+2p}^{t+p} C_{t+p}^p$$

$$=(r/2)^n \sum_{t=0}^{[n/2]} (-1)^t C_n^t C_{2n-2t}^{n-2t} \cos^{n-2t}\theta = r^n P_n(\cos\theta)$$

至此，结论成立。

四、举 例

设$n=5$，这时共有11个调和函数，它们是：

$$\varphi_{51}^0=x^5-10x^3y^2+5y^4x=r^5\sin^5\theta\cos5\varphi$$

$$\varphi_{52}^0=5x^4y-10x^2y^3+y^5=r^5\sin^5\theta\sin5\varphi$$

$$\varphi_{51}^1=5(x^4-6x^2y^2+y^4)z=r^5\cdot5\sin^4\theta\cos\theta\cos4\varphi$$

$$\varphi_{52}^1=5(4x^3y-4xy^3)z=5r^5\sin^4\theta\cos\theta\sin4\varphi$$

$$\varphi_{51}^2=10(x^3-3xy^2)z^2-10(x^3y^2-xy^4)$$
$$=10r^5[\sin^3\theta\cos^2\theta\cos3\varphi-\sin^5\theta(\cos^3\varphi\sin^2\varphi-\cos\varphi\sin^4\varphi)]$$
$$=10r^5[\cos3\varphi\sin^3\theta(9\cos^2\theta-1)/8+\cos5\varphi\sin^5\theta/8]$$

$$\varphi_{52}^2=10(3x^2y-y^3)z^2-10x^2y^3+2y^5$$
$$=r^5[10\sin^3\theta\cos^2\theta\sin3\varphi-\sin^5\theta(10\cos^2\varphi\sin^3\varphi-2\sin^5\varphi)]$$
$$=10r^5[\sin3\varphi\sin^3\theta(9\cos^2\theta-1)/8+3\sin5\varphi\sin^5\theta/8]$$

$$\varphi_{51}^3=10(x^2-y^2)z^3-5(6x^2y^2-2y^4)z$$
$$=r^5[10\sin^2\theta\cos^3\theta\cos2\varphi-5\sin^4\theta\cos\theta(6\cos^2\varphi\sin^2\varphi-2\sin^4\varphi)]$$
$$=10r^5[\cos2\varphi\sin^2\theta(3\cos^3\theta-\cos\theta)/2+\cos4\varphi\sin^4\theta\cos\theta/2]$$

$$\varphi_{52}^3=20xyz^3-20xy^3z$$
$$=10r^5(\sin^2\theta\cos^3\theta\sin2\varphi-2\sin^4\theta\cos\theta\cos\varphi\sin^3\varphi)$$
$$=10r^5[\sin2\varphi\sin^2\theta(3\cos^3\theta-\cos\theta)/2+\sin4\varphi\sin^4\theta\cos\theta/2]$$

$$\varphi_{51}^4=5xz^4-30xy^2z^2+5xy^4=5r^5(\sin\theta\cos^4\theta\cos\varphi-6\sin^3\theta\cos^2\theta\cos\varphi\sin^2\varphi$$

$$+\sin^5\theta\cos\varphi\sin^4\varphi)=5r^5[\cos\varphi\sin\theta(21\cos^4\theta-14\cos^2\theta+1)/8$$
$$+3\cos3\varphi\sin^3\theta(9\cos^2\theta-1)/16+\cos5\varphi\sin^5\theta/16]$$

$$\varphi^4_{52}=5yz^4-10y^3z^2+y^5$$
$$=r^5(5\sin\theta\cos^4\theta\sin\varphi-10\sin^3\theta\cos^2\theta\sin^3\varphi+\sin^5\theta\sin^5\varphi)$$
$$=5r^5[\sin\varphi\sin\theta(21\cos^4\theta-14\cos^2\theta+1)/8$$
$$+\sin3\varphi\sin^3\theta(9\cos^2\theta-1)/16+\sin5\varphi\sin^5\theta/16]$$

$$\varphi_{55}=z^5-10y^2z^3+5y^4z=r^5(\cos^5\theta-10\sin^2\theta\cos^3\theta\sin^2\varphi+5\sin^4\theta\cos\theta\sin^4\varphi)$$
$$=r^5[(63\cos^5\theta-70\cos^3\theta+15\cos\theta)/8+5\cos2\varphi\sin^2\theta(3\cos^3\theta-\cos\theta)/2$$
$$+5\cos4\varphi\sin^4\theta\cos\theta/8]$$

除前 4 个函数外，其余 7 个函数的正交化过程与结果是显然的。

参 考 文 献

[1] 熊锡金，《泛复变函数理论及其在数学和物理中的应用》，北京师大出版社（1988）。

[2] 盛敏高、王其申，一组特殊函数的付里叶级数，安庆师院学报，1（1996）。

[3] 柯朗、希尔伯特著，《数学物理方法》（钱敏、郭敦仁译），第 5 章，科学出版社（1987）。

Construction Space Harmonic Functions in Polynomial Form and Spherical Functions by Complex-Functional

Wang Qishen

(*Anqing Teachers College, Anqing* 246011, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, applying the theory of complex-functional, not only the space harmonic functions in polynomial form but also the spherical functions are obtained.

Key words complex-functional, harmonic functions, spherical functions