应用数学和力学，第18卷 第9期（1997年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

补偿紧性在奇异四阶和六阶摄动偏微分方程中的应用*

殷 朝 阳[1]

（林宗池推荐，1995年4月7日收到，1996年11月7日收到修改稿）

摘 要

在这篇文章中，我们应用补偿紧性方法，能量方法得到了一类四阶、六阶奇异摄动微分方程解的收敛性问题，并进一步提高了解的正则性。

关键词 补偿紧性 能量方法 奇异摄动 解的收敛性 解的正则性

一、引 言

在这篇文章中，我们主要研究了如下方程：

$$\left.\begin{aligned} & u_t+f(u)_x+\delta u^{(4)}=\varepsilon u_{xx} \\ & |u_{0\delta}^{\varepsilon}|_2+\|u_{0\delta}^{\varepsilon}\|_{2m}\leqslant C_0 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

以及方程

$$\left.\begin{aligned} & u_t+f(u)_x+\delta u^{(6)}=\varepsilon u_{xx} \\ & |u_{0\delta}^{\varepsilon}|_2+\|u_{0\delta}^{\varepsilon}\|_{2m}\leqslant C_0 \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

其中 $f(\cdot)$是$R\to R$的光滑非线性映射，且$|f'(u)|\leqslant C(1+|u|)$ $|\cdot|_2$和$\|\cdot\|_{2m}$分别表示$H^2(R)$和$L^{2m}(R)$中的范数，C_0是一常数。当δ和ε趋于0时，方程(1.1)和(1.2)的解的收敛性及正则性问题。B. Cassis在[1]中讨论了方程(1.1)，在$|u_{0\delta}^{\varepsilon}|_2+\|u_{0\delta}^{\varepsilon}\|_4\leqslant C_0$条件下，如果$\delta\leqslant C\varepsilon^6$，$C$是某一固定常数时，$\{u_\delta^\varepsilon\}$收敛到如下方程的解$\bar{u}$：

$$u_t+f(u)_x=0 \tag{1.3}$$

且解 $\bar{u}\in L^4(\Omega)$。而在 $\delta\geqslant C\varepsilon^6$ 时，收敛性问题是一个开问题，而在我们文章的第二部分，我们将结果改进到当 $\delta\leqslant C\varepsilon^5$ 时，方程 (1.1) 的解收敛到 (1.3) 的解，并将解的正则性提高到 $L^{2m}(\Omega)$。在文章的第三部分，我们考虑了方程(1.2) 的收敛性，得到当 $\delta\leqslant C\varepsilon^{3(2m-1)}$，方程(1.2)的解几乎处处收敛到方程(1.3)的解$\bar{u}$，且$\bar{u}\in L^{2m}(\Omega)$。

---

* 国家教委博士后基金资助课题。

1 中山大学物理系，广州 510275。

二、四阶奇异摄动方程的解收敛性及正则性

对于方程(1.1)，我们利用补偿紧致方法得到了如下定理(定理证明中假定 $f(u)=\frac{u^2}{2}$)：

定理1 设$\Omega=R\times[0,T]$，对某一$T>0$．设$\{u_\delta^\varepsilon\}$ 是摄动方程(1.1)的解序列，且$\{u_\delta^\varepsilon\}$及其各阶导数（若存在）当$|x|\to+\infty$时，趋向于0．并进一步假定初始值满足如下不等式：

$$|u_{0\delta}^\varepsilon(x)|_2+\|u_{0\delta}^\varepsilon(x)\|_{2m}\leqslant C_0$$

其中 $u_\delta^\varepsilon(x,0)=u_{0\delta}^\varepsilon(x)$．$m$和$n$是正整数，如果$\delta\leqslant C\varepsilon^{2m-1}$，那么存在一个子序列，我们仍表示为$\{u_\delta^\varepsilon\}$成立有：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(u_\delta^\varepsilon)=\bar{u}\qquad 在L^p中强收敛\qquad (1<p<2m)$$

并且$\bar{u}\in L^{2m}(\Omega)$．$\bar{u}$是方程(1.3)的解．

为了证明定理1，我们还需要下面引理：

引理1 如果下列条件满足：

（Ⅰ） $\{u_\delta^\varepsilon\}\in L_b^{2m}$

（Ⅱ） $\{\delta(u^\varepsilon)^{(3)}\}$，$\{\varepsilon u_x^\varepsilon\}\in L_c^2(\Omega)$

$\{\delta u_x^\varepsilon(u^\varepsilon)^{(3)}\}$，$\{\varepsilon(u_x^\varepsilon)^2\}\in L_b^1(\Omega)$

其中 L_b^{2m}表示$L^{2m}(\Omega)$中的有界集；$L_c^2(\Omega)$表示$L^2(\Omega)$中的紧子集；$L_b^1(\Omega)$表示$L^1(\Omega)$中的有界集．则定理1的结果成立．

引理1的证明见[2,3]．

定理1的证明 因为$u_{0\delta}^\varepsilon(x)\in H^n(R)$，再利用半群理论及闭线性算子的分次幂，我们可以得到$\{u_\delta^\varepsilon\}$有足够的正则性，而且下面的计算都将是有意义的，见B. Cassis[1]．

由引理1知，我们仅需要证明$\{u_\delta^\varepsilon\}$满足条件(Ⅰ)和(Ⅱ)，即可．

首先我们分别用$u(x)$和$(-u_{xx})$乘以方程(1.1)的两边，再关于空间变量积分，然后利用u的性质及分部积分后，再关于时间变量积分得：

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^2dx+\varepsilon\int_0^\tau\int_{-\infty}^{+\infty}|u_x|^2dxdt+\delta\int_0^\tau\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(2)}|^2dxdt\leqslant C_0 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|u_x|^2dx+\varepsilon\int_0^\tau\int_{-\infty}^{+\infty}|u_{xx}|^2dxdt+\delta\int_0^\tau\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(3)}|^2dxdt\\&\leqslant C_0+\int_0^\tau\int_{-\infty}^{+\infty}uu_xu_{xx}dxdt\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $0\leqslant\tau\leqslant T$．

又因为 $\int_0^\tau\int_{-\infty}^{+\infty}uu_xu_{xx}dxdt\leqslant\frac{1}{2}|u|_\infty^2\varepsilon^{-1}\int_0^\tau\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2dxdt+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^\tau\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2dxdt$

和

$$\begin{aligned}|u|^2&\leqslant 2\int_{-\infty}^{x}|uu_x|dx\leqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty}|u\cdot u_x|dx\\&\leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant C_0(2\varepsilon^2+|u|_\infty^2)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{-1}\end{aligned}$$

这样，我们可以得出 $|u|_\infty<\varepsilon^{-1}C_0$

因此，由以上的不等式，我们有：

$$\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxx}^2dxdt$$

$$\leqslant C_0+\frac{1}{2}|u|_\infty^2\varepsilon^{-1}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2dxdt$$

$$\leqslant C_0\varepsilon^{-4}$$

和

$$\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u_xu_{xxx}|dxdt$$

$$\leqslant\delta\Big(\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxx}^2dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C_0\varepsilon^{-\frac{5}{2}}\delta^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

如果$\delta\leqslant C\varepsilon^5$，$C$是任意常数，我们知$\{u_\delta^\varepsilon\}$满足条件(Ⅱ)。下面，我们仅需证明$\{u_\delta^\varepsilon\}$满足条件(Ⅰ)。首先，我们用$-\varepsilon^2u_{xx}$乘以方程(1.1)的两边，再关于空间变量和时间变量积分，整理得：

$$\varepsilon^2\int_{-\infty}^{+\infty}|u_x|^2dx+2\varepsilon^3\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u_x|^2dxdt+2\delta\varepsilon^2\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(3)}|^2dxdt$$

$$\leqslant C_0+2\varepsilon\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|uu_x|^2dxdt \tag{2.4}$$

然后，我们用u^3乘以方程(1.1)的两边，再关于时间和空间变量积分，整理得：

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}u^4dx+6\varepsilon\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u^2u_x^2dxdt$$

$$\leqslant C_0+\frac{9}{2}\varepsilon^{-2}\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u^2u_x^2dxdt+\varepsilon^2\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(3)}|^2dxdt \tag{2.5}$$

再次，我们用u^{2m-1}乘以方程(1.1)的两边，再关于时间和空间变量积分得：

$$\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}u^{2m}dx+(2m-1)\varepsilon\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u^{2m-2}u_x^2dxdt$$

$$\leqslant C_0+\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u^{2m-1}u^{(4)}dxdt$$

$$\leqslant C_0-(2m-1)\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u^{2m-2}u_xu^{(3)}dxdt$$

$$\leqslant C_0+\frac{(2m-1)^2}{2}\varepsilon^{-2m}\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u^{2m-2}u_x^2dxdt$$

$$+\frac{\varepsilon^2\delta}{2}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(3)}|^2dxdt \tag{2.6}$$

综合不等式(2.4)、(2.5)及(2.6)，我们得：

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}u^4dx+(6\varepsilon-9\delta\varepsilon^{-4})\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u^2u_x^2dxdt+\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}u^{2m}dx$$

$$+[(2m-1)\varepsilon-\frac{1}{2}(2m-1)^2\delta\varepsilon^{-2m}]\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u^{2m-2}u_x^2dxdt$$

$$+\varepsilon^3\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u_x|^2dxdt+\frac{1}{2}\delta\varepsilon^2\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(3)}|^2dxdt$$
$$\leqslant C_0$$

如果$6\varepsilon-9\delta\varepsilon^{-4}\geqslant 0$和$(2m-1)\varepsilon-(2m-1)^2\varepsilon^{-2m}\delta/2\geqslant 0$，那么我们就有$\bar{u}\in L^{2m}(\Omega)$且$\bar{u}\in L^4(\Omega)$。因此，如果$\delta\leqslant C\varepsilon^{2m+1}$，这里$m\geqslant 2$是整数，$C$是某一个常数，所以我们有$\{u_\delta^\varepsilon\}$满足条件(Ⅰ)。

证毕。

注1 当$m=2$时，我们有$\delta\leqslant C\varepsilon^5$，因而我们的结果比B. Cassis[1]的要好。

三、六阶奇异摄动方程的解收敛性及正则性

对于方程(1.2)，我们应用补偿紧性方法得到了如下定理（定理证明中假定$f(u)=\frac{u^2}{2}$）：

定理2 设$\Omega=R\times[0,T]$，对某一$T>0$，设$\{u_\delta^\varepsilon\}$是方程(1.2)的解序列，且$\{u_\delta^\varepsilon\}$及其各阶导数（若存在）当$|x|\to+\infty$时，趋于零。并进一步假定初值满足如下不等式：

$$|u_{0\delta}^\varepsilon|_2+\|u_{0\delta}^\varepsilon\|_{2m}\leqslant C_0$$

这里 $u_\delta^\varepsilon(x,0)=u_{0\delta}^\varepsilon(x)$，$m$和$n$是正整数。如果$\delta\leqslant C\varepsilon^{3(2m-1)}$，那么存在一个子序列，我们的表示为$\{u_\delta^\varepsilon\}$成立有：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(u_\delta^\varepsilon)=\bar{u}\qquad \text{在}L^p\text{中强收敛}\qquad(1<p<2m)$$

并且$\bar{u}\in L^{2m}(\Omega)$。$\bar{u}$是方程(1.3)的解。

证明 由引理1知，我们仅须证明：

(Ⅰ) $\{u_\delta^\varepsilon\}\in L_b^{2m}$和

(Ⅱ) $\{\delta(u^\varepsilon)^{(5)}\}$，$\{\varepsilon u_x^\varepsilon\}\in L_c^2(\Omega)$

$\{\delta u_x^\varepsilon(u^\varepsilon)^{(5)}\}$，$\{\varepsilon(u_x^\varepsilon)^2\}\in L_b^1(\Omega)$

我们分别用$u(x,t)$，$(-u_{xx})$及u_{xxxx}乘以方程(1.2)的两边，然后再关于空间变量和时间变量积分，整理得

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^2dx+\varepsilon\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u_x|^2dxdt+\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(3)}|^2dxdt\leqslant C_0\tag{3.1}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|u_x|^2dx+\varepsilon\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u_{xx}|^2dxdt+\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(4)}|^2dxdt$$
$$\leqslant C_0+\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u\cdot u_x\cdot u_{xx}dxdt\tag{3.2}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|u_{xx}|^2dx+\varepsilon\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u_{xxx}|^2dxdt+\delta\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(5)}|^2dxdt$$
$$\leqslant C_0+\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u\cdot u_x\cdot u_{xxxx}dxdt\tag{3.3}$$

又因为

$$\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u\cdot u_xu_{xx}dxdt$$
$$\leqslant\frac{1}{2}|u|_\infty^2\,\varepsilon^{-1}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2dxdt+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}^2dxdt$$

和

$$|u|^2\leqslant 2\int_{-\infty}^{x}|u\cdot u_x|dx$$

$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty}|u\cdot u_x|dx$$

$$\leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u_x^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C_0(2\varepsilon^2+|u|_{\infty}^2)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{-1}$$

这样我们可得

$$|u|_{\infty}\leqslant C_0\varepsilon^{-1}$$

故由以上不等式，我们有：

$$\delta\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxxxx}^2dxdt$$

$$\leqslant C_0+|u|_{\infty}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xxxx}^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

再由不等式(3.2)，我们有

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|u_x|^2dx+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}|u_{xx}|^2dxdt+\delta\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(4)}|^2dxdt$$

$$\leqslant C_0+C_0\varepsilon^{-4}$$

因而我们有：

$$\delta^2\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(5)}|^2dxdt\leqslant C_0\delta^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{-\frac{7}{2}}$$

和

$$\delta\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}|u_xu^{(5)}|dxdt\leqslant C_0\delta^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{-\frac{9}{4}}$$

如果$\delta\leqslant C\varepsilon^9$，$C$是任意常数，我们得$\{u_\delta^\varepsilon\}$满足条件(Ⅱ)。

下面我们仅需要证明$\{u_\delta^\varepsilon\}$满足条件（Ⅰ）。即可。

我们分别用u^3，$(-\varepsilon u_{jx})$，$\delta^{\frac{2}{3}}u_{xxxx}$和$u^{2m-1}$乘以方程(1.2)的两边，然后再关于空间变量和时间变量积分，整理得：

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}u^4dx+3\varepsilon\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\cdot u_x^2dxdt$$

$$\leqslant C_0+\varepsilon^{-2}\delta^{\frac{1}{3}}\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\cdot u_x^2dxdt+\frac{1}{2}\delta^{\frac{5}{3}}\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(5)}|^2dxdt \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_{-\infty}^{+\infty}|u_x|^2dx+\varepsilon^{\frac{3}{2}}\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}|u_{xxx}|^2dxdt+\delta\varepsilon^2\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(5)}|^2dxdt$$

$$\leqslant C_0+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}(uu_x)^2dxdt \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{2}\delta^{\frac{2}{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}|u_{xx}|^2dx+\delta^{\frac{2}{3}}\varepsilon\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}|u_{xxx}|^2dxdt$$

$$+\delta^{\frac{5}{3}}\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(5)}|^2dxdt$$

$$\leqslant C_0\delta^{\frac{2}{3}}+\delta^{\frac{2}{3}}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u\cdot u_x u_{xxxx}dxdt \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}u^{2m}dx+(2m-1)\varepsilon\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u^{2m-2}u_x^2dxdt$$

$$\leqslant C_0+\frac{(2m-1)^2}{2}\cdot\varepsilon^{-2m+2}\delta^{\frac{1}{3}}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u^{2m-2}u_x^2dxdt$$

$$+\frac{\delta^{\frac{5}{3}}}{2}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(5)}|^2dxdt \tag{3.7}$$

我们将不等式(3.3)、(3.4)、(3.5)、(3.6)相加得:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}u^4dx+\left(\frac{5}{2}\varepsilon-\delta^{\frac{1}{3}}\varepsilon^{-2}\right)\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u^2u_x^2dxdt+\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}u^{2m}dx$$

$$+[(2m-1)\varepsilon-(2m-1)^2\delta^{\frac{1}{3}}\varepsilon^{-2m+2}]\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}u^{2m-2}u_x^2dxdt$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u_x|^2dxdt+\frac{1}{2}\delta\varepsilon^2\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}|u^{(4)}|^2dxdt$$

$$\leqslant C_0$$

从而，如果$\frac{5}{2}\varepsilon-\delta^{\frac{1}{3}}\varepsilon^{-2}\geqslant 0$且$(2m-1)\varepsilon-(2m-1)^2\delta^{\frac{1}{3}}\varepsilon^{-2m+2}\geqslant 0$

那么我们可得 $\bar{u}\in L^{2m}(\Omega)$和$\bar{u}\in L^4(\Omega)$.

因此，如果 $\delta\leqslant C\varepsilon^{3(2m+1)}$，这里 C 是某一恰当常数，$m\geqslant 2$ 是一正整数，从而我们得到$\{u_\delta^\varepsilon\}$满足条件(Ⅰ). 证毕

注2 在第二部分和第三部分我们证明过程中均假定$f(u)=\frac{u^2}{2}$来完成定理的证明，仔细观察定理证明，我们可将结果推广到$|f'(u)|\leqslant c(1+|u|)$的情形.

参 考 文 献

[1] B. Cassis, Compensated compactness applied to a singular perturbed fourth order P. D. E., *Comm. Partial Differential Equations*, 14(5) (1989), 619—634.

[2] M. E. Schonbek, Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations, *Comm. Partial Differential Equations*, 7(8) (1982), 959—1000.

[3] L. TarTar, Compensated compactness method applied to system of conservation law, *Systems of Nonlinear Partial Differential Equations*, J. M. Balled eds., NATO ASI S Series, C. Reidel (1983).

Compensated Compactness Applied to Perturbed Fourth and Sixth Order P.D.E.

Yin Zhaoyang

(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, *P. R. China*)

Abstract

In the paper, by using the methods of compensated compactness and energy method, the convergence of a class of forth and sixth orders singular perturbed, partial differential equations is obtained, and furthermore, the regularity of solutions is improved.

Key words compensated compactness, energy method, singular purturbation, convergence of solution, regularity of solution