应用数学和力学，第18卷 第8期（1997年8月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

渐近正则映射对的不动点*

B.K.沙玛[1]　B.S.撒克[1]

（丁协平推荐，1996年11月20日收到）

摘　要

本文在p—一致凸Banach空间中证明了渐近正则映射对的若干不动点定理。在Hilbert空间，L^p空间，Hardy空间H^p和Sobolev空间$H^{p,k}$中，$1<p<+\infty$，$k\geqslant 0$，也建立了这些映射的若干不动点定理。本文推广了Gornicki[9,10]，Kruppel[11,12]和其他作者的结果。

关键词　渐近正则映射　p—一致凸Banach空间　渐近中心　不动点

一、引　言

1966年Browder和Petryshyn[2]引入了渐近正则的概念。设E为实Banach空间，$\|\cdot\|$表示该空间的范数。如果对E中所有的x有$\lim\limits_{n\to\infty}\|T^{n+1}x-T^nx\|=0$，映射$T:E\to E$就称为渐近正则的。其中$T^nx$表示$T$的$n$次迭代。已经知道，如果$T$是非扩张映射，则对所有的$0<t<1$，$T_t=t\cdot I+(1-t)\cdot T$即为渐近正则的（参见Goebel和Kirk[8]）。

在[11]中，Kruppel证明了如下结果：

定理K　设E是一致凸Banach空间，并且K为E中的闭凸有界子集，再设T为K到K的映射。如果T是渐近正则的并且$\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|\leqslant 1$（其中$\|T\|$表示$T$的Lipschitz范数），则$T$在$K$中有一不动点。

与此同时Lin[14]构造了定义在Hilbert空间l^2的紧子集上的渐近正则映射没有不动点。Gornicki[9]给出了L^p空间中渐近正则映射有不动点存在的充分条件。近来，Gornicki[10]又将这一结果推广到p—一致凸Banach空间。

这自然就提出了如下问题：渐近正则映射对在什么情况下有公共不动点？本文在一致凸Banach空间中给出了渐近正则映射对存在公共不动点的充分条件。

二、预 备 知 识

E的正规结构系数$N(E)$定义为[3]$(\mathrm{diam}K/r_K(K):K$为由一个以上点组成的E的有界

---

1 印度皮特·莱维桑卡苏克拉大学数学研究院

* 本文原文为英文，由吴承平译为中文，丁协平校

凸子集），其中

$$\operatorname{diam}K=\sup\{\|x-y\|:x,\ y\in K\}$$

为K的直径，而

$$r_K(K)=\inf_{x\in K}\{\sup_{y\in K}\|x-y\|\}$$

为相对于K的切比雪夫半径．如果 $N(E)>1$，则 E 称为具有一致正规结构．我们知道，一致凸Banach空间具有一致正规结构[5]，并且对 Hilbert 空间H，$N(H)=2^{1/2}$．最近 Pichugov[16]（参阅Prus[8]）计算得出

$$N(L^p)=\min\{2^{1/p},\ 2^{(p-1)/p}\},\qquad 1<p<\infty$$

在其他Banach空间中，正规结构系数的某些估计量可在[19]中找到．

令$p>1$并用λ表示$[0,\ 1]$中的数，用$W_p(\lambda)$表示λ的函数$\lambda\cdot(1-\lambda)^p+\lambda^p\cdot(1-\lambda)$．

如果存在一个正常数c_p，使得对一切$\lambda\in[0,\ 1]$和$x,\ y\in E$，下面不等式成立：

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^p\leqslant\lambda\|x\|^p+(1-\lambda)\|y\|^p-W_p(\lambda)\cdot c_p\cdot\|x-y\|^p \tag{2.1}$$

则称泛函的$\|\cdot\|^p$在Banach空间E中是一致凸的（参阅Zalinescu[23]）．

Xu[13]证明了泛函$\|\cdot\|^p$在整个Banach空间E中是一致凸的，当且仅当E是p一致凸的，即存在一个常数$c_p>0$，使凸性模数$\delta_E(E)\geqslant c\varepsilon^p$，$\forall\,0\leqslant\varepsilon\leqslant2$．

在得出我们的主要结果前，还需要如下的定义和引理：

用$\|L^n\|$表示映射对$\{S^n,\ T^n\}$的Lipschitz范数，$\|T^n\|$表示T^n的 Lipschitz 范数；$n=1,\ 2,\ \cdots$，即

$$\|L^n\|=\sup\{\|S^nx-T^ny\|/\|x-y\|:x\neq y,\ x,\ y\in K\}$$

$$\|T^n\|=\sup\{\|T^nx-T^ny\|/\|x-y\|:x\neq y,\ x,\ y\in K\}$$

引理1[22]　令$p>1$且设E为p一致凸Banach空间，K为E的非空闭凸子集，设$\{x_n\}\subset E$为一有界序列．则在K中存在唯一点z使得对K中每一点x，有

$$\lim_{n\to\infty}\sup\|x_n-z\|^p\leqslant\lim_{n\to\infty}\ \sup\|x_n-x\|^p-c_p\cdot\|x-z\|^p \tag{2.2}$$

其中c_p为(2.1)中给出的常数．

引理2[11]　设K为Banach空间E的一个非空闭凸子集，$\{n_i\}$为一自然数的递增序列．假设$T:\to K$为一渐近正则映射，并且对某$m\in\mathbf{N}$，T^m是连续的．如果对某$u\in K$和$x\in K$，有

$$r(x)=\lim_{i\to\infty}\sup\|x-T^{n_i}u\|=0 \tag{2.3}$$

则$Tx=x$．

现在能够给出我们的主要结果如下：

定理1　设$p>1$，E为p一致凸Banach空间，K为E的非空闭凸有界子集，并且 S，T：$K\to K$为渐近正则映射．如果

$$\lim_{n\to\infty}\inf\|L^n\|=k<\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\cdot c_p\cdot N^p}\right)\right]^{1/p}$$

N为E的正规结构系数，c_p为(2.1)式中给出的常数，则S和T在K中有一公共不动点．

证明　若$k<1$，则结论显然成立．因此我们可设$k\geqslant1$．设$\{n_i\}$为一自然数序列，使得

$$\lim_{n\to\infty}\ \inf\|L^n\|=\lim_{n\to\infty}\inf\|L^{n_i}\|$$

$$=k<\left[\frac{1}{2}(+\sqrt{1+4\cdot c_p\cdot N^p})\right]^{1/p} \tag{2.4}$$

对任意$x_0\in K$，由引理2我们可以用如下方法归纳地构造一个序列$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$：

x_m和x_{m+1}分别为序列$\{S^n x_{m-1}\}_{n=1}^{\infty}$和$\{T^n x_m\}_{n=1}^{\infty}$唯一的渐近中心．

令
$$D_m=\limsup_{n\to\infty}\|x_m-T^n x_m\|,\qquad (m=1,\ 2,\ \cdots)$$
及
$$r_m=\limsup_{n\to\infty}\|x_{m+1}-S^n x_m\|,\qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$
由[4]及T的渐近正则性，有

$$\begin{aligned}
r_m&=\limsup_{i\to\infty}\|S^{n_i}x_m-x_{m+1}\|\\
&\leqslant\frac{1}{N}\limsup_{i\to\infty}\{\|S^{n_i}x_m-T^{n_j}x_m\|:i,\ j\geqslant t\}\\
&\leqslant\frac{1}{N}\limsup_{i\to\infty}\left(\limsup_{j\to\infty}\|S^{n_i}x_m-T^{n_j}x_m\|\right)\\
&\leqslant\frac{1}{N}\limsup_{i\to\infty}\left(\limsup_{j\to\infty}[\|S^{n_i}x_m-T^{n_i+n_j}x_m\|\right.\\
&\quad\left.+\|T^{n_i+n_j}x_m-T^{n_j}x_m\|]\right)\\
&\leqslant\frac{1}{N}\limsup_{i\to\infty}\left(\limsup_{j\to\infty}\left[\|L^{n_i}\|\|x_m-T^{n_j}x_m\|\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\sum_{v=0}^{n_{i-1}}\|T^{n_j+v+1}x_m-T^{n_j+v}x_m\|\right]\right)\\
&\leqslant\frac{1}{N}\limsup_{i\to\infty}\|L^{n_i}\|\cdot\limsup_{j\to\infty}\|x_m-T^{n_j}x_m\|\\
&\leqslant\frac{k}{N}\cdot\limsup_{j\to\infty}\|x_m-T^{n_j}x_m\|
\end{aligned}$$

即
$$r_m\leqslant k\cdot\frac{1}{N}D_m \tag{2.5}$$
其中N为E的正规结构系数．

对每一固定的$m\geqslant1$及所有的n_i，n_j，由(2.1)式有

$$\begin{aligned}
&\|\lambda x_{m+1}+(1-\lambda)T^{n_j}x_{m+1}-S^{n_i}x_m\|^p+c_p\cdot W_p(\lambda)\cdot\|x_{m+1}-T^{n_j}x_{m+1}\|^p\\
&\leqslant\lambda\|x_{m+1}-S^{n_i}x_m\|^p+(1-\lambda)\|T^{n_j}x_{m+1}-S^{n_i}x_m\|^p\\
&\leqslant\lambda\|x_{m+1}-S^{n_i}x_m\|^p+(1-\lambda)[\|T^{n_j}x_{m+1}-S^{n_j+n_i}x_m\|\\
&\quad+\|S^{n_j+n_i}x_m-S^{n_i}x_m\|]^p\\
&\leqslant\lambda\|x_{m+1}-S^{n_i}x_m\|^p+(1-\lambda)[\|L^{n_j}\|\|x_{m+1}-S^{n_i}x_m\|\\
&\quad+\sum_{v=0}^{n_j-1}\|S^{n_i+v+1}x_m-S^{n_i+v}x_m\|]^p
\end{aligned}$$

当$i\to+\infty$时，在每边取上极限，由x_m的定义及S的渐近正则性，给出
$$r_m^p+c_p\cdot W_p(\lambda)\cdot\|x_{m+1}-T^{n_j}x_{m+1}\|^p\leqslant(\lambda+(1-\lambda)k^p)r_m^p$$
及
$$D_{m+1}^p\leqslant\frac{(1-\lambda)(k^p-1)}{c_p\cdot W_p(\lambda)}\cdot r_m^p\leqslant\frac{(1-\lambda)(k^p-1)}{c_p\cdot W_p(\lambda)}\cdot\frac{k^p}{N^p}\cdot D_m^p$$

设$\lambda\to 1$，由定理的假定，我们得到如下结论：

$$D_{m+1}\leqslant[k^p(k^p-1)/c_p\cdot N^p]^{1/p}\cdot D_m=A\cdot D_m,\qquad (m=1,\ 2,\ \cdots)$$

其中　$[k^p(k^p-1)/c_p\cdot N^p]^{1/p}<1$

进一步设

$$D'_m=\limsup_{n\to\infty}\|x_m-S^n x_m\|,\qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

和

$$r'_m=\limsup_{n\to\infty}\|x_{m+1}-T^n x_m\|,\qquad (m=1,\ 2,\ \cdots)$$

重复上述论证，可得

$$r'_m\leqslant\frac{k}{N}\cdot D'_m,\quad r'_{m+1}\leqslant A\cdot D'_m$$

因此　$$D'_m\leqslant A\cdot D'_{m-1}\leqslant A^2\cdot D'_{m-2}\leqslant\cdots\leqslant A^m\cdot D'_0 \tag{2.6}$$

因为　$$\|x_{m+1}-x_m\|\leqslant\|x_{m+1}-S^{n_i}x_m\|+\|S^{n_i}x_m-x_m\|$$

当$i\to\infty$取上极限得

$$\|x_{m+1}-x_m\|\leqslant r_m+D'_m\to 0\qquad 当m\to+\infty$$

则$\{x_m\}$为Cauchy序列，设$z=\lim\limits_{m\to\infty}x_m$，则

$$\begin{aligned}\|z-S^{n_i}z\|&\leqslant\|z-x_m\|+\|x_m-T^{n_i}x_m\|+\|T^{n_i}x_m-S^{n_i}z\|\\&\leqslant(1+\|L^{n_i}\|)\|z-x_m\|+\|x_m-T^{n_i}x_m\|\end{aligned}$$

当$i\to+\infty$，对两边同时取上极限，得

$$\lim_{i\to\infty}\|z-S^{n_i}z\|\leqslant(1+k)\|z-x_m\|+D'_m\to 0\qquad 当m\to+\infty$$

因此，由引理2得$Sz=z$。根据对称性又有

$$z=Tz$$

定理证毕。

如果在定理1中令$S=T$，则将得出如下结果：

推论1([10，定理2])　设$p>1$，E，K如定理1所定义，$T:K\to K$为渐近正则映射。如果

$$\liminf_{n\to\infty}\|T^n\|=k<\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\cdot c_p\cdot N^p}\right)\right]^{1/p}$$

则T在K中有一不动点。

在某些Banach空间中，我们在下面给出类似于(2.1)式的不等式的应用。

首先我们建立如下引理：

引理3　在Hilbert空间H中，如下不等式成立，对一切x，$y\in H$和$\lambda\in[0,\ 1]$，

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2\leqslant\lambda\|x\|^2+(1-\lambda)\|y\|^2-\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \tag{2.7}$$

如果$1<p\leqslant 2$，则在L^p中，对所有的x，$y\in L_p$和$\lambda\in(0,\ 1]$，有

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2\leqslant\lambda\|x\|^2+(1-\lambda)\|y\|^2-\lambda(1-\lambda)(p-1)\|x-y\|^2 \tag{2.8}$$

(此即[13]和[21]中的不等式（5.2.10))

假设$2<p<+\infty$，且t_p为函数

$$g(x)=-x^{p-1}+(p-1)x+p-2$$

在区间$(1,\ +\infty)$中的唯一零点。

设　$$c_p=(p-1)(1+t_p)^{2-p}=(1+t_p^{p-1})/(1+t_p)^{p-1}$$

则对L^p中所有的x，y和$\lambda\in(0,\ 1]$，有如下不等式

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^p\leqslant\lambda\|x\|^p+(1-\lambda)\|y\|^p-W_p(\lambda)\cdot c_p\cdot\|x-y\|^p \tag{2.9}$$

（上式实质上根据[13]和[22]得出）

由引理3，可从定理1立即得到如下结果：

定理2　设K为Hilbert空间H的一个非空有界闭凸子集．如果S，$T:K\to K$为渐近正则映射，且有

$$\liminf_{n\to\infty}\|L^n\|<\sqrt{2}$$

则S和T在K中有一公共不动点．

如果在定理2中令$S=T$，又可得出如下结果：

推论2[11]　设K如定理2所定义，如果$T:K\to K$为一渐近正则映射，且有

$$\liminf_{n\to\infty}\|T^n\|<\sqrt{2}$$

则T在K中有一不动点．

定理3　设K为$L^p(1<p\leqslant2)$的非空有界闭凸子集．如果S，$T:K\to K$为渐近正则映射，且

$$\liminf_{n\to\infty}\|L^n\|<\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\cdot(p-1)\cdot2^{(p-1)/p}}\right)\right]^{1/2}$$

则S和T在K中有一公共不动点．

如果在定理3中令$S=T$，则又将有如下结果：

推论3（[10，推论3]）　设K如定理3所定义．如果$T:K\to K$为一渐近正则映射，且

$$\liminf_{n\to\infty}\|T^n\|<\left[\frac{1}{2}\left(+\sqrt{1+4\cdot(p-1)\cdot2^{(p-1)/p}}\right)\right]^{1/2}$$

则T在K中有一不动点．

定理4　设K为$L^p(2<p<+\infty)$的一个非空有界闭凸子集．如果S，$T:K\to K$为渐近正则映射，且

$$\liminf_{n\to\infty}\|L^n\|<\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+8\cdot c_p}\right)\right]^{1/p}$$

则S和T在K中有一公共不动点．

如果在定理4中令$S=T$，则又将有如下结果：

推论4（[10，推论4]）　设K如定理4所定义．如果$T:K\to K$为一渐近正则映射，且

$$\liminf_{n\to\infty}\|T^n\|<\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+8\cdot c_p}\right)\right]^{1/p}$$

则T在K中有一不动点．

三、在其他 Banach 空间中的推论

利用[17]、[20]和[22]中的结果，可由定理1得出在Hardy和Sobolev等空间中的不动点定理．

设H^p，$1<p<\infty$表示在复平面的单位圆盘$|z|<1$上解析的所有函数x的Hardy空间[7]，并且

$$\|x\|=\lim_{r\to 1-}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|x(re^{i\theta})|^p d\theta\right]^{1/p}<+\infty$$

令Ω为$\mathbf{R}^n$的开子集．用$H^{r,p}(\Omega)$，$r\geqslant 0$，$1<p<+\infty$表示广义函数x的Sobolev空间[1,p.149]，并且对所有$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leqslant k$，$D^\alpha x\in L^p(\Omega)$具有范数

$$\|x\|=\left[\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega |D^\alpha x(\omega)|^p d\omega\right]^{1/p}$$

设（Ω_α，Σ_α，μ_α），$\alpha\in\Lambda$为正测度空间序列，其中指标集Λ是有限的或可数的．在$L^p(\Omega_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$中给出一个线性子空间序列$X_\alpha$，用$L_{q,p}$，$1<p<+\infty$，$q=\max(2, p)$表示[16]所有序列$x=\{x_\alpha\in X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$的线性空间并赋予范数

$$\|x\|=\left[\sum_{\alpha\in\Lambda}(\|x_\alpha\|_{p,\alpha})^q\right]^{1/q}$$

其中$\|\cdot\|_{p,\alpha}$表示$L^p(\Omega_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$中的范数．

最后，设$L_p=L^p(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$和$L_q=L^q(S_2, \Sigma_2, \mu_2)$，$1<p<+\infty$，$q=\max(2,p)$且（$S_i$，$\Sigma_i$，$\mu_i$）为正测度空间．用$L_q(L_p)$表示$S_2$上所有可测$L_p$-值函数$x$的Banach空间[6,II,2.10]，且

$$\|x\|=\left[\int_{S_2}(\|x(s)\|_p)^q\mu_2(ds)\right]^{1/q}$$

这些空间是q一致凸的，$q=\max(2,p)$[17,20]，并且在这些空间中范数满足

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^q\leqslant\lambda\|x\|^q+(1-\lambda)\|y\|^q-d\cdot W_q(\lambda)\cdot\|x-y\|^q$$

其中常数

$$d=d_p=\begin{cases}(p-1)/8 & \text{当}1<p\leqslant 2\\ 1/p\cdot 2^p & \text{当}2<p<+\infty\end{cases}$$

因此，从定理1可得如下结果：

定理5 设K为空间E的一个非空有界闭凸子集，其中$E=H^p$，或$E=H^{r,p}(\Omega)$，或$E=L_{q,p}$，或$E=L_q(L_p)$，$1<p<+\infty$，$q=\max(2, p)$，$r\geqslant 0$．如果S，$T:K\to K$为渐近正则映射，且

$$\liminf_{n\to\infty}\|L^n\|<\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4\cdot d\cdot N^q})\right]^{1/q}$$

其中$q=\max(2, p)$，则S和T在K中有一公共不动点．如果在定理5中令$S=T$，则将有：

推论5（[10，推论5]） 设K如定理5所定义．如果$T:K\to K$为渐近正则映射，且

$$\liminf_{n\to\infty}\|T^n\|<\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4\cdot d\cdot N^q})\right]^{1/q}$$

其中$q=\max(2, p)$，则T在K中有一不动点．

参考文献

[1] J. Barros-Neto, *An Introduction to the Theory of Distribution*, Dekker, New York (1973).

[2] F. E. Browder and W. V. Petryshyn, The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), 671—675.

[3] W. L. Bynum, Normal structure coefficients for Banach spacec, *Pacific. J.*

Math., **86** (1980), 427—436.

[4] E. Casini and E. Maluta, Fixed points of uniformly Lipschitzian mappings in spaces with uniformly normal structure, *Nonlinear Anal.*, **9** (1985), 103—108.

[5] J. Danes, On densifying and related mappings and their applications in nonlinear functional analysis, *Theory of Nonlinear Operators, Proc. Summer School*, Oct. 1972, GDR, Akademie-Verlag, Berlin (1974), 15—56.

[6] N. Dunford and J. Schwarz, *Linear Operators*, Vol. 1, Interscience, New York (1958).

[7] W. L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York (1970).

[8] K. Goebel and W. A. Kirk, Topics in metric fixed point theory, *Cambridge Stud. Adv. Math.*, **28**, Cambridge University Press, Longon (1990).

[9] J. Gornicki, Fixed point theorems for asymptotically regular mappings in L^p spaces, *Non-Linear Anal.*, **17** (1991), 153—159.

[10] J. Gornicki, Fixed points of asymptotically regular mappings, *Math. Slovaca*, **43**(3) (1993), 327—336.

[11] M. Kruppel, Ein Fixpunktsatz fur asymptotisch regulare Operatoren im Hilbert-Raum. Wiss. Z. Padagog. Hochsch. "Liselotte Herrman" Gustrow, *Math. Natur. Fak.*, **25** (1987), 241—246.

[12] M. Kruppel, Ein Fixpunktsatz fur asymptotisch regulare Operatoren im gleichmaβig konvexen Banach-Raum, Wiss. Z. Padagog. Hochsch. "Liselotte Herrman" Gustrow, *Math. Natur. Fak.*, **27** (1989), 247—251.

[13] T. C. Lim, H. K. Xu and Z. B. Xu, An L^p inequalities and its applications to fixed point theory and approximation theory, *Progress in Approximation Theory*, Academic Press (1991) , 609—624.

[14] P. K. Lin, A uniformly asymptotically regular mappings without fixed points, *Canada. Math. Bull.*, **30** (1987), 481—483.

[15] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, **I** ——*Function Spaces*, Springer-Verlag, New York, Berlin (1979).

[16] S. A. Pichugov, Jung's constant of the space L^p, (in Russian), *Mat. Zamptki*, **43** (1988), 604—614. (Translation: *Math. Notes*, **43** (1988), 348—354.)

[17] B. Prus and R. Smarzewski, Strongly uniquc best appromations and centers in uniformly convex spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **121** (1987), 10—21.

[18] S. Prus, On Byunm's fixed point theorem, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, **38** (1990), 535—545.

[19] S. Prus, Some estimates for the normal structure coefficient in Banach spaces, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **40**(2) (1991), 128—135.

[20] R. Smarzewski, Strongly unique best approximations in Banach spaces **I**, *J. Approx. Theory*, **51** (1987), 202—217.

[21] R. Smarzewski, On the inequality of Bynum and Drew, *J. Math. Anal. Appl.*, **150** (1990), 146—150.

[22] H. K. Xu, Inequalities in Banach spaces with applications, *Non-Linear Anal.*, **16** (1991), 1127—1138.

[23] C. Zalinescu, On uniformly convex function, *J. Math. Anal. Appl.*, **95** (1983), 344—374.

Fixed Points of a Pair of Asymptotically Regular Mappings

B. K. Sharma B. S. Thakur

(*School of Studies in Mathematics, Pt. Ravishankar Shukla University, Raipur-492010, India*)

Abstract

In this paper, some theorems on fixed points of a pair of asymptotically regular mappings in p-uniformly convex Banach space are proved. For these mappings some fixed point theorems in a Hilbert space, in L^p spaces, in Hardy spaces H^p and in Sobolev spaces $H^{p,k}$, for $1<p<+\infty$ and $k\geqslant 0$ are also established. Thus, results of Gornicki[9,10], Kruppel[11,12] and others are extended.

Key words asymptotically regular mappings, p-uniformly convex Banach space, asymptotic center, fixed points