

超弹性矩形板单向拉伸时微孔的增长*

程昌钧^{1,2} 尚新春²

(1996年12月18日收到)

摘 要

本文研究了含中心微孔的超弹性矩形板在单向拉伸时的有限变形和受力分析。为了考察微孔的存在对矩形板变形和应力的影响, 将问题化成一个超弹性环形板的变形和受力分析, 并用最小势能原理得到变分近似解。进行了数值计算, 分析了微孔的增长情况。

关键词 超弹性矩形板 有限变形 变分近似解 微孔的增长

一、引 言

超弹性材料中的空穴生成与微孔增长是近十多年来人们十分关注和感兴趣的问题。虽然早期的实验就已观察到金属材料和橡胶材料在拉伸过程中会萌生出内部空穴, 但由于空穴的生成与微孔的增长本身是由于材料的不稳定性所引起的, 是一个非线性问题, 故其理论分析工作进展比较缓慢。1982年, Ball^[1] 奠定了空穴生成的非线性理论基础, 之后已有一系列的研究成果问世^[2-7]。本文中, 首先研究不含中心微孔的超弹性矩形板的变形和应力分布。为了考察微孔的存在对矩形板变形和应力状态的影响, 将问题化成一个超弹性环形板的变形和应力分析并用最小势能原理得到了变分近似解。还进行了数值计算, 得到了表征微孔增长的参数 δ 和微孔孔口形状参数 ρ 与载荷参数 A 之间的关系。本文所给出的变形特征与有限元分析结果^[8]一致。

二、无微孔时矩形板的变形和应力分析

设不可压超弹性矩形板在中心处具有半径为 a 的微小孔洞。在矩形板的两对边 $X_1 = \pm L_1/2$ 上作用有均匀拉伸载荷 q , 在另两对边 $X_2 = \pm L_2/2$ 和上、下表面 $Z = \pm H/2$ 处, 矩形板不受力。这里, (X_1, X_2, Z) 是物质坐标, 其原点与微孔中心重合, L_1 、 L_2 和 H 分别为矩形板变形前的长、宽、高。为了方便取空间坐标系 (x_1, x_2, z) 与物质坐标系 (X_1, X_2, Z) 重合。

• 国家自然科学基金资助项目, 甘肃省自然科学基金资助项目。

1 上海市应用数学和力学研究所, 上海大学, 上海 2010072.

2 兰州大学, 兰州 730000.

为了分析矩形板的变形和应力, 设无孔时, 矩形板处于均匀变形状态, 即有

$$x_1 = \lambda_1 X_1, \quad x_2 = \lambda_2 X_2, \quad z = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} Z \quad (2.1)$$

显然不可压条件是自动满足的, λ_1, λ_2 分别为 X_1 和 X_2 方向的主伸长, 它们是与拉伸载荷 q 有关的常数.

设矩形板是由 neo-Hookey 材料制成的, 其应变能函数为^[6]

$$W = \mu(I_1 - 3), \quad I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \quad (2.2)$$

式中 μ 为材料的初始剪切模量. 于是, 非零的 Cauchy 应力分量为

$$\sigma_{11} = \mu \lambda_1^2 - p, \quad \sigma_{22} = \mu \lambda_2^2 - p, \quad \sigma_{33} = \frac{\mu}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} - p \quad (2.3)$$

其中 p 为静水压力, 是未知量.

由所给的边界条件 $\sigma_{11} = q$, 可得

$$p = \frac{\mu}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} = \mu \lambda_2^2 = \mu \lambda_1^2 - q \quad (2.4)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{11} = \mu \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \quad (2.5)$$

式中

$$\lambda_1 = \lambda(A), \quad \lambda_2 = [\lambda(A)]^{-1/2}, \quad A = \frac{q}{\mu} \quad (2.6)$$

A 为载荷参数. 由 (2.4) 可知, λ 满足

$$\lambda^3 - A\lambda - 1 = 0 \quad (2.7)$$

注意到 $\lambda(A) > 0$, 于是 (2.7) 的正实根为

$$\lambda(A) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{A^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{A^3}{27}}} & (0 \leq A \leq \sqrt[3]{\frac{27}{4}}) \\ 2\sqrt{\frac{A}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \sqrt{\frac{27}{4A^3}}\right) & (A \geq \sqrt[3]{\frac{27}{4}}) \end{cases} \quad (2.8)$$

(2.1)、(2.5)、(2.6)、(2.8) 给出了无中心微孔超弹性矩形板受单向拉伸时的变形和应力状态.

令 (R, Θ, Z) 和 (r, θ, z) 分别表示与 (X_1, X_2, Z) 和 (x_1, x_2, z) 所对应的物质柱坐标和空间柱坐标. 于是, 变形前以原点为心, R 为半径的圆柱面变形后成为椭圆柱面, 其方程为

$$\left(\frac{x_1}{\lambda}\right)^2 + (\sqrt{\lambda} x_2)^2 = X_1^2 + X_2^2 = R^2 \quad (2.9)$$

长半轴为 λR , 短半轴为 $R/\sqrt{\lambda}$.

在柱坐标系中, 板的变形 (2.1) 可写成

$$r = R\phi(\Theta), \quad \theta = \psi(\Theta), \quad z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Z \quad (2.10a)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \phi(\Theta) &= \left(\lambda^2 \cos^2 \Theta + \frac{1}{\lambda} \sin^2 \Theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ \psi(\Theta) &= \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^3}} \operatorname{tg} \Theta\right) = \sqrt{\lambda} \int_0^\Theta \frac{ds}{\phi^2(s)} \end{aligned} \right\} \quad (2.10b)$$

于是, 变形梯度 F 为

$$F = \begin{bmatrix} \phi & \phi' & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda}/\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

式中 $(\cdot)' = d(\cdot)/d\Theta$. 从而由本构关系 $\sigma = \mu(F F^T - pI)$ 可得非零的 Cauchy 应力的物理分量

$$\sigma_{rr} = \mu \left(\phi^2 + \phi'^2 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \mu \left(\frac{\lambda}{\phi^2} - \frac{1}{\lambda} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \mu \sqrt{\lambda} \frac{\phi'}{\phi} \quad (2.12)$$

三、含有中心微孔的超弹性矩形板

按照圣维南原理, 可以认为微孔的存在只对微孔附近的应力和变形有明显的影响, 而对远离微孔的区域其影响是微小的, 因而可忽略不计. 同时假设与微孔同心、半径为 R 的圆柱面变形后仍变成椭圆柱面. 与前面不同 (公式 (2.9)) 的是, 现在椭圆柱面的长半轴和短半轴是与 R 有关的待定函数. 若变形后矩形板仍是等厚度的, 则有

$$x_1 = f_1(R)X_1, \quad x_2 = f_2(R)X_2, \quad z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}Z \quad (3.1)$$

式中 λ 是由 (2.8) 给出的主伸长. 于是, 由变形梯度和不可压条件可得 f_1 和 f_2 满足的微分方程

$$f_1 f_2 + R f_1 f_2' = \sqrt{\lambda}, \quad f_1' f_2 - f_1 f_2' = 0 \quad (3.2)$$

其解可写成为

$$f_1(R) = \alpha \sqrt[4]{\lambda} \cdot \sqrt{g(R, \beta)}, \quad f_2(R) = \frac{1}{\alpha} \sqrt[4]{\lambda} \cdot \sqrt{g(R, \beta)} \quad (3.3)$$

式中 $g(R, \beta) = 1 + (\beta/R)^2$, 而 α, β 为积分常数. 将 (3.3) 代入 (3.1), 并写成柱坐标形式得

$$\left. \begin{aligned} r &= R \sqrt{g(R, \beta)} G(\Theta), \quad z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Z \\ \theta &= \sqrt{\lambda} \int_0^\Theta \frac{ds}{G^2(s)} = \arctg \left(\frac{1}{\alpha^2} \operatorname{tg} \Theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.4a)$$

其中,

$$G(\Theta) = \sqrt[4]{\lambda} \left(\alpha^2 \cos^2 \Theta + \frac{1}{\alpha^2} \sin^2 \Theta \right)^{1/2} \quad (3.4b)$$

这样, 在柱坐标系 (r, θ, z) 中变形梯度的物理分量为

$$F = \begin{bmatrix} G/g(R, \beta) & \sqrt{g(R, \beta)} G' & 0 \\ 0 & \sqrt{g(R, \beta)} \sqrt{\lambda}/G & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

再利用 (2.9) 及矩形板上、下表面的边界条件可得 $p = \mu/\lambda$, 非零的 Cauchy 应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \mu \left[\frac{G^2}{\sqrt{g(R, \beta)}} + g(R, \beta) G'^2 - \frac{1}{\lambda} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \mu \left[\frac{\lambda g(R, \beta)}{G^2} - \frac{1}{\lambda} \right], \quad \sigma_{r\theta} = \mu \sqrt{\lambda} g(R, \beta) \frac{G'}{G} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

在远离小孔的区域内, 应力状态和变形状态与无孔时的情况相同, 于是在上式中, 令 R

$\rightarrow +\infty$, 并注意到(3.1)、(3.3), 则得

$$\sigma_{rr} = \mu \left(G^2 + G'^2 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \mu \left(\frac{\lambda}{G^2} - \frac{1}{\lambda} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \sqrt{\lambda} \frac{G'}{G} \quad (3.7a)$$

$$x_1 = \alpha \sqrt{\lambda} X_1, \quad x_2 = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\lambda} X_2, \quad z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Z \quad (3.7b)$$

与无孔时的应力(2.12)和变形(2.1)相比较, 有

$$G = \phi, \quad \alpha = \sqrt{\lambda^3} \quad (3.8)$$

显然, 当 $\beta=0$ 时, (3.6)和(3.8)给出无孔时的应力解答。

第一类Piola-Kirchhoff应力张量为

$$\mathbf{T} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$$

其物理分量可由(3.5)、(3.6)得到

$$\left. \begin{aligned} T_{rR} &= \mu \left\{ \phi / \sqrt{g(R, \beta)} - \sqrt{g(R, \beta)} / \lambda \phi \right\} \\ T_{\theta\theta} &= \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \lambda \sqrt{g(R, \beta)} / \phi - \phi / \lambda \sqrt{g(R, \beta)} \right\} \\ T_{\theta R} &= \mu \phi' \sqrt{g(R, \beta)} / \sqrt{\lambda^3}, \quad T_{r\theta} = \mu \sqrt{g(R, \beta)} \phi' \\ T_{rz} &= T_{zr} = T_{\theta z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

不难看出, 由(3.9)或(3.6)给出的应力分量不能严格地满足微孔自由边的边界条件和平衡方程。下面利用最小势能原理使微孔的边界条件和平衡方程在变分意义下得到满足。

设在未变形的矩形板上以原点为心、以充分大的数 b 为半径, 取出一个圆柱面, 并记其单位外法线矢量 $\mathbf{N} = \mathbf{G}_R$ 。设点 (R, Θ, Z) 处物质柱坐标的基矢为 $\{\mathbf{G}_R, \mathbf{G}_\theta, \mathbf{G}_Z\}$, 同时设点 (r, θ, z) 处空间柱坐标基矢为 $\{\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_\theta, \mathbf{g}_z\}$, 则在 $R=b$ 的圆柱面上, 应力矢量为

$$\mathbf{i} = \mathbf{T} \mathbf{N} = T_{rR} \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{G}_R + T_{\theta R} \mathbf{g}_\theta \otimes \mathbf{G}_R = T_{rR} \mathbf{g}_r + T_{\theta R} \mathbf{g}_\theta$$

将(3.9)代入上式, 并令 $R=b \rightarrow +\infty$, 则得

$$\mathbf{i} = \mu \left[(\phi - 1/\lambda \phi) \mathbf{g}_r + \phi' / \sqrt{\lambda^3} \mathbf{g}_\theta \right] \quad (3.10)$$

对应的位移矢量为

$$\mathbf{u} = (r-R) \mathbf{g}_r + R(\theta-\Theta) \mathbf{g}_\theta + (z-Z) \mathbf{g}_z \quad (3.11)$$

于是, 问题可近似地化为求解环形域

$$\Omega = \left\{ R \in [a, b], a \ll b, \Theta \in [0, 2\pi], Z \in \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2} \right] \right\}$$

上的变形分析, 使其在微孔边界 $R=a$ 上不受力, 而在外边界 $R=b$ 上受已知外力 \mathbf{i} 的作用。该问题的总势能

$$\Pi = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} (\text{tr}(\mathbf{F} \mathbf{F}^T) - 3) dV - \int_{\partial \Omega} \mathbf{i} \cdot \mathbf{u} ds \quad (3.12)$$

将(3.4)、(3.8)代入(3.5)、(3.10)、(3.11)后再代入(3.12), 可得 Π 。其无量纲表达式为

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}(\delta, \lambda, \varepsilon) = -\frac{1}{4} \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \delta \ln \left(\frac{\varepsilon^2(1+\delta)}{\varepsilon^2+\delta} \right) - \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \sqrt{1+\delta} + F(\varepsilon, \lambda) \quad (3.13)$$

式中 $\bar{\Pi} = \Pi / \mu \pi b^2 H$, $\delta = \beta^2 / b^2$, $\varepsilon = a/b$, $F(\varepsilon, \lambda)$ 是与 δ 无关的函数。于是, $\delta \Pi = 0$ 等价于 $\delta \bar{\Pi} = 0$, 从而由 $\partial \bar{\Pi} / \partial \delta = 0$, 有

$$\frac{1}{2} \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \left\{ \ln \left(\frac{\varepsilon^2(1+\delta)}{\varepsilon^2+\delta} \right) - \frac{\delta(1-\varepsilon^2)}{(1+\delta)(\varepsilon^2+\delta)} \right\} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{1}{\sqrt{1+\delta}} = 0 \quad (3.14)$$

若给定微孔的几何参数 ε 和载荷参数 $\lambda=q/\mu$ ，则由(2.8)可得 $\lambda(\lambda)$ ，再由(3.14)可解出 $\delta=\delta(\lambda, \varepsilon)$ 。数值结果示于图1中。可以看到， ε 越小， δ 随 λ 的变化越平缓，当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时， $\delta=0$ 。

为了直观地显示微孔的增长情况，记

$$\rho=r(a, \Theta)/b, \quad b=\min\left(\frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2}\right)$$

则由(3.4)、(3.8)得到

$$\rho=(\varepsilon^2+\delta)^{1/2}\left(\lambda^2\cos^2\Theta+\frac{1}{\lambda}\sin^2\Theta\right)^{1/2} \quad (3.15)$$

式中 $\delta=\delta(\lambda, \varepsilon)$ 由(3.14)计算， $\lambda=\lambda(\lambda)$ 由(2.8)计算。若取 $\varepsilon=0.01$ ，则从(3.15)可以算得微孔孔口形状随载荷参数 λ 的变化，如图2所示。计算结果表明，微孔的半径随拉伸载荷的增加而增加，设载荷作用方向(X_1 方向)增加较快，而在 X_2 方向，微孔的变化并不敏感。图3中示出了矩形板在单向拉伸载荷 $\lambda=q/\mu$ 作用下的变形情况与微孔的增长情况。微孔的变形特征与有限元所得结果一致^[3]

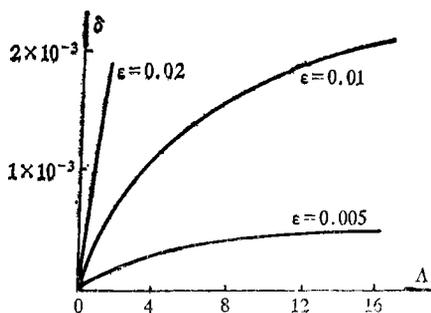


图1 微孔增长参数 δ 与载荷参数 λ 的关系

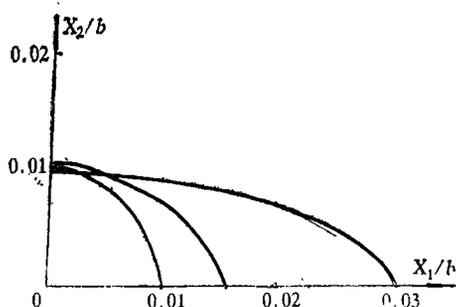


图2 微孔形状随载荷 λ 的变化

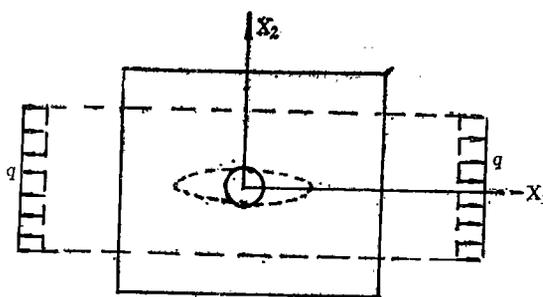


图3 矩形板的变形与微孔的增长

参 考 文 献

- [1] J. M. Ball, Discontinuous equilibrium solution and cavitation in nonlinear elasticity, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A306 (1982), 557-610.
- [2] C. O. Horgan and J. J. Pence, Cavity formation at the center of a composite incompressible nonlinearly elastic sphere, *J. Appl. Mech.*, 50 (1989), 302-308.

- [3] Hou Hangsheng, A study of combined asymmetric and cavitated bifurcation in Neo-Hooke material under symmetric dead loading, *J. Appl. Mech.*, 60 (1993), 1—7.
- [4] P. Podio-Guidugli, C. G. Vergarm and E. G. Virga, Discontinuous energy minimizers in non-linear elastostatics. An example of J. Ball revisited, *J. Elasticity*, 16 (1986), 75—96.
- [5] D. A. Polignone and C. O. Horgan, Effect of material anisotropy and inhomogeneity on cavitation for composite incompressible nonlinear elastic spheres, 3 (1993), 3381—3416.
- [6] C. D. Horgan and R. Abeyaratne, A bifurcation problem for a compressible nonlinear elastic medium, growth of a micro-void, *J. Elasticity*, 16 (1986), 189—200.
- [7] D. M. Haughton, Cavitation in compressible elastic membranes, *Int. J. Engng. Sci.*, 28 (1990), 163—168.
- [8] T. T. Oden, *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill, New York (1972).
- [9] R. T. Shield, Equilibrium solution in finite elasticity, *ASME J. Appl. Mech.*, 50th Anniversary Issue (1983).

The Growth of the Void in a Hyperelastic Rectangular Plate under a Uniaxial Extension

Cheng Changjun

(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000,
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

Shang Xinchun

(Lanzhou University, Lanzhou 730000, P. R. China)

Abstract

In the present paper, the finite deformation and stress analysis for a hyperelastic rectangular plate with a center void under a uniaxial extension is studied. In order to consider the effect of the existence of the void on the deformation and stress of the plate, the problem is reduced to the deformation and stress analysis for a hyperelastic annular plate and its approximate solution is obtained from the minimum potential energy principle. The growth of the cavitation is also numerically computed and analysed.

Key words hyperelastic rectangular plate, finite deformation, growth of void, variational principle