应用数学和力学、第18卷 第7期（1997年7月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

半线性摄动电报方程的渐近理论及应用

赖绍永[1]

（丁协平推荐，1996年2月15日收到，1997年1月20日收到修改稿）

摘　　要

对二阶半线性摄动电报方程的初值问题，本文给出了一个渐近方法。证明了渐近理论及形式近似解的合理性都在时间变量无穷大时（即$0\leqslant t\leqslant O(|\varepsilon|^{-1})$）成立。作为渐近理论的应用，我们对一个带初值问题的特殊电报方程进行了研究，得到了两个$|\varepsilon|^{-1}$阶渐近近似解。

关键词　电报方程　渐近近似解　无穷大时间　应用

一、引　　言

讨论如下半线性摄动电报方程

$$u_{tt}-u_{xx}+p^2u=\varepsilon f(t,\ x,\ u,\ u_t,\ u_x,\ \varepsilon)\qquad(-\infty<x<\infty,\ t>0)\tag{1.1}$$

$$u(0,\ x)=u_0(x,\ \varepsilon)\qquad(-\infty<x<\infty)\tag{1.2}$$

$$u_t(0,\ x)=u_1(x,\ \varepsilon)\qquad(-\infty<x<\infty)\tag{1.3}$$

这里ε和p是常数且$0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll1$，$p>0$，$u=u(t,\ x)$，$f$；$u_0$和$u_1$满足一定条件（见第二节）。

近年来，对偏微分方程渐近理论的研究，国内外许多学者产生了极大兴趣（见[1]～[10]）。在[7]中，考虑了方程$u_{tt}-u_{xx}+u=\varepsilon f(t,\ x,\ u,\ \varepsilon)$初边值问题解的渐近理论，得到了（在古典意义下）当$0\leqslant t\leqslant L|\varepsilon|^{-\frac{1}{2}}$，$0\leqslant x\leqslant\pi$时解的$O(|\varepsilon|^{-\frac{1}{2}})$渐近近似解，并把方程$u_{tt}-u_{xx}+u=\varepsilon f(t,\ x,\ u,\ \varepsilon)$初值及初边值问题（$-\infty<x<\infty$，$0\leqslant t\leqslant L|\varepsilon|^{-1}$）解（在古典意义下）的$O(|\varepsilon|^{-1})$渐近理论作为一个问题在[7]中提出。在[8]中，Horssen解决了方程(1.1)初边值问题的渐近理论，即在$0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant t\leqslant O(|\varepsilon|^{-1})$时得到了在古典意义下的$O(|\varepsilon|^{-1})$渐近近似解，而对方程(1.1)的初值问题的渐近理论（当$-\infty<x<\infty$，$0\leqslant t\leqslant T=O(|\varepsilon|^{-1})$）仍然是一个开问题。本文未能在古典意义下回答这一问题，而是在空间$C_\varepsilon(J_L,\ H^s(R^1))\cap C_\varepsilon^1(J_L,\ H^{s-1}(R^1))$中研究了问题(1.1)～(1.3)解的渐近理论，得到了$O(|\varepsilon|^{-1})(\varepsilon\to0)$渐近近似解，和[7]比较，本文对初值及非线性项$f$的限制是在空间$C_\varepsilon(J_L,\ H^s(R^1)\cap C_\varepsilon^1(J_L,\ H^{s-1}(R^1))$中，因而限制性条件较弱一些。

建立渐近理论及形式近似解的一个有趣方面是：我们在$\varepsilon=0$及$\varepsilon=1$时考虑问题(1.1)～(1.3)；当$\varepsilon=0$，很容易证明解的存在唯一性；当$\varepsilon=1$时，仅仅只有得到$x\in R^1$，$0\leqslant t\leqslant T=O(1)$时解的局部存在唯一性定理（见M. Taylor[11]）。人们自然会问当$\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\ \varepsilon_0]$，0

1 四川师范大学数学系，成都 610068．

$\leqslant t\leqslant T=T(\varepsilon)\to\infty(\varepsilon\to 0)$方程(1.1)～(1.3)的解是否存在唯一？文献[7]、[9]、[10]对带初边值问题的波方程$u_{tt}-u_{xx}=\varepsilon f(t, x, u, u_t, u_x, \varepsilon)$作了详细研究，得到了在$|x|<M(M>0$为常数$)$ $0\leqslant t\leqslant T=O(|\varepsilon|^{-\frac{1}{2}})$或$O(|\varepsilon|^{-1})(\varepsilon\to 0)$时相应的渐近理论及应用。

在第二节中，我们将给出(1.1)～(1.3)解的适定性，第三节证明形式近似解是渐近近似解：第四节作为渐近理论的应用给出了一个带初值问题的特殊摄动电报方程的$O(|\varepsilon|^{-1})$渐近解。

二、适 定 性

设$J_L=\{t|0\leqslant t\leqslant L(|\varepsilon|^{-1})\}$，这里$L>0$充分小且不依赖于$\varepsilon$。

首先给出如下定义：

令 $\|u\|_s=\|u(t, x, \varepsilon)\|_{H^s(R^1)}$

$\|u(t, \varepsilon)\|=\|u\|_s+\|u_t\|_{s-1}$

$\|u\|_{J_L}=\sup\limits_{t\in J_L}\|u(t, \varepsilon)\|$

当然$\|u\|_{J_L}$依赖于ε。

定义1 称$u(t, x, \varepsilon)\in C_\varepsilon(J_L, H^s(R^1))\cap C_\varepsilon^1(J_L, H^{s-1}(R^1))$，是指当$s>\dfrac{3}{2}$时，存在不依赖于$\varepsilon$的正常数$M$使得$\|u\|_{J_L}\leqslant M$。

设$R_0>3(\|u_0\|_s+\|u_1\|_{s-1})$，对常数$R_0$，记

$$B(R_0)=\{u: \|u\|_{J_L}<R_0\}.$$

假设u_0，u_1，f满足下面条件

$$\|u_0(x, \varepsilon)\|_{H^s(R^1)},\ \|u_1(x, \varepsilon)\|_{H^{s-1}(R^1)}\ \text{关于参数}\varepsilon\in[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\text{连续} \tag{2.1}$$

如果u，$w\in B(R_0)$，设$f(t, x, u, u_t, u_x, \varepsilon)$关于$t$，$x$，$u$，$u_t$，$u_x$，一次连续可微且

$$\|f(t, x, u, u_t, u_x, \varepsilon)\|_{H^s(R^1)}\leqslant M_1\|u\|_{J_L},$$

$$\|f(t, x, u, u_t, u_x, \varepsilon)-f(t, x, w, w_t, w_x, \varepsilon)\|_{H^s(R^1)}\leqslant M_2\|u-w\|_{J_L},$$

这里M_1，$M_2>0$且不依赖于ε。 (2.2)

于是我们有：

定理1 设$s>\dfrac{3}{2}$，$0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1$，假设$u_0(x, \varepsilon)$，$u_1(x, \varepsilon)$及$f(t, x, u, u_t, u_x, \varepsilon)$满足(2.1)、(2.2)，则存在唯一解$u(t, x, \varepsilon)\in C_\varepsilon(J_L, H^s(R^1))\cap C_\varepsilon^1(J_L, H^{s-1}(R^1))$满足(1.1)～(1.3)，这里$0\leqslant t\leqslant L|\varepsilon|^{-1}$，正数$L$充分小且不依赖于$\varepsilon$，而且

$$\|u\|_{J_L}\leqslant C(\|u_0\|_s+\|u_1\|_{s-1})$$

这里C不依赖于ε。

证明 设$K=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+p^2$，假设$v$满足

$$Kv=0$$

$$(v_1, v_t)|_{t=0}=(u_0, u_1)$$

由[12]知K存在前向基本解E。当$u\in B(R_0)$时，令$F(u)=v+E(\varepsilon f(t, x, u, u_t, u_x, \varepsilon))$。由索波列夫定理知对$(t, x)$有$B(R_0)\subset C^0(J_L\times R^1)$，故$F$有意义。

选取L充分小，我们只须证明：

(i) $\|F(u)-F(w)\|_{J_L}\leqslant\frac{1}{2}\|u-w\|_{J_L}\qquad(\forall,\ u,\ w\in B(R_0))$

(ii) $F(B(R_0))\subset B(R_0)$

为证明(i)，令$a(\xi)=\sqrt{\xi^2+p^2}$，因

$$\widehat{Fu}(t,\ \xi,\ \varepsilon)=\cos(ta(\xi))\hat{u}_0(\xi,\ \varepsilon)+\frac{\sin(ta(\xi))}{a(\xi)}\hat{u}_1(\xi,\ \varepsilon)$$

$$+\int_0^t\frac{\sin[(t-\tau)a(\xi)]}{a(\xi)}g(\tau,\ \xi,\ \varepsilon)d\tau$$

这里 $g(t,\ \xi,\ \varepsilon)=\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-ix\xi]f(t,\ x,\ u,\ u_t,\ u_x,\ \varepsilon)dx$,

$\hat{u}$是u对x的Fourier变换，于是对u，$w\in B(R_0)$，由条件(2.2)及Hölder不等式知：

$$\|F(u)(t,\ \varepsilon)-F(w)(t,\ \varepsilon)\|\leqslant\max(L^{\frac{1}{2}}/pL^{\frac{1}{2}})(\varepsilon t)^{\frac{1}{2}}[\sup_{\tau\in J_L}\|f(\tau,\ x,\ u,\ u_t,\ u_x,\ \varepsilon)$$

$$-f(\tau,\ x,\ w,\ w_t,\ w_x,\ \varepsilon)\|_{H^s(R^1)}+\|f(\tau,\ x,\ u,\ u_t,\ u_x,\ \varepsilon)$$

$$-f(\tau,\ x,\ w,\ w_t,\ w_x,\ \varepsilon)\|_{H^{s-1}(R^1)}]\leqslant2\max(1/p,1)LM_2\|u-w\|_{J_L}$$

选取L充分小使得$2\max(1/p,1)LM_2\leqslant1/2$，则(i)成立。

注意到

$$\|F(u)\|_{J_L}\leqslant2\|u_0\|_s+2\|u_1\|_{s-1}+2\max(1/p,\ 1)LM_1\|u\|_{J_L}$$

择取L，使得$2\max(1/p,\ 1)LM_2<1/3$，则

$$\|F(u)\|_{J_L}<R_0.$$

由Banach不动点知存在唯一的

$$u\in C_s(J_L,\ H^s(R^1))\cap C_s^1(J_L,\ H^{s-1}(R^1))$$

且$Fu=u$，故

$$\|u\|_{J_L}\leqslant2(\|u_0\|_s+\|u_1\|_{s-1})+2\max(1/p,\ 1)LM_1\|u\|_{J_L}$$

由于可选取L使$2\max(1/p,\ 1)LM_1<1/3$，于是定理1得证。

三、渐近近似解

摄动电报方程(1.1)的形式近似解是在ε某些阶以下满足(1.1)～(1.3)，为了证明构造的形式近似解为渐近近似解($\varepsilon\to0$)，我们需要作进一步分析。

假设在$J_L\times R^1\times[-\varepsilon_0,\ \varepsilon_0]$中，函数$v(t,\ x,\ \varepsilon)$满足

$$v_{tt}-v_{xx}+p^2v=\varepsilon f(t,\ x,\ v,\ v_t,\ v_x,\ \varepsilon)+|\varepsilon|^mc_1(t,\ x,\ \varepsilon)$$

$$(m>1,\ t>0;\ -\infty<x<\infty)\qquad(3.1)$$

$$v(0,\ x,\ \varepsilon)=u_0(x,\ \varepsilon)+|\varepsilon|^{m-1}c_2(x,\ \varepsilon)=v_0(x,\ \varepsilon)\qquad(3.2)$$

$$v_t(0,\ x,\ \varepsilon)=u_1(x,\ \varepsilon)+|\varepsilon|^{m-1}c_3(x,\ \varepsilon)=v_1(x,\ \varepsilon)\qquad(3.3)$$

这里u_0，u_1，f满足(2.1)、(2.2)。

设$c_1(t,\ x,\ \varepsilon)$，$c_2(x,\ \varepsilon)$，$c_3(x,\ \varepsilon)$满足下列条件

对$(t,\ x)\in J_L\times R^1$，有$c_1(t,\ x,\ \varepsilon)\in C^1(J_L,\ H^s(R^1))$,

$$c_2(x,\ \varepsilon)\in H^s(R^1)\cdot c_3(x,\ \varepsilon)\in H^{s-1}(R^1);\qquad(3.4)$$

$\|c_2(x,\ \varepsilon)\|_{H^s(R^1)}$，$\|c_3(x,\ \varepsilon)\|_{H^{s-1}(R^1)}$关于$\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\ \varepsilon_0]$连续；(3.5)

$\|E(|\varepsilon|c_1)\|_{J_L}$一致有界 (3.6)

由定理 1 知，初值问题(3.1)～(3.3)对$-\infty<x<\infty$，$0\leqslant t\leqslant T=0(|\varepsilon|^{-1})$($\varepsilon\to 0$ 时，$t\to\infty$)时存在唯一解$v\in C_s(J_L, H^s(R^1))\cap C_t^1(J_L, H^{s-1}(R^1))$。问题(3.1)～(3.3)可以换成如下等价方程

$$v(t, x, \varepsilon)=v^*+E[\varepsilon f(t, x, v, v_t, v_x, \varepsilon)+|\varepsilon|^m c_1(t, x, \varepsilon)] \tag{3.7}$$

这里E是K的前向基本解，v^*满足

$$Kv^*=0,\ v^*(0, x, \varepsilon)=v_0(x, \varepsilon),\ v_t^*(0, x, \varepsilon)=v_1(x, \varepsilon)$$

要证明$v(t, x, \varepsilon)$是初值问题(1.1)～(1.3)的渐近近似解，只须证明：

$$\|u-v\|_{J_L}=O(\delta(\varepsilon)),\ 这里\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0。$$

因u满足

$$u=v_1+E(\varepsilon f(t, x, u, u_t, u_x, \varepsilon))$$

这里v_1满足$Kv_1=0$，$(v_1, v_{1t})|_{t=0}=(u_0, u_1)$。

因

$$\begin{aligned}&E[\varepsilon f(t, x, v, v_t, v_x, \varepsilon)+|\varepsilon|^m c_1(t, x, \varepsilon)]\\&\quad=E[\varepsilon f(t, x, v, v_t, v_x, \varepsilon)]+|\varepsilon|^{m-1}E[|\varepsilon|c_1(t, x, \varepsilon)]\end{aligned} \tag{3.8}$$

由定理 1 的证明知

$$\begin{aligned}&\|E[\varepsilon f(t, x, v, v_t, v_x, \varepsilon)]-E[\varepsilon f(t, x, u, u_t, u_x, \varepsilon)]\|\\&\quad\leqslant 2\max(1/p, 1)LM_2\|u-v\|_{J_L}\end{aligned} \tag{3.9}$$

由(3.4)～(3.9)知

$$\begin{aligned}\|u-v\|_{J_L}\leqslant{}&2\max(1/p, 1)LM_2\|u-v\|_{J_L}+c_{\varepsilon_0}\{|\varepsilon|^{m-1}[\|c_2(x, \varepsilon)\|_s\\&+\|c_3(x, \varepsilon)\|_{s-1}+\|E(|\varepsilon|c_1)\|_{J_L}]\}.\end{aligned}$$

由于$m>1$，选取L充分小，可得

$$\|u-v\|_{J_L}=O(|\varepsilon|^{m-1})$$

这样我们有

定理2 假设 $m>1$，形式近似解$v(t, x, \varepsilon)$满足(3.1)～(3.3)；$u_0(x, \varepsilon)$，$u_1(x, \varepsilon)$及$f(t, x, u, u_t, u_x, \varepsilon)$满足(2.1)、(2.2)；$c_1(t,x,\varepsilon)$，$c_2(x,\varepsilon)$，$c_3(x,\varepsilon)$满足(3.4)～(3.6)，则形式近似解$v(t, x, \varepsilon)$是初值问题(1.1)～(1.3)解$u$的渐近近似解($\varepsilon\to 0$)且

$$\|u-v\|_{J_L}=O(|\varepsilon|^{m-1})\qquad(-\infty<x<\infty,\ 0\leqslant t\leqslant L|\varepsilon|^{-1})$$

这里正数L充分小且不依赖于ε。

四、应　用

用摄动方法，我们将应用定理 1 及定理 2 去讨论如下的电报方程（见[8]或[12]）

$$u_{tt}-u_{xx}+u+\varepsilon u^2=0\qquad(-\infty<x<\infty,\ t>0,\ 0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1) \tag{4.1}$$

给定初值

$$u(0, x)=\varphi(x)\qquad(-\infty<x<\infty) \tag{4.2}$$

$$u_t(0, x)=\psi(x)\qquad(-\infty<x<\infty) \tag{4.3}$$

这里$\varphi(x)\in H^s(R^1)$，$\psi(x)\in H^{s-1}(R^1)$，$s>3/2$，和[8]一样，我们假设$\varphi(x)$，$\psi(x)$充分光滑，目的是为了满足条件(2.1)、(2.2)、(3.4)、(3.5)及(3.6)。

利用摄动方法，$u(t, x, \varepsilon)$被假定有如下形式

$$u(t,\ x,\ \varepsilon)=u_0(t,\ x)+\varepsilon u_1(t,\ x)+\varepsilon^2 u_2(t,\ x)+\cdots \tag{4.4}$$

把(4.4)代入(4.1)～(4.3)，由ε的同次幂系数相等得：

$$u_{0tt}-u_{0xx}+u_0=0,\ u(0,\ x)=\varphi(x),\ u_1(0,\ x)=\psi(x) \tag{4.5}$$

$$u_{1tt}-u_{1xx}+u_1+u_0^2=0,\ u_1(0,\ x)=0,\ u_{1t}(0,\ x)=0 \tag{4.6}$$

引用[12]中的结果，我们有

$$u_0(t,\ x)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{x-t}^{x+t}J_0[t^2-(\xi-x)^2]^{\frac{1}{2}}\varphi(\xi)d\xi\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}J_0[t^2-(\xi-x)^2]^{\frac{1}{2}}\psi(\xi)d\xi\right.$$

$$u_1(t,\ x)=-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{1+t-\tau}J_0[(t-\tau)^2-(\xi-x)^2]^{\frac{1}{2}}u_0^2(\tau,\ \xi)d\xi d\tau$$

这里J_0是零阶Bessel函数。

选取$\varphi(x)$，$\psi(x)$充分光滑，使得$\|u_0\|_{J_L}$和$\|u_1\|_{J_L}$一致有界，

令$\bar{u}(t,\ x)=u_0(t,\ x)+\varepsilon u_1(t,\ x)$

我们先说明在定理 2 的意义下$\bar{u}(t,\ x)$满足(4.1)。因

$$\begin{aligned}&\bar{u}_{tt}-\bar{u}_{xx}+\bar{u}+\varepsilon\bar{u}^2\\&=u_{0tt}-u_{0xx}+u_0+\varepsilon(u^0{}_{tt}-u_{1xx}+u_1+u_0^2)+\varepsilon^2(2u_0u_1+u_0^2)\\&=0+0+\varepsilon^2(2u_1u_1+u_1^2)\\&=\varepsilon^2(2u_0u_1+u_1^2)=\varepsilon^2\bar{c}_1(t,\ x,\ \varepsilon)\end{aligned}$$

由定理 2 知$\bar{u}(t,\ x)$是初值问题(4.1)～(4.3)的解$u(t,\ x)$的ε渐近近似解，即

$$\|u-\bar{u}\|_{J_L}=O(|\varepsilon|)\qquad(-\infty<x<\infty,\ 0\leqslant t\leqslant L|\varepsilon|^{-1})$$

这里正数L充分小且不依赖ε；由于

$$\begin{aligned}&\|u-u_0\|_{J_L}\leqslant\|u-\bar{u}\|_{J_L}+\|\bar{u}-u_0\|_{J_L}\\&=\|u-\bar{u}\|_{J_L}+\|\varepsilon u_1\|_{J_L}=O(|\varepsilon|)\end{aligned}$$

这样可知$u_0(t,\ x)$，$\bar{u}(t,\ x)$都是问题(4.1)～(4.3)的ε渐近近似解。

参 考 文 献

[1] Lu Yuguang, Existence and asymptotic behavior of solution to inhomogeneous systems of gas dynamics with viscosity, *Acta Mathematica Scientia*, **12**(1) (1992), 51—61.

[2] 陆云光，非均质系统气体动力学解的渐近性质，科学通报，**34** (1989), 631.

[3] O. M. Kiselev, Asymptotic solutions of the Cauchy problem of the perturbed Klein-Fock-Gordon equation, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Stekolw.(LOMI) 165 (1987); Mat, Vopr. Teor, Rasprostranen 17 (1987), 115—121 (in Russian).

[4] A. H. J. Cloot and B. M.Herbst, Analytical instability of the Klein Gordobn equation, *J. Comput. Appl. Math.*, **21** (1988), 17—26.

[5] C. G. A. Van Der Beek, Normal forms for weaky ninlinear perturbed wave equations, Ph. D Thesis, Delft University of Technology, The Netherlands (1989).

[6] A. L. Shtaras, The averaging method for weakly nonlinear operator equations, *Mat. Sb.*, **134**(2) (1987); *Mat. Sb.*, **62**(1) (1987), 223—242.(English translation)

[7] W. T. Van Horssen and A. H. P Van Der Bungh, On initial boundary value problems for weakly semilinear telegraph equations, asymptotic theory and application, *AIAN Appl. Math.*, 48(4) (1988), 719—736.

[8] W. T. Van Horssern, Asymptotics for a class of semilinear hyperbolic equations with an application to a problem with a quadratic nonlinearity, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Application*, 19(6) (1992), 510—5230.

[9] C. J. Blom and A. H. P. Van Der Burgh, Validity of approximations for time periodic solutions of a forced nonlinear hyperbolic differential equation, *Applicable Analysis*, 52(1—4) (1994), 155—176.

[10] R. Bitelaar, The method of averaging in Banach spaces, theory and applications, Ph. D thesis, Rijksuniversiteit Utrecht (1993).

[11] M. Taylor, *Pseudo-Differential Operations*, Prinaeton University Press (1981).

[12] Bonald B. Guenther and John W. Lee, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*, Prentice Hall (1988).

The Asymptoic Theory of Semilinear Perturbed Telegraph Equation and Its Application

Lai Shaoyong

(Department. of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, *P.R.China)*

Abstract

This paper is devoted to studying the asymptotic theory of initial value problems for a semilinear perturbed telegraph equation. The asymptotic theory and validity of formal approximations are constructed on long timescale $O(|\varepsilon|^{-1})$. As an application of the asymptotic theory, the initial value problems for a special telegraph equation are studied and two asymptotic solutions of order $O(|\varepsilon|^{-1})$ are presented.

Key words telegraph equation, asymptotic theory, long timescale, application