应用数学和力学，第18卷 第7期（1997年7月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重庆出版社出版

模糊随机有限元平衡方程的摄动解法*

吕 恩 琳[1]

（张汝清推荐，1996年5月20日收到）

摘 要

对模糊随机有限元平衡方程作 λ 水平截集，得随机区间平衡方程，然后基于平衡方程中有关力学量之间的关系，将随机区间平衡方程转化为两类普通随机平衡方程求解，利用小参数摄动理论导得求随机区间位移的递归方程组。文中还详细推导了计算模糊随机位移、模糊随机应变和模糊随机应力数字特征的计算公式。

关键词 模糊随机有限元 区间数方程 摄动法

一、引 言

在工程结构分析中往往有许多参数，如材料的弹性模量和泊松比、结构的几何尺寸和边界条件以及作用的外载等可能具有随机性和模糊性。随机有限元法[1]处理随机性；模糊有限元法[2]处理模糊性；当要同时处理模糊性和随机性时需要使用模糊随机有限方法。王光远教授等[3,4,5]在模糊随机振动理论及其他地震工程中的应用方面作了大量开拓性工作。本文研究当结构材料特性、几何特性及载荷特性中的某些参数取值具有模糊性、概率为清晰值时结构响应的求法。利用平衡方程中有关力学量间的变化关系，将随机区间平衡方程转化为普通随机平衡方程求解，并给出了求节点位移、单元应变和应力统计特征的计算公式。分析表明，模糊随机有限元法是模糊有限元法和随机有限元法的推广。

二、模糊随机参数的数学描述[4,5]

为了行文方便，本节简单介绍了几个描述模糊随机参数的定义和概念。

2.1 模糊随机变量

模糊随机变量有多种定义，由Kwakernaak引入的模糊随机变量的定义为：

定义2.1 设$(\Omega,\ \mathscr{A},\ P)$为概率测度空间，模糊集值映射$\underset{\sim}{X}$：$\Omega\to\mathscr{F}_0(R)=\{\underset{\sim}{A}\,|\,\underset{\sim}{A}$是有界闭模糊数$\}$称为$(K)$模糊随机变量，如果：

---

* 国家自然科学基金资助项目。

1 重庆大学工程力学系，重庆 630044.

（1） 对$\forall \lambda\in(0,1]$，$\underline{X}_\lambda(\omega)$，$\overline{X}_\lambda(\omega)$为$(\Omega,\mathscr{A},P)$上的随机变量；

（2） 对$\forall \lambda\in(0,1]$，$\underline{X}_\lambda(\omega)$，$\overline{X}_\lambda(\omega)\in X_\lambda(\omega)$。

其中
$$\underline{X}_\lambda(\omega)=\inf X_\lambda(\omega)=\inf\{x\in R\,|\,\underset{\sim}{X}(\omega)(x)\geqslant\lambda\},$$
$$\overline{X}_\lambda(\omega)=\sup X_\lambda(\omega)=\sup\{x\in R\,|\,\underset{\sim}{X}(\omega)(x)\geqslant\lambda\},$$
$X_\lambda(\omega)$是$\underset{\sim}{X}(\omega)$的$\lambda$水平截集；$\underset{\sim}{X}(\omega)(x)$是$\underset{\sim}{X}(\omega)$的隶属函数。

由定义 2.1 可知，若$\underset{\sim}{X}$是（K）模糊随机变量，则对 $\forall\lambda\in(0,1]$，$X_\lambda(\omega)=[\underline{X}_\lambda(\omega),\overline{X}_\lambda(\omega)]$不仅是一个闭区间数，而且是一个随机区间。随机区间是指：

定义2.2 设$(\Omega,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$I(R)$ 为R中全体闭区间数构成的集合，Ω到$I(R)$的集值映射
$$\xi:\ \Omega\to I(R)=\{[x,y]\,|\,x,y\in R,x\leqslant y\},$$
$$\omega\to\xi(\omega)=[\underline{\xi}(\omega),\overline{\xi}(\omega)]$$
称为随机区间，如果$\underline{\xi}(\omega)$和$\overline{\xi}(\omega)$是$(\Omega,\mathscr{A},P)$上的随机变量。

对于向量$\underset{\sim}{X}=(\underset{\sim}{X}(1),\cdots,\underset{\sim}{X}(n))$是概率测度空间$(\Omega,\mathscr{A},P)$上的$n$维模糊随机向量的充要条件是每一个$\underset{\sim}{X}(k)\ (k=1,\cdots,n)$是$(\Omega,\mathscr{A},P)$上的模糊随机变量。

2.2 模糊概率特征

与普通随机变量和随机向量的数字特征相对应，模糊随机变量和模糊随机向量也可用其数字特征来描述。

定义2.3 设$\underset{\sim}{X}$是概率测度空间（$\Omega,\mathscr{A},P$）上的模糊随机变量，如果$\underset{\sim}{X}$在Ω上关于P可积，则$\underset{\sim}{X}$在Ω上的积分称为$\underset{\sim}{X}$的数学期望，记作
$$E(\underset{\sim}{X})=\int_\Omega\underset{\sim}{X}(\omega)P(d\omega)$$
可以证明，$E(\underset{\sim}{X})$仍是一有界闭模糊数，其λ水平截集为：

对$\forall\lambda\in(0,1]$，$E_\lambda(\underset{\sim}{X})=E(X_\lambda)=[E(\underline{X}_\lambda),E(\overline{X}_\lambda)]$由模糊分解定理可知：
$$E(\underset{\sim}{X})=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda[E(\underline{X}_\lambda),\ E(\overline{X}_\lambda)] \tag{2.1}$$
上面介绍模糊随机变量期望值的计算方法。

设$\underset{\sim}{X}(\omega)=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda[\underline{X}_\lambda(\omega),\overline{X}_\lambda(\omega)]$是概率空间$(\Omega,\mathscr{A},P)$上的连续型关于$P$可积（或积分有界）的模糊随机变量，$\underline{X}_\lambda(\omega)$ 和 $\overline{X}_\lambda(\omega)$ 分别具有密度函数 $\underline{p}_\lambda(x)$ 和 $\overline{p}_\lambda(x)$ 的随机变量，则
$$\forall\lambda\in(0,1],E_\lambda(\underset{\sim}{X})=\left[\int_{-\infty}^{\infty}x\underline{p}_\lambda(x)dx,\ \int_{-\infty}^{\infty}x\overline{p}_\lambda(x)dx\right].$$
如果$\underset{\sim}{X}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{A},P)$上的离散型模糊随机变量，并且 $p(\underset{\sim}{X}(\omega_i)=\underset{\sim}{A}_i)=p_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，其中 $\underset{\sim}{A}_i\in\mathscr{F}_0(\mathrm{R})$，$\sum_{i=1}^n p_i=1$，则
$$E(\underset{\sim}{X})=\sum_{i=1}^n p_i\underset{\sim}{A}_i\in\mathscr{F}_0(\mathrm{R})$$
并且对 $\forall\lambda\in(0,1]$，$E_\lambda(\underset{\sim}{X})=\left[\sum_{i=1}^n p_i\underline{A}_{i\lambda},\ \sum_{i=1}^n p_i\overline{A}_{i\lambda}\right]$

对于概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上的n维模糊随机向量，$\underset{\sim}{X}(\omega)=(\underset{\sim}{X}(1,\omega),\cdots,\underset{\sim}{X}(n,\omega))$，如果每一个$E(\underset{\sim}{X}(k,\omega))$，$(k=1,\cdots,n)$，都存在，则称$(E(\underset{\sim}{X}(1,\omega)),\cdots.E(\underset{\sim}{X}_n(\omega)))$为$\underset{\sim}{X}$的数学期望，并记为：

$$E(\underset{\sim}{X})=(E(\underset{\sim}{X}(1)),\cdots,E(\underset{\sim}{X}(n))),$$

其中 λ水平截集为：

$$E_\lambda(\underset{\sim}{X})=(E(X_\lambda))=(E(X_\lambda(1),\cdots,E(X_\lambda(n))).$$

定义2.4 设$\underset{\sim}{X}=(\underset{\sim}{X}(1),\cdots,\underset{\sim}{X}(n))$为平方积分有界的$n$维模糊随机向量，$\underset{\sim}{X}(k)(k=1,\cdots,n)$的数学期望为$E(\underset{\sim}{X}(k))$，则称

$$\underset{\sim}{E}(j,k)\triangleq E[(\underset{\sim}{X}(j)-E(\underset{\sim}{X}(j)))(\underset{\sim}{X}(k)-E(\underset{\sim}{X}(k)))]$$

为$\underset{\sim}{X}$的协方差，n阶矩阵

$$\underset{\sim}{K}=\begin{bmatrix} \underset{\sim}{k}(1,1) & \underset{\sim}{k}(1,2) & \cdots & \underset{\sim}{k}(1,n) \\ \underset{\sim}{k}(2,1) & \underset{\sim}{k}(2,2) & \cdots & \underset{\sim}{k}(1,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underset{\sim}{k}(n,1) & \underset{\sim}{k}(n.2) & \cdots & \underset{\sim}{k}(n,n) \end{bmatrix}$$

称为$\underset{\sim}{X}$的协方差矩阵．$\underset{\sim}{k}(j,k)$的λ水平截集计算公式为

$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{k}(j,k))_\lambda=k_\lambda(j,k)=E([\underline{X}_\lambda(j)-E(\overline{X}_\lambda(j)),\overline{X}_\lambda(j)-E(\underline{X}_\lambda(j))]\\ [\underline{X}_\lambda(k)-E(\overline{X}_\lambda(k)),\overline{X}_\lambda(k)-E(\underline{X}_\lambda(k))]\end{aligned} \tag{2.2}$$

三、摄动模糊随机有限元法基本列式

3.1 模糊随机有限元平衡方程的解

当结构的某些参数和外部环境条件具有模糊随机性时，结构响应也必然具有模糊随机性，此时结构分析的平衡方程为：

$$[\underset{\sim}{K}]\{\underset{\sim}{U}\}=\{\underset{\sim}{P}\} \tag{3.1}$$

式中 $[\underset{\sim}{K}]$是模糊随机刚度矩阵，$\{\underset{\sim}{P}\}$是模糊机载荷向量，$\{\underset{\sim}{U}\}$是模糊随机位移向量．对方程(3.1)作λ水平截集，得随机区间方程组

$$[\underline{K},\overline{K}]_\lambda\{\underline{U},\overline{U}\}_\lambda=\{\underline{P},\overline{P}\}_\lambda \tag{3.2}$$

方程(3.2)的解$\{\underline{U},\overline{U}\}_\lambda=\{[\underline{u}_1,\bar{u}_1],\cdots,[\underline{u}_n,\bar{u}_n]\}_\lambda^T$中各随机区间数的上、下界由其均值按下式定义

$$\left.\begin{aligned}E_\lambda[\underline{u}_j]=\min\{E(u_j]\mid KU=p,k\in[\underline{K},\overline{K}]_\lambda,p\in\{\underline{P},\overline{P}\}_\lambda\}\\ E_\lambda[\bar{u}_j]=\max\{E[u_j]\mid KU=P,k\in[\underline{K},\overline{K}]_\lambda,p\in\{\underline{P},\overline{P}\}_\lambda\}\\ (j=1,2,\cdots,n,\ n\text{为结构自由度数})\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

式中 $E[u_j]$为随机平衡方程 $KU=p$ 的等j个位移分量的均值．根据模糊分解定理，方程(3.1)的解可表示为：

$$\{\underset{\sim}{U}\}=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\{\underline{U},\overline{U}\}_\lambda \tag{3.4}$$

显然，欲求解模糊随机平衡方程(3.1)，关键在于求解随机区间平衡方程(3.2)．但目前即使对于一般的线性区间方程组尚无令人满意的解法，而要求解一般的线性随机区间方程组，条件更未具备．下面从平衡方程(3.2)中有关力学量之间的关系出发寻求解法．事实上，节点位移是所有原始模糊随机参数的函数，并且容易判断节点位移的绝对值是这些初始模糊

随机参数的增函数还是减函数。分别记

$$\left.\begin{aligned}\{\underset{\sim}{\xi}\}&=\{\underset{\sim}{\xi}_1,\underset{\sim}{\xi}_2,\cdots,\underset{\sim}{\xi}_{f1}\}\\ \{\underset{\sim}{\eta}\}&=\{\underset{\sim}{\eta}_1,\underset{\sim}{\eta}_2,\cdots,\underset{\sim}{\eta}_{f2}\}\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

式中 $\underset{\sim}{\xi}_i(i=1,2,\cdots,f_1)$和$\underset{\sim}{\eta}_j(j=1,2,\cdots,f_2)$ 均为原始模糊随机参数，并且设节点位移的绝对值是$\underset{\sim}{\xi}_i$的增函数，是$\underset{\sim}{\eta}_j$的减函数。对式(3.5)作λ截集

$$\{\underline{\xi},\bar{\xi}\}_\lambda=\{[\underline{\xi}_1,\bar{\xi}_1],\cdots,[\underline{\xi}_{f1},\bar{\xi}_{f1}]\}_\lambda$$

$$\{\underline{\eta},\bar{\eta}\}_\lambda=\{(\underline{\eta}_1,\bar{\eta}_1],\cdots,[\underline{\eta}_{f2},\bar{\eta}_{f2}]\}_\lambda$$

计算刚度阵，并记

$$\left.\begin{aligned}&[K^-]=[K(\underline{\xi}_\lambda,\bar{\eta}_\lambda)] \qquad [K^+]=[K(\bar{\xi}_\lambda,\underline{\eta}_\lambda)]\\ &\{P^-\}=\{P(\underline{\xi}_\lambda,\bar{\eta}_\lambda)\} \qquad \{P^+\}=\{P(\bar{\xi}_\lambda,\underline{\eta}_\lambda)\}\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

式中 $[K^-]$为取$\{\underset{\sim}{\xi}\}_\lambda$的下界和 $\{\underset{\sim}{\eta}\}_\lambda$ 的上界所得刚度阵。一般来说，$[K^-]$ 与式(3.2)中的$[\underline{K}_\lambda]$是不同的。式(3.6)中的$[K^+]$，$\{P^-\}$和$\{P^+\}$的意义可类推。

求解平衡方程

$$\left.\begin{aligned}&[K^-]\{U^-\}=\{P^-\}\\ &[K^+]\{U^+\}=\{P^+\}\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

其解分别为

$$\left.\begin{aligned}&\{U^-\}=\{u_1^-,u_2^-,\cdots,u_n^-\}\\ &\{U^+\}=\{u_1^+,u_2^+,\cdots,u_n^+\}\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

由式(3.3)、(3.6)可以判断方程(3.2)和方程(3.7)解之间的关系为：

$$\left.\begin{aligned}&\underline{u}_{j\lambda}=\begin{cases}u_j^- & (\text{当}u_j^-\geqslant 0)\\ u_j^+ & (\text{当}u_j^+<0)\end{cases}\\ &\bar{u}_{j\lambda}=\begin{cases}u_j^+ & (\text{当}u_j^+\geqslant 0)\\ u_j^- & (\text{当}u_j^-<0)\end{cases}\\ &\qquad\qquad (j=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\right\}\tag{3.9}$$

n为结构自由度总数。

如果存在某些节点位移分量的绝对值并非完全与 $\{\underset{\sim}{\xi}\}$ 和 $\{\underset{\sim}{\eta}\}$ 呈增、减函数关系，这时需对位移分量分类，使每一类中的各位移分量对初始模糊随机参数呈相同的增减关系，然后对每一类位移分量作式(3.5)～(3.9)的处理，综合起来便可求得方程(3.2)的解。

3.2 求位移的递归方程组

按照本文在前言中所作假设，若结构的某一参数 $\underset{\sim}{z}$ 具有模糊随机性，意味着该参数的取值为模糊数，相应的概率为清晰数。对该参数建立随机场模型后，其扰动量可以用一个随机小参数α来表示，即

$$\underset{\sim}{z}=\underset{\sim}{z}_0(1+\alpha)$$

式中 $\underset{\sim}{z}_0$是一个模糊数，反映了$\underset{\sim}{z}$的模糊性；α是均值为零的随机场，反映了$\underset{\sim}{z}$的随机性。$\underset{\sim}{z}$的λ水平截集为

$$z_\lambda=[\underline{z}_\lambda,\bar{z}_\lambda]=[\underline{z}_{0\lambda}(1+\alpha),\bar{z}_{0\lambda}(1+\alpha)]\tag{3.10}$$

对随机场α离散后，α可以化为随机向量 $\underset{\sim}{\alpha}$。当有限元离散网格确定以后，方程(3.7) 中的K^-，K^+，P^-，P^+和U^-，U^+在$\underset{\sim}{\alpha}$的均值处作泰勒级数展开，略去二阶以上项，有

$$\left.\begin{aligned}
K^{-}&=K_0^{-}+\sum_{i=1}^{m}K_i^{-}\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}K_{ij}^{-}\alpha_i\alpha_j\\
K^{+}&=K_0^{+}+\sum_{i=1}^{m}K_i^{+}\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}K_{ij}^{+}\alpha_i\alpha_j\\
P^{-}&=P_0^{-}+\sum_{i=1}^{m}P_i^{-}\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}P_{ij}^{-}\alpha_i\alpha_j\\
P^{+}&=P_0^{+}+\sum_{i=1}^{m}P_i^{+}\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}P_{ij}^{+}\alpha_i\alpha_j\\
U^{-}&=U_0^{-}+\sum_{i=1}^{m}U_i^{-}\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}U_{ij}^{-}\alpha_i\alpha_j\\
U^{+}&=U_0^{+}+\sum_{i=1}^{m}U_i^{+}\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}U_{ij}^{+}\alpha_i\alpha_j
\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

式中n是$\underset{\sim}{\alpha}$向量中随机变量总数；K_i^{-}，K_{ij}^{-} 等量中的下标i和j表示对 α_i和 α_j 求偏导数．将式(3.11)代入控制方程(3.7)，根据摄动法原理便可得到如下的递归方程组：

$$\left.\begin{aligned}
&[K_0^{-}]\{U_0^{-}\}=\{P_0^{-}\}\\
&[K_0^{-}]\{U_i^{-}\}=\{P_i^{-}\}-[K_i^{-}]\{U_0^{-}\}\\
&[K_0^{-}]\{U_{ij}^{-}\}=\{P_{ij}^{-}\}-[K_i^{-}]\{U_j^{-}\}-[K_j^{-}]\{U_i^{-}\}-[K_{ij}^{-}]\{U_0^{-}\}
\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&[K_0^{+}]\{U_0^{+}\}=\{P_0^{+}\}\\
&[K_0^{+}]\{U_i^{+}\}=\{P_i^{+}\}-[K_i^{+}]\{K_0^{+}\}\\
&[K_0^{+}]\{U_{ij}^{+}\}=\{P_{ij}^{+}\}-[K_i^{+}]\{U_j^{+}\}-[K_j^{+}]\{U_i^{+}\}-[K_{ij}^{+}\{U_0^{+}\}
\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

解这两个递归方程组就得到方程(3.7)的解，再由式(3.9)可求出随机区间方程 (3.2) 的解，然后由式(3.4)便可得到方程(3.1)的解．

当初始模糊随机参数$\underset{\sim}{z}$不是平模糊数[7]时(一般工程参数不应是平模糊数)，在式 (3.10) 中取$\lambda=1$，必有$z_\lambda=\bar{z}_\lambda$，从而在式(3.6)、(3.11)中必有$K^{-}=K^{+}$，$U^{-}=U^{+}$和 $P^{-}=P^{+}$，此时方程组(3.12)和(3.13)等价，并且与摄动随机有限元法求节点位移的递归方程组[1]完全一致．如果随机向量$\underset{\sim}{\alpha}$为零向量，则有$K^{-}=K_0^{-}$，$K^{+}+K_0^{+}$，$P^{-}=P_0^{-}$，$P^{+}=P_0^{+}$ 和 $U^{-}=U_0^{-}$，$U^{+}=U_0^{+}$，此时方程(3.12)和(3.13)分别退化为普通的平衡方程，其解按式 (3.9) 组合后与文献[6]解法的结果相同．当同时取设防水平$\lambda=1$和$\underset{\sim}{\alpha}$为零向量时，方程 (3.12)和 (3.13) 等价并退为为一般的有限元平衡方程．

3.3 位移、应变和应力的统计特征

由式(3.11)，$\{U^{-}\}$，$\{U^{+}\}$的均值为

$$E[U^{-}]=U_0^{-}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}U_{ij}^{-}E[\alpha_i\alpha_j]$$

$$E[U^+]=U_0^+ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}U_{i,j}^+E[\alpha_i\alpha_j]$$

再参照式(3.9)便可求出位移均值的λ截集

$$E_\lambda(U)=\{E_\lambda[\underline{u}_1,\bar{u}_1],E_\lambda[\underline{u}_2,\bar{u}_2],\cdots,E_\lambda[\underline{u}_n,\bar{u}_n\} \tag{3.14}$$

在计算位移协方差时，仅取位移的一阶近似式．由式(2.2)、(3.11)，位移向量的第k，l个分量间的协方差的λ截集为

$$\mathrm{cov}(u_k,u_l)_\lambda=E[(\underline{u}_k-E(\bar{u}_k),\bar{u}_k-E(\underline{u}_k))$$
$$(\underline{u}_l-E(\bar{u}_l),\bar{u}-E(\underline{u}_l))]_\lambda$$

记

$$q=(\underline{u}_{k0}-\bar{u}_{k0})_\lambda,\quad r=(\bar{n}_{k0}-\underline{u}_{k0})_\lambda,\quad s=(\underline{u}_{l0}-\bar{u}_{l0})_\lambda,\quad t=(\bar{u}_{l0}-\underline{u}_{l0})_\lambda$$

$$A=qs+\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\underline{u}_{k,i}\underline{u}_{l,j}E(\alpha_i\alpha_j)\Big)_\lambda,\quad B=qt+\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\underline{u}_{k,i}\bar{u}_{l,j}E(\alpha_i\alpha_j)\Big)_\lambda$$

$$C=rs+\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\bar{u}_{k,i}\underline{u}_{l,j}E(\alpha_i\alpha_j)\Big)_\lambda,\quad D=rt+\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\bar{u}_{k,i}\bar{u}_{l,j}E(\alpha_i\alpha_j)\Big)_\lambda$$

由区间数的乘法规则，得

$$\mathrm{cov}(u_k,u_l)_\lambda=[\min\{A,B,C,D\},\max\{A,B,C,D\}] \tag{3.15}$$
$$(k,l=1,2,\cdots,n)$$

对任一单元k，应变e^k的λ水平截集为：

$$e_\lambda^k=B_\lambda^ku_\lambda^k \tag{3.16}$$

分别将e_λ^k、B_λ^k和u_λ^k在随机向量α的均值处展开，此时B_λ^k、u_λ^k展式中系数是已知的，而e_λ^k展式中各系数待求．将这三个展式代入式(3.16)，按区间数乘法运算，记

$$e_1=\Big\{\underline{B}_0\underline{u}_0+\sum_{i=1}^{m}(\underline{B}_0\underline{u}_i+\underline{B}_i\underline{u}_0)\alpha_i$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\underline{B}_0\underline{u}_{ij}+2\underline{B}_i\underline{u}_j+2\underline{B}_j\underline{u}_i+\underline{B}_{ij}\underline{u}_0)\alpha_i\alpha_j\Big\}_\lambda^k$$

$$e_2=\Big\{\underline{B}_0\bar{u}_0+\sum_{i=1}^{m}(\underline{B}_0\bar{u}_i+\underline{B}_i\bar{u}_0)\alpha_i$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\underline{B}_0\bar{u}_{ij}+2\underline{B}_i\bar{u}_j+2\underline{B}_j\bar{u}_i+\underline{B}_{ij}\bar{u})\alpha_i\alpha_j\Big\}_\lambda^k \tag{3.17}$$

$$e_3=\Big\{\bar{B}_0\underline{u}_0+\sum_{i=1}^{m}(\bar{B}_0\underline{u}_i+\bar{B}_i\underline{u}_0)\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\bar{B}_0\underline{u}_{ij}+2\bar{B}_i\underline{u}_j+2\bar{B}_j\underline{u}_i+\bar{B}_{ij}\underline{u}_0)\alpha_i\alpha_j\Big\}_\lambda^k$$

$$e_4=\Big\{\bar{B}_0\bar{u}_0+\sum_{i=1}^{m}(\bar{B}_0\bar{u}_i+\bar{B}_i\bar{u}_0)\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\bar{B}_0\bar{u}_{ij}+2\bar{B}_i\bar{u}_j+2\bar{B}_j\bar{u}_i+\bar{B}_{ij}\bar{u}_0)\alpha_i\alpha_j\Big\}_\lambda^k$$

则$e_\lambda^k=\{[\underline{e}_1,\bar{e}_1],[\underline{e}_2,\bar{e}_2],\cdots,[\underline{e}_f,\bar{e}_f]\}_\lambda^k$的第$j$个分量由下式决定：

$$[\underline{e}_j,\bar{e}_j]_\lambda^k=[\min\{e_{1j},e_{2j},e_{3j},e_{4j}\},\max\{e_{1j},e_{2j},e_{3j},e_{4j}\}] \tag{3.18}$$

($j=1,2,\cdots,f$，f为单元应变分量数)

于是第k单元应变均值的入截集为

$$E_\lambda(e^k)=\left\{\underline{e}_0+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\underline{e}_{ij}E(\alpha_i\alpha_j),\ \bar{e}_0+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\bar{e}_{ij}E(\alpha_i\alpha_j)\right\}_\lambda^k \tag{3.19}$$

第k和l单元应变协方差矩阵的λ截集为

$$\mathrm{cov}(e^k,e^l)_\lambda=E[(\bar{e}_k-E(\bar{e}_k),\bar{e}_k-E(\underline{e}_k))((\underline{e}_l-E(\bar{e}_l))^T,(\bar{e}_l-E(\underline{e}_l))^T)]_\lambda$$

应变取一阶近似，并记

$$\left.\begin{aligned}
&Q(e)=\{\underline{e}_{k0}-\bar{e}_{k0}\}_\lambda,\ \ R(e)=\{\bar{e}_{k0}-\underline{e}_{k0}\}_\lambda\\
&S(e)=\{\underline{e}_{l0}-\bar{e}_{l0}\}_\lambda^T,\ \ T(e)=\{\bar{e}_{l0}-\underline{e}_{l0}\}_\lambda^T\\
&A(e)=Q(e)S(e)+\left[\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\underline{e}_{k,i}\underline{e}_{l,j}^TE(\alpha_i\alpha_j)\right]_\lambda\\
&B(e)=Q(e)T(e)+\left[\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\underline{e}_{k,i}\bar{e}_{l,j}^TE(\alpha_i\alpha_j)\right]_\lambda\\
&C(e)=R(e)S(e)+\left[\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\bar{e}_{k,i}\underline{e}_{l,j}^TE(\alpha_i\alpha_j)\right]_\lambda\\
&D(e)=R(e)T(e)+\left[\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\bar{e}_{k,i}\bar{e}_{l,j}^TE(\alpha_i\alpha_j)\right]_\lambda
\end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

则$\mathrm{cov}(e^k,e^l)$的第p行第q列元素为

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(e^k,e^l)_\lambda^{pq}=[&\min\{A(e)_{pq},B(e)_{pq},C(e)_{pq},D(e)_{pq}\},\\&\max\{A(e)_{pq},B(e)_{pq},C(e)_{pq},D(e)_{pq}\}]\end{aligned} \tag{3.21}$$

对任一单元k，应力σ^k的λ水平截集为

$$\sigma_\lambda^k=D_\lambda^ke_\lambda^k$$

将 σ_λ^k，D_λ^k，e_λ^k 在随机向量α的均值处展开，代入上式便可求得σ_λ^k展开式中的全部系数，其结果相当于在式(3.17)中将B换成D、将u换成e，然后在式(3.18)中将e换成σ即可。

为求第k单元应力均值的λ截集，只须在式(3.19)中将e换为σ；为求k和l单元应力协方差矩阵的λ截集，只须在式(3.20)、(3.21)中将e换为σ，不再赘述

上面给出的都是有关量的λ截集，根据模糊分解定理，取一系列$\lambda(0<\lambda\leqslant1)$值计算，便可得到位移、应变及应力的均值和协方差，它们都是有界闭模糊数。

四、结　　语

1．本文研究了当结构材料特征、几何特性及载荷特性中的某些参数取值具有模糊性，而其概率为清晰值时，结构分析有限元平衡方程的解法；推导了求节点位移的递归方程组；给出了求位移、应变和应力数字特征的计算公式。分析表明，模糊随机有限元是随机有限元和模糊有限元的推广。

2．由于本文采用了将随机区间方程转化为普通随机方程求解的方法，因而当具有多个

初始模糊随机参数时，其处理方法与普通随机有限元法[1]中处理有多个随机参数时的方法基本一致，不存在质上的困难。

3. 本文所给求解随机区间平衡方程的算法，从有限元的角度去看是准确的。所给算法易于程序化，主要计算量在于求解递归方程组，在实际计算中应合理调整设防水平入，以尽量减少计算量。

参 考 文 献

[1] 陈虬、刘先斌，《随机有限无法及其工程应用》，西南交通大学出版社 (1993)，78—104.

[2] 王彩华、朱恒山，基于L-R型模糊数运算法则的一种结构模糊方程的解法，第三届全国模糊分析设计学术会议论文集，中国建筑工业出版社(1993)，35—38.

[3] 王光远、欧进萍，在地震作用下结构的模糊随机振动，力学学报，20(2)(1988)，173—180.

[4] 张跃，模糊随机变量，哈尔滨建筑工程学院学报，22(3)，(1989)，12—21.

[5] 张跃，模糊随机向量，哈尔滨建筑工程学院学报，22(4)，(1989)，27—41.

[6] 吕恩琳，结构模糊有限元平衡方程的一种新鲜法，应用数学和力学，18(4) (1997)，361—366.

[7] D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy Sets and System: Theory and Applications*, Academic Press, New York (1980)

Perturbational Solutions for Fuzzy-Stochastic Finite Element Equilibrium Equations (FSFEEE)

Lü Enling

(*Chongqing University*, *Chongqing* 630044, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, the random interval equilibrium equations (RIEE) is obtained by λ-level cutting the fuzzy-stochastic finite element equilibrium equations (FSFEEE). Based on the relations between the variables of equilibrium equations, solving, RIEE is transformed into solving two kinds of general random equilibrium equalions (GREE). Then the reversive equations of evaluating the random interval displacement is derived from the small-parameter perturbation theory. The computational formulae of statisical characteristic of the fuzzy random displacements, the fuzzy random srtains and the fuzzy random stresses are also deduced in detail.

Key words fuzzy-stochastic finite element, equations of interval numbers, perturbation theory