应用数学和力学，第18卷 第7期（1997年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

关于一个轴对称弹塑性扭转问题

杨孝平[1]　周叔子[2]　李光耀[3]

（徐次达推荐，1995年11月26日收到，1996年10月26日收到修改稿）

摘　　要

本文讨论一个轴对称的弹塑性扭转问题．利用惩罚法，反射边界，Bernstein 估计和逆 Hölder 不等式，通过研究相应的具有混合边界条件的互补边值问题，得到了解的正则性．

关键词　互补边值问题　惩罚法　Bernstein估计　正则性

一、引　　言

机轴的弹塑性扭转是一个经典的力学问题．六十年代中期变分不等式的创立使这方面的研究变得相当活跃和深入．这类常截面问题的研究已相当完善细致[10,11]．Cryer 首先研究了变截面的旋转对称机轴的弹塑性扭转问题应力函数解的存在性，唯一性和正则性，其中有两个基本假设：(i) 生成机轴的母线是C^2类单调曲线，(ii) 所谓的"条件C"成立（见[3]中定理5.9）．之后，周叔子[14]研究了母线是一般的分段连续可微函数时应力函数解的存在性，唯一性，证明了在Hencky条件下，Haar-Kârman 原理对此问题成立，严格地论述了此问题本质上是二维问题．本文用不同于[3]的方法，不假设"条件C"，在带梯度约束的椭圆边值问题的提法下，证明了[3]中所述问题的$W^{2,\infty}$正则性．我们指出，解的正则性不但是解的重要性质之一，而且是数值分析的基础，加上变截面问题的研究较常截面问题出现了两个主要困难：一是变分不等式系数中出现了高阶退化项，二是若考虑相应的障碍问题，障碍非光滑．所以这类问题的研究无论是在理论上还是应用上都很有意义．

二、力学问题与数学表述

对长度为L的理想弹塑性匀质旋转机轴两端加大小相等方向相反的扭矩T，求最终的应力分布．这个力学问题可表述为[14]：

求应力函数$u\in C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$，使得：

$$|\nabla u|\leqslant kx_2^2 \text{（于}\Omega\text{）（}k\text{为给定的常数）} \tag{2.1}$$

在$\Omega\cap\{(x_1,\ x_2);\ |\nabla u|<kx_2^2\}$中

1　南京理工大学，南京　210094．
2　湖南大学，长沙　410082．
3　贵州大学，贵阳　550025．

$$Au=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{x_2^3}\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{x_2^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=0 \tag{2.2}$$

$$u=0\quad(\text{于}\Gamma_0),\ u=\frac{T}{2\pi}\quad(\text{于}\Gamma_1) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0\quad(\text{于}\Gamma_2=\Gamma_{21}\cup\Gamma_{22};\ n\text{为}\Gamma_2\text{上之外法向}) \tag{2.4}$$

中$\Omega=\{(x_1,x_2),\ 0<x_1<L,\ 0<x_2<R(x_1)\}$，$x_2=R(x_1)$生成机轴侧面的母线方程，$\Omega$之边界为：

$$\Gamma_0=\{(x_1,x_2);\ 0\leqslant x_1\leqslant L,\ x_2=0\}$$
$$\Gamma_1=\{(x_1,x_2);\ 0\leqslant x_1\leqslant L,\ x_2=R(x_1)\}$$
$$\Gamma_{21}=\{(x_1,x_2);\ 0<x_2<R(0),\ x_1=0\}$$
$$\Gamma_{22}=\{(x_1,x_2);\ 0<x_2<R(L),\ x_1=L\}$$

文[14]证明了对应于应力函数的广义变分问题是：求$u_0\in K$，使得

$$\int_\Omega \rho\cdot\nabla u_0\cdot\nabla(v-u_0)dx\geqslant 0\qquad(\forall v\in K) \tag{2.5}$$

其中 $\rho=x_2^{-3}$.

$$K=\{v\in H_\rho^1(\Omega),\ v=T/2\pi\text{于}\Gamma_1,\ |\nabla v|\leqslant kx_2^3\text{于}\Omega\}$$
$$H_\rho^1(\Omega)=\{v\in H^1(\Omega),\int_\Omega\left(\rho v^2+\rho\sum_{|\alpha|<1}|D^\alpha v|^2\right)dx<+\infty\}$$

对于Γ_1，我们假设：

(a) $R(x_1)\in C^2(0,L)$，$\dfrac{dR}{dx_1}\geqslant 0$

(b) $\left.\dfrac{dR}{dx_1}\right|_{x_1=0}=\left.\dfrac{dR}{dx_1}\right|_{x_1=L}=0$

从而有：

定理2.1[14] 若$k<k_0$，问题(2.5)无解，若$k\geqslant k_0$，问题(2.5)有唯一解u_0，其中$k_0=\dfrac{3T}{2\pi}R^{-3}(0)$.

定理2.2[3] 若取$h_0=[R^3(0)-3T/2\pi]^{1/3}$，$k>k_0$，则在$S_{h_0/2}=\{x\in\Omega,\ 0<x_2<h_0/2\}$中有：

(i) $\int_\Omega x_2^{-3}\nabla u_0\cdot\nabla\varphi dx=0\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(S_{h_0/2})$

(ii) $u_0|S_{h_0/2}\in H^2\cap C^\infty(S_{h_0/2})$

(iii) $u_0=x_2^4v_0$，其中v_0在$\bar{S}_{h_0/2}$上解析.

由[3]中的定理4.3和[14]中的命题7.2及定理8.3，我们今后总作$k>k_0$的假设.

定理2.3 $u_0=\max\{u_0,0\}\geqslant 0$.

三、辅助问题和惩罚问题

我们构造函数$\beta_\varepsilon(t)$ $(\varepsilon>0)$，$\tau_m(t)$ $(m>0)$如下：

$$\beta_\varepsilon(t)\begin{cases}\in C^2(R)\ \text{非减，凸}\\ =0 \qquad (t\leqslant 0\text{时})\\ =\dfrac{t-\varepsilon}{\varepsilon} \qquad (t\geqslant 2\varepsilon)\end{cases} \tag{3.1}$$

$$\tau_m(t)\begin{cases}=t \qquad (|t|\leqslant m/2)\\ =m \qquad (t>m) \qquad\qquad (\tau_m(t)\in C^1(R))\\ =-m \qquad (t<-m)\end{cases} \tag{3.2}$$

取$S_{h_1}=\{(x_1,x_2)\in\Omega;\ 0<x_2<h_1<h_0/2\}$，$\Omega_0=\Omega\backslash\bar{S}_{h_1}$，考虑下列惩罚问题.

$$\left.\begin{aligned}&-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{x_2^3}\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right)-\beta_\varepsilon\circ(|\nabla u_\varepsilon|^2-k^2x_2^4)+\varepsilon u_\varepsilon=0 \qquad (\text{于}\Omega)\\ &u_\varepsilon|_{\Gamma_0'}=u_0,\ u_\varepsilon|_{\Gamma_1}=T/2\pi,\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2'}=0\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

其中 $\Gamma_0'=\bar{S}_{h_1}\cap\bar{\Omega}_0$，$\Gamma_2'=\Gamma_2\cap\bar{\Omega}$.

为了研究(3.3)，引入如下辅助问题：

求$u_\varepsilon^m\in\hat{K}$，使得：

$$\int_{\Omega_0}\frac{1}{x_2^3}\cdot\nabla u_\varepsilon^m\cdot\nabla(v-u_\varepsilon^m)dx-\int_{\Omega_0}[\beta_{\varepsilon,m}\circ(\omega_m^2(\nabla u_\varepsilon^m)-k^2x_2^4)-\varepsilon u_\varepsilon^m](v-u_\varepsilon^m)dx\geqslant 0$$
$$(\forall v\in\hat{K}) \tag{3.4}$$

其中 $\hat{K}=\{v\in H^1(\Omega_0);\ v|_{\Gamma_0'}=u_0,\ v|_{\Gamma_1}=T/2\pi\}$

$$\beta_{\varepsilon,m}\circ(\omega_m^2(\nabla u_\varepsilon^m)-k^2x_2^4)=\tau_m\circ(\beta_\varepsilon\circ(\omega_m^2(\nabla u_\varepsilon^m)-k^2x_2^4))$$

$$\omega_m(p)=(\tau_m(p_1),\cdots,\tau_m(p_n)) \qquad (\forall p\in R^n)$$

首先，类似于[6]中定理9.2的证明可得：

引理3.1 设Ω是R^n中有界区域，$\partial\Omega=\Gamma_1^*\cup\Gamma_2^*$，$\Gamma_1^*\cap\Gamma_2^*=\phi$，算子

$$Qu=a^{ij}(x,\nabla u)D_{ij}u+b(x,u,\nabla u)$$

u，$v\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega\cup\Gamma_2^*)$，其中

(i) 算子Q关于u是椭圆的.

(ii) 系数$b(x,z,p)$对每个$(x,p)\in\Omega\times R^n$关于z是非增的

(iii) 系数a^{ij}，b关于p在$\Omega\times R\times R^n$中连续可微

(iv) 在Ω中$Qv\geqslant Qu$，$(v-u)|_{\Gamma_1^*}\leqslant 0$，$\dfrac{\partial}{\partial n}(v-u)|_{\Gamma_2^*}=0$，

则在Ω中$v\leqslant u$.

为了明确起见，我们给出如下定义，

定义3.1 称u_ε是问题(3.3)的一个弱解，若$u_\varepsilon\in\hat{K}$且满足：

$$\int_{\Omega_0}x_2^{-3}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx-\int_{\Omega_0}(\beta_\varepsilon\circ(|\nabla u_\varepsilon|^2-k^2x_2^4)-\varepsilon u_\varepsilon)\varphi dx=0$$
$$(\forall\varphi\in H_0^1(\Omega_0\backslash\Gamma_2')) \tag{3.5}$$

其中 $H_0^1(\Omega_0\backslash\Gamma_2')=\{v\in H^1(\Omega_0)$，在$\partial\Omega_0\backslash\Gamma_2'$上$v=0\}$.

我们作Ω_0关于Γ_{21}'的反射区域Ω_0'，记$\tilde{\Omega}=\Omega_0\cup\Gamma_{21}'\cup\Omega_0'$，它的边界是$\tilde{\Gamma}=\tilde{\Gamma}_0'\cup\tilde{\Gamma}_1'\cup\tilde{\Gamma}_{21}'\cup\tilde{\Gamma}_{22}'$（见图1）.

在$\tilde{\Omega}$中定义函数$\tilde{u}$如下：

$$\tilde{u}(x)=u(x_1,x_2) \qquad (x\in\Omega_0);\quad \tilde{u}(x)=u(-x_1,x_2) \qquad (x\in\Omega_0') \tag{3.6}$$

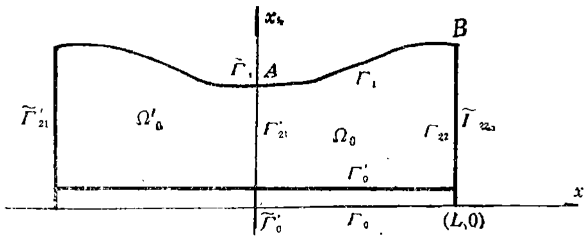

图 1

注意到$\tilde{u}\in H^1(\tilde{\Omega})$，通过计算可得.

引理3.2 问题(3.3)之弱解u_ε在$\tilde{\Omega}$中按(3.6)的开拓$\tilde{u}_\varepsilon\in H^1(\tilde{\Omega})$，且满足：

$$\int_{\tilde{\Omega}} x_2^{-3}\nabla\tilde{u}_\varepsilon\cdot\nabla\varphi dx-\int_{\tilde{\Omega}}(\beta_\varepsilon\circ(|\nabla\tilde{u}_\varepsilon|^2-k^2x_2^4)-\varepsilon\tilde{u}_\varepsilon)\cdot\varphi dx=0$$

$$(\forall\varphi\in H_0^1(\tilde{\Omega}\backslash\tilde{\Gamma}'_2)，\ \tilde{\Gamma}'_2=\tilde{\Gamma}'_{22}\cup\Gamma'_{22}) \tag{3.7}$$

$$\tilde{u}_\varepsilon|\Omega_0=u_\varepsilon \tag{3.8}$$

下面我们来讨论辅助问题(3.4)和惩罚问题(3.3).

引理3.3 变分不等式(3.4)存在属于$C^0(\bar{\Omega}_0)\cap C^2(\Omega_0\cup\Gamma'_2)$的解$u_\varepsilon^m$，并且有与$m$无关的常数$M$使，

$$|u_\varepsilon^m(x)|\leqslant M\qquad(x\in\bar{\Omega}_0) \tag{3.9}$$

$$\|u_\varepsilon^m\|H^1(\Omega_0)\leqslant M \tag{3.10}$$

证明 为了方便，今后在不引起混淆时就从β_ε，$\beta_{\varepsilon,m}$，u_ε，u_ε^m中略去ε.

由标准理论[9]，对任意一个$v_0\in K$，下列变分不等式：求$u_0^m\in\hat{K}$，对$\forall v\in\hat{K}$

$$\int_{\Omega_0}x_2^{-3}\cdot\nabla u_0^m\cdot\nabla(v-u_0^m)dx+\int_{\Omega_0}(-\beta_m\circ(\omega_m^2(\nabla v_0)-k^2x_2^4)+\varepsilon u_0^m)(v-u_0^m)dx\geqslant0 \tag{3.11}$$

的解存在. 这就定义了一个映射T

$$Tv_0=u_0^m$$

注意到β_m的有界性，应用先验估计（在Γ'_2上应用引理3.2化为内部情形讨论），可以证明算子T是连续致密的且将$\hat{K}$变为$\hat{K}$中的有界集，故由不动点原理可知T有一个不动点，从而变分不等式(3.4)有解.

在(3.4)中取$v=u^m\pm\eta$，$(\forall\eta\in H_0^1(\Omega_0\backslash\Gamma'_2))$，就得

$$\int_{\Omega_0}x_2^{-3}\cdot\nabla u^m\cdot\nabla\eta dx+\int_{\Omega_0}(-\beta_m\circ(\omega^2(\nabla u^m)-k^2x_2^4)+\varepsilon u^m)\cdot\eta dx=0 \tag{3.12}$$

这说明(3.4)的任一解满足(3.12). 注意到β_m的作法和有界性，应用差商，拉直边界方法和引理3.2容易直接证得$u^m\in H^{2,2}(\Omega_0)$，再由Sobolev 嵌入定理可知$u^m\in C(\bar{\Omega}_0)$，由[5，p219]和引理3.2可推得$u^m\in C^{1,\alpha}(\Omega_0)$(某个$\alpha>0$)，从而$\nabla u^m$局部有界，在(3.12)中以$D_s\eta(s=1,2)$代替$\eta$，分部积分，就有：

$$\int_{\Omega_0}x_2^{-3}\cdot\nabla(D_su^m)\cdot\nabla\eta dx+\int_{\Omega_0}\frac{-3}{x_2^4}\nabla u^m\cdot\nabla\eta\cdot dx\cdot\text{sign}(s-1)$$

$$+\int_{\Omega_0}[-\beta'_m\circ(\cdot)\cdot(r_m^2-k^2x_2^4)'_{x_2}+\varepsilon D_su^m]\cdot\eta dx=0$$

$$(\forall\eta\in H_0^1(\Omega_0\backslash\Gamma'_2)) \tag{3.13}$$

再次利用[5,p219]可得$D_s u^m \in C^{1,\alpha}(\Omega_0)$，从而$u^m \in C^{2,\alpha}(\Omega_0)$。利用定理（3.3）和上述推导可知，

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{x_2^3}\cdot\frac{\partial u^m}{\partial x_i}\right)-\beta_m\circ(\omega^2(\nabla u^m)-k^2x_2^4)+\varepsilon u^m=0 \qquad (\text{于}\Omega_0)\\&u^m|_{\Gamma_0'}=u_0,\ \ u^m|_{\Gamma_1}=T/2\pi,\ \ \left.\frac{\partial u^m}{\partial n}\right|_{\Gamma_2'}=0\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

有属于$C^0(\bar{\Omega}_0)\cap C^2(\Omega_0\cup\Gamma_2')$的解。

下面来给出$\|u^m\|_{C(\bar{\Omega}_0)}$与$\|u^m\|_{H^1(\Omega_0)}$的一致界。

由于$w_1=0$和$w_2=T/2\pi$分别满足：

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_2^{-3}\frac{\partial w_1}{\partial x_i}\right)-\beta_m\circ(\omega^2(\nabla w_1)-k^2x_2^4)+\varepsilon w_1\leqslant 0\\&w_1|_{\Gamma_0'}=w_1|_{\Gamma_1'}=0,\left.\frac{\partial w_1}{\partial n}\right|_{\Gamma_2'}=0\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_2^{-3}\frac{\partial w_2}{\partial x_i}\right)-\beta_m\circ(\omega^2(\nabla w_2)-k^2x_2^4)+\varepsilon w_2\geqslant 0\\&w_2|_{\Gamma_1'}=w_2|_{\Gamma_0'}=T/2\pi,\ \left.\frac{\partial w_2}{\partial n}\right|_{\Gamma_2'}=0\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

注意到$u_0=x_2^4 v$于$S_{h_0/2}$（定理2.2），取h_1适当地小以保证$u_0|_{\Gamma_0'}<T/2\pi$，这样应用引理3.1得

$$0\leqslant u^m\leqslant T/2\pi \tag{3.17}$$

现在类似于[1]的推导来估计$\|u^m\|_{H^1(\Omega_0)}$。取$\xi_0(x)=|u^m(x)-u_0(x)|^{q-1}(q\geqslant 1)$，由于$u_0(x)$，$u^m(x)$有界，取$\delta>0$，使得$\delta|\xi_0(x)|<1$，在(3.4)中取$v=u^m-\delta\xi_0\cdot(u^m-u_0)$，可得：

$$\begin{aligned}q\int_{\Omega_0}x_2^{-3}|\nabla(u^m-u_0)|^2\cdot|u^m-u_0|^{q-1}dx&\leqslant M_1+M_2\int_{\Omega_0}|\nabla(u^m-u_0)|^2\cdot|u^m-u_0|^q dx\\&+\delta_0\int_{\Omega_0}|u^m-u_0|^{q-1}\cdot|\nabla(u^m-u_0)|^2dx\\&+M_3(\delta_0)\int_{\Omega_0}|\nabla u_0|^2\cdot|u^m-u_0|^{q-1}dx\end{aligned} \tag{3.18}$$

若取$q=1$，$\delta_0=\alpha/2$（α是某常数），则有：

$$\begin{aligned}&(\alpha-\delta_0)\int_{\Omega_0}|\nabla(u^m-u_0)|^2dx\\&\leqslant M_1+M_4\int_{|u^m-u_0|\geq l}|\nabla(u^m-u_0)|^2\cdot|u^m-u_0|dx\\&+M_5\cdot l\int_{|u^m-u_0|\leq l}|\nabla(u^m-u_0)|^2dx+M_0\int_{\Omega_0}|\nabla u_0|^2dx\end{aligned}$$

选取l使得$M_5\cdot l<1$，就有：

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_0}|\nabla(u^m-u_0)|^2dx\\&\leqslant M_7+M_8\int_{|u^m-u_0|\geq l}|\nabla(u^m-u_0)|^2\cdot|u^m-u_0|dx\end{aligned} \tag{3.19}$$

若取$q=\bar{q}>1$，从(3.18)可以推出，

$$\int_{|u^m-u_0|\geqslant l}|\nabla(u^m-u_0)|^2\cdot|u^m-u_0|dx\leqslant l^{2-\bar{q}}\cdot M_9 \tag{3.20}$$

故从u^m有界及(3.19)、(3.20)可得$\|u^m\|_{H^1(\Omega)}$与m无关的一致界．引理证毕．

要讨论(3.3)解之存在性还要证明下面的：

引理3.4 问题(3.4)之解$u^m\in H^{1,p}(\Omega_0)$（某个$p>2$），且存在一个与m无关的常数c，使得：

$$\|u^m\|_{H^{1,p}(\Omega_0)}\leqslant c \tag{3.21}$$

证明 考虑(3.4)的等价弱形式

$$\int_{\Omega_0}x_2^{-3}\nabla u^m\cdot\nabla\eta dx+\int_{\Omega_0}(-\beta_m\circ(\cdot)+\varepsilon u^m)\cdot\eta dx=0\quad(\forall\eta\in H_0^1(\Omega_0\backslash\Gamma_2^\prime)) \tag{3.4$'$}$$

设ζ是$B_{2R}\subset\Omega_0$上的光滑截断函数，在B_R上$\zeta\equiv1$，取$\eta=(u^m-u_R^m)\cdot\zeta^2\exp[t|u^m-u_R^m|^2]$，其中 $u_R^m=⨍_{B_R}u^mdx=\int_{B_R}u^mdx\Big/\int_{B_R}dx$，注意到$\beta_{\varepsilon,m}$的构造，对固定的$\varepsilon$，取充分大的$t$，应用引理3.3进行估计得，

$$\int_{B_R}|\nabla u^m|^2dx\leqslant\frac{c}{R^2}\left(\int_{B_{2R}}|\nabla u^m|^qdx\right)^{2/q}+cR^2\int_{B_{2R}}|\nabla u^m|^2dx \tag{3.22}$$

其中 $q=\frac{2n}{n+2}$，这儿应用了Sobolev-Poincaré不等式．

下面给出边界估计．先考虑$\Gamma_0^\prime$附近的点，设B_{R_0}是R^2中的一个圆且$B_{R_0}\cap\Omega_0\neq\phi_0$ 对 $x_0\in B_R$，$R<\frac{1}{2}\text{dist}(x_0,\partial B_{R_0})$，有以下三种可能：

(1) $B_{3R/2}(x_0)\cap\Omega_0=\phi$， (2) $B_{3R/2}(x_0)\cap(B_{R_0}\backslash\Omega_0)=\phi$

(3) $B_{3R/2}(x_0)\cap\Omega_0\neq\phi$，$B_{3R/2}(x_0)\cap(B_{R_0}\backslash\Omega_0)\neq\phi$．

考察情形(3)，在(3.14)中取$\eta=(u^m-u_0)\xi\exp[t|u^m-u_0|^2]$，其中 $\xi\in C_0^1(B_{3R/2}(x_0))$，$\xi\equiv1$于$B_R(x_0)$，从而通过计算可得．

$$⨍_{B_R}|\nabla u^m|^2dx\leqslant c\{(⨍_{B_{2R}\cap\Omega_0}|\nabla(u^m-u_0)|^qdx)^{2/q}$$
$$+⨍_{B_{2R}\cap\Omega_0}(1+|\nabla u_0|)^2dx\}$$

为了证明本引理，这里暂时延拓u^m，u_0于$B_{2R_B}\cap\Omega_0$之外为0．定义函数$g(x)$，$f(x)$如下：

$$g(x)=\begin{cases}|\nabla u^m|^q & (x\in B_{R_0}\cap\Omega_0),\\ 0 & (x\in B_{R_0}\backslash\Omega_0),\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}(1+|\nabla u_0|)^q & (x\in B_{R_0}\cap\Omega_0)\\ 0 & (x\in B_{R_0}\backslash\Omega_0)\end{cases}$$

从而对任意$x\in B_R$，$R<\frac{1}{2}\text{dist}(x,\ \partial B_{R_0})$，

$$⨍_{B_R(x)}g^{2/q}dx\leqslant c\{(⨍_{B_{2R}(x)}gdx)^{2/q}+⨍_{B_{2R}(x)}f^{2/q}dx\} \tag{3.23}$$

对(3.22)(3.23)应用[5]中的逆Hölder不等式和有限覆盖定理，并注意到应用引理3.2类似可得(3.23)对Γ_1和$\Gamma_2^\prime$附近的点也成立，最后得到：$\exists\,p>2$，

$$\left(\int_{\Omega_0}|\nabla u^m|^pdx\right)^{1/p}\leqslant c\left\{\left(\int_{\Omega_0}|\nabla u^m|^2dx\right)^{1/2}+\left(\int_{\Omega_0}(1+|\nabla u_0|^p)dx\right)^{1/p}\right\}$$

其中 c与m无关，至此可知本引理为真，证毕．

下面我们可以证明：

定理3.1 混合问题(3.3)存在属于$C^0(\bar{\Omega}_0)\cap C^3(\Omega_0\cup\Gamma_2')$的解。

证明 由引理3.4，利用Soboler紧嵌入定理可知$\{u^m\}$在$C^0(\bar{\Omega}_0)$中致密，结合引理3.3，从$\{u^m\}$中可选出子列（仍记为u^m）使得：

$$\lim_{m\to\infty}u^m=u \qquad (在C^0(\bar{\Omega}_0)中) \tag{3.24}$$

$$\lim_{m\to\infty}u^m=u \qquad (在H^1(\Omega_0)中弱收敛意义下) \tag{3.25}$$

又由于β_m在$L'(\Omega_0)$中有界（见(3.12)），所以至少可选取子列使得[1]，

$$\lim_{m\to\infty}\beta_m\circ(\omega^2(\nabla u^m)^2-k^2x_2^4)=\mu \qquad (在测度空间\mu(\Omega_0)中)$$

从而 $$\lim_{n,m\to\infty}\sup\int_{\Omega_0}x_2^{-3}\cdot|\nabla(u^m-u^n)|^2dx$$

$$\leqslant\lim_{m,n\to\infty}\left\{\int_{\Omega_0}[-\beta_m\circ(\omega^2(\nabla u^m)-k^2x_2^4)+\beta_n\circ(\omega^2(\nabla u^n)-k^2x_2^4)](u^m-u^n)dx\right.$$

$$\left.-\varepsilon\int_{\Omega_0}|u^m-u^n|^2dx\right\}=0$$

这样可得，u^m在$H^1(\Omega_0)$中强收敛于u，所以

$$\lim_{n\to\infty}\beta_m\circ(\omega^2(\nabla u^m)-k^2x_2^4)=\beta\circ(|\nabla u|^2-k^2x_2^4) \qquad (\text{a. e.}于\Omega)$$

这儿用到了$\beta_m\circ(\omega^2(\nabla u_m)-k^2x_2^4)$是等度可积的。进而，

$$\lim_{m\to\infty}\beta_m\circ(\omega^2(\nabla u_m)-k^2x_2^4)=\beta_\varepsilon\circ(|\nabla u|^2-k^2x_2^4) \qquad (于L'(\Omega_0))$$

故我们得到u是下列变分不等式之解，

$$\left.\begin{array}{l}求u\in\hat{K}\cap C^0(\Omega) \qquad (\forall v\in\hat{K})\\ \displaystyle\int_{\Omega_0}x_2^{-3}\nabla u\cdot\nabla(v-u)dx+\int_{\Omega_0}[-\beta\circ(|\nabla u|^2-k^2x_2^4)+\varepsilon u]\cdot(v-u)dx\geqslant0\end{array}\right\} \tag{2.26}$$

注意到$\beta_\varepsilon\in C^2$，类似于引理3.3的证明可得(3.30)之任一有界解属于$C^3(\Omega_0\cup\Gamma_2')\cap C^0(\bar{\Omega}_0)$，又因为(3.26)存在连续解，综合上述两点可得古典的混合问题(3.3)在$C^3(\Omega_0\cup\Gamma_2')\cap C^0(\bar{\Omega}_0)$中可解。定理证毕。

设区域$T_{h_2}=\{(x_1,x_2)\in\Omega,\ 0<h_2<x_2<h_1\}$，取(2.5)之解$u_0$，考虑边值问题：

$$\left.\begin{array}{l}Au_\varepsilon^h+\varepsilon u_\varepsilon^h=0 \\ u_\varepsilon^h|_{\partial T_{h_2}}=u_0\end{array}\quad (在T_{h_2}中)\right\} \tag{3.27}$$

定理3.2 问题(3.27)有解$u_\varepsilon^h\in C^2(\bar{T}_h)\cap C^2(T_h)$，且

(i) $u_\varepsilon^h=x_2^4\cdot v_\varepsilon^h$，其中$v_\varepsilon^h$满足：

$$\left.\begin{array}{l}Lv_\varepsilon^h\triangleq x^2\dfrac{\partial^2v_\varepsilon^h}{\partial x_i^2}+5\dfrac{\partial v_\varepsilon^h}{\partial x_2}-\varepsilon x_2^4v_\varepsilon^h=0\\ v_\varepsilon^h|_{\partial T_{h_2}}=0\end{array}\right\} \tag{3.28}$$

(ii) 存在与ε，h_2无关的常数c使得：

$$|u_\varepsilon^h(x)|\leqslant c \quad (\forall x\in\bar{T}_{h_2}) \tag{3.29}$$

$$|\nabla u_\varepsilon^h(x)|\leqslant kx_2^2 \quad (\forall x\in T_{h_2}) \tag{3.30}$$

对适当小的h_1成立。

证明 问题(3.28)解之存在性显然，由于v_0有界，利用极大值原理：

$$|v_\varepsilon^h(x)|\leqslant \max_{x\in\partial T_{h_2}}|v_0|\leqslant c \qquad (c\text{与}\varepsilon,\ h_2\text{无关}) \tag{3.31}$$

通过作∂T_{h_2}上算子L与v_ε^h的闸函数，可得：$|\nabla v_\varepsilon^h(x)|\leqslant c$ ($x\in\partial T_{h_2}$，c与ε，h_2无关)．又由于：

$$x_2\frac{\partial^3 v_\varepsilon^h}{\partial x_2^2\partial x_1}+5\frac{\partial^2 v_\varepsilon^h}{\partial x_2\partial x_1}-\varepsilon x_2^4\frac{\partial u_\varepsilon^h}{\partial x_1}=0$$

对$\partial v_\varepsilon^h/\partial x_1$应用极大值原理：

$$\left|\frac{\partial v_\varepsilon^h}{\partial x_1}\right|\leqslant \max_{x\in\partial T_{h_2}}\left|\frac{\partial v_\varepsilon^h}{\partial x_1}\right|\leqslant c \qquad (c\text{与}\varepsilon,\ h_2\text{无关}) \tag{3.32}$$

对于$\dfrac{\partial v_\varepsilon^h}{\partial x_2}$用Bernstein技巧可给出其关于$\varepsilon$，$h$的一致界．事实上，令$v=\left|\dfrac{\partial v_\varepsilon^h}{\partial x_2}\right|^2$，则：

$$v_{x_i}=2v_{\varepsilon,x_2}^h\cdot v_{\varepsilon,x_2x_i}^h$$
$$v_{x_ix_i}=2(v_{\varepsilon,x_2x_i}^h)^2+2v_{x_2}^h\cdot v_{\varepsilon,x_2x_ix_i}^h \qquad (i=1,2)$$

这儿$v_{x_i}=\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$．

若v在$x_0\in T_{h_2}$内达到最大值，则在x_0点，

$$\left.\begin{aligned}&v_{x_k}=0 \qquad (k=1,2)\\ &Lv\leqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

由此利用(3.28)，将v_{x_i}，$v_{x_ix_i}$代入(3.33)通过计算得，在x_0点$|v_{\varepsilon,x_2}^h|\leqslant c$（与$\varepsilon$，$h$无关)，从而综合上述推导得：$|\nabla v_\varepsilon^h|\leqslant c$于$T_{h_2}$($c$与$\varepsilon$，$h$无关)．

另一方面，若u_ε^h是(3.27)之解，$v_\varepsilon^h=x_2^{-4}u_\varepsilon^h$就满足(3.33)，由$v_\varepsilon^h(x)$与$\nabla v_\varepsilon^h$的一致有界性，选取适当小的$h$，就可得(ii)．至此定理3.2证毕．

不难证明由(3.3)之解u_ε和(3.27)之解u_ε^h定义的函数

$$u_\varepsilon(x)=\begin{cases}u_\varepsilon & (x\in\Omega_0)\\ u_\varepsilon^h & (x\in T_{h_2}\cup\Gamma_0')\end{cases}$$

属于$C^0(\overline{\Omega_0\cup T_{h_2}})\cap H^{1,2}(\Omega_0\cup T_{h_2})$．

从而对适当小的h_2，u_ε是，

$$\left.\begin{aligned}&Au_\varepsilon-\beta_\varepsilon\circ(|\nabla u_\varepsilon|^2-k^2x_2^4)+\varepsilon u_\varepsilon=0 \qquad (\text{于}\Omega)\\ &u_\varepsilon|_{\partial T_{h_2}\setminus\Gamma_0'}=u_0,\ u_\varepsilon|_{\Gamma_1}=T/2\pi,\ \left.\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\right|_{\Gamma_2'}=0\end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

的$H^{1,2}(\Omega_1)$弱解，其中$\Omega_1=\Omega_0\cup T_{h_2}\cup\Gamma_0'$，$\Gamma_2''=\partial\Omega_1\cap\Gamma_2$，$\Gamma_2''=\{(x_1,h_2)\in\bar{\Omega}\}$，类似于定理(3.1)的后半部之证明可得$u_\varepsilon\in C^3(\Omega_0\cup T_{h_2}\cup\Gamma_2''\cup\Gamma_0')\cap C^0(\bar{\Omega}_1)$．

四、梯度的一致估计

本节将给出惩罚问题(3.34)的解之梯度的一致界，采用的方法是所谓的 Bernstein 技巧[6][8][12]．

利用引理3.1和(3.3)，通过作闸函数可得：

引理4.1 存在与ε无关的常数c_1，c_2，使得：

$$0\leqslant u_\varepsilon(x)\leqslant c_1 \qquad (x\in\bar{\Omega}_1,\ 0<\varepsilon<1) \tag{4.1}$$

$$|\nabla u_\varepsilon(x)|\leqslant c_2 \qquad (x\in\Gamma_0'\cup\Gamma_1,\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0<1) \tag{4.2}$$

下面证明:

引理4.2 存在常数c_3使得:

$$|\nabla u_\varepsilon|\leqslant c_3\ (\forall x\in\Omega_1,\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0<1,\ 某个\varepsilon_0) \tag{4.3}$$

证明 为了方便在证明中省去下标ε，作辅助函数 $v=|\nabla u|^2+\lambda u$ $(\lambda>0$ 待定). 这样,

$$v_{x_i}=2u_{x_k}\cdot u_{x_k\cdot x_i}+\lambda u_{x_i} \qquad (k,\ i=1,\ 2) \tag{4.4}$$

$$v_{x_i x_j}=2u_{x_k x_j}u_{x_k x_i}+2u_{x_k}\cdot u_{x_k x_i x_j}+\lambda u_{x_i x_j} \quad (j=1,2) \tag{4.5}$$

对方程(3.34)分别关于x_1，x_2求导,

$$Au_{x_1}-\beta'\circ(|\nabla u|^2-k^2x_2^4)\cdot(|\nabla u|^2-k^2x_2^4)_{x_1}+\varepsilon u_{x_1}=0 \tag{4.6}$$

$$Au_{x_2}-\beta'\circ(|\nabla u|^2-k^2x_2^4)\cdot(|\nabla u|^2-k^2x_2^4)_{x_2}+\varepsilon u_{x_2}=-\frac{3}{x_2^4}u_{x_i x_i}+\frac{12}{x_2^5}u_{x_1} \tag{4.7}$$

设v在$x_0\in\bar{\Omega}_1$上达到最大值，则有三种可能情形.

1° 点$x_0\in\Omega_1$，那么在x_0点,

$$\left.\begin{aligned} &v_k=0 \qquad (k=1,2)\\ &Av=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_2^{-3}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

从而由(3.34)，(4.6)，(4.7)和Young不等式得:

$$\begin{aligned} 0&\leqslant Av\\ &\leqslant\beta'\circ(\cdot)(-2\lambda|\nabla u|^2+c|\nabla u|^2+c)+cu_{x_2}^2+\lambda\beta\circ(\cdot) \end{aligned}$$

由$\beta(t)$的凸性可知$\beta(t)\leqslant\beta'(t)\cdot t$ $(t\in R)$. 不妨假设$\beta'\circ(|\nabla u|^2-k^2x_2^4)\geqslant 1$于 x_0，否则可推v的界，则,

$$0\leqslant\beta'\circ(\cdot)(-\lambda|\nabla u|^2+c|\nabla u|^2+c)$$

即 $$\lambda|\nabla u|^2\leqslant c|\nabla u|^2+c\ (于x_0点).$$

所以取λ充分大，就得在x_0点$|\nabla u|^2$的一致界，进一步得到v在x_0点的一致界.

2° 点$x_0\in\Gamma_2'=\Gamma_{21}'\cap\Gamma_{22}'$. 此时应用引理3.2，可以把$x_0$转化为内点而得到在$x_0$点$v$的一致界.

3° 点x_0属于$\partial\bar{\Omega}_1$的其它点，用理3.2和4.1即可得(4.3).

综合上述各点知(4.3)确真. 引理证毕.

五、$W^{2,p}$，$W^{2,\infty}$估计与应力函数

引理5.1 存在与ε无关的常数c_4，使得

$$|Au_\varepsilon(x)|\leqslant c_4(\Omega_1') \qquad (\forall x\in\Omega_1'\subset\subset\Omega_1,\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0) \tag{5.1}$$

从而对$1\leqslant p<\infty$，$\Omega_1'\subset\subset\Omega_1$，有:

$$\|u_\varepsilon\|_{H^{2,\infty}(\Omega_1')}\leqslant c(p,\Omega_1') \quad (0<\varepsilon<\varepsilon_0) \tag{5.2}$$

证明 为了简便在证明中省掉$u_\varepsilon,\beta_\varepsilon$中的下标$\varepsilon$. 作辅助函数$V=\xi^2\cdot\beta\circ(|\nabla u|^2-k^2x_2^4)$，其中$\xi$是在$\partial\Omega_1$附近为0的光滑函数. 从而,

$$V_{x_i}=\xi^2\cdot\beta'\circ(\cdot)(2u_{x_k}\cdot u_{x_k x_i}-(k^2x_2^4)_{x_i})+2\xi_{x_i}\cdot\beta\circ(\cdot)$$

$$\begin{aligned} V_{x_i x_j}=&\xi^2\beta''\circ(\cdot)(|\nabla u|^2-k^2x_2^4)_{x_i}\cdot(|\nabla u|^2-k^2x_2^4)_{x_j}\\ &+\xi^2\beta'\circ(\cdot)\cdot(2u_{x_k x_j}u_{x_k x_i}+2u_{x_k}u_{x_k x_i x_j}-(k^2x_2^4)_{x_i x_j}) \end{aligned}$$

$$+2\xi\xi_{x_j}\beta'\circ(\cdot)(2u_{x_k}\cdot u_{x_kx_i}-(k^2x_2^4)_{x_i})$$
$$+2\xi\cdot\xi_{x_i}\cdot\beta'\circ(\cdot)\cdot(2u_{x_k}\cdot u_{x_kx_j}-(k^2x_2^4)_{x_j})$$
$$+\beta\circ(\cdot)\cdot(2\xi_{x_i}\xi_{x_j}+2\xi\cdot\xi_{x_ix_j})$$

由方程 (3.34)， $\xi^2Au=V-\varepsilon\xi^2\cdot u$， 所 以 $\xi^2Au_k=V_{x_k}+\xi\tilde{D}_k^2u$ $(k=1,\ 2)$，其中 $\tilde{D}_k^2u=\sum_{|\alpha|<2}\sigma_k^\alpha D^\alpha u$，$\sigma_k^\alpha$有界

若在$x_0\in\Omega_1$处达到最大值，则在x_0点，

$$V_{x_k}=0\quad(k=1,\ 2,\ AV\geqslant 0)$$

从而在x_0点，应用引理4.2，可作如下估计：

$$0\leqslant AV=-x_2^{-3}V_{x_ix_i}+3\cdot x_2^{-4}\cdot V_{x_2}$$
$$=-x_2^{-3}\xi^2(\beta'\circ(\cdot)\cdot(|\nabla u|^2-k^2x_2^4)_{x_i}^2+c\cdot\beta\circ(\cdot)$$
$$+\beta'\circ(\cdot)\{-2x_2^{-3}\xi^2u_{x_kx_i}^2+2u_{x_k}\xi^2(-x_2^{-3}\cdot u_{x_kx_ix_i}+3x_2^{-4}u_{x_2x_k}+cu_{x_k})$$
$$+c\xi\cdot|\nabla^2u|+c\}$$

由于β是凸的，$\beta(t)\leqslant t\beta'(t)$，所以.

$$0\leqslant\beta'\circ(\cdot)\{-2x_2^{-3}\xi^2\cdot|\nabla^2u|^2+2u_{x_k}\cdot\xi^2\cdot A(u_k)+(\xi^2\cdot|\nabla^2u|+c\}$$
$$\leqslant\beta'\circ(\cdot)\cdot\{-2x_2^{-3}\xi^2\cdot|\nabla^2u|^2+c\cdot\xi\cdot|\nabla^2u|+c\}$$

从此推得$\xi^2\cdot|\nabla^2u|^2\leqslant c$，$c$与$\varepsilon$无关，故得$V\leqslant c$. 引理证毕.

进一步类似于文[12]中定理的证明可推得：

引理5.2 存在与ε无关的常数$c_6(\Omega')$，使得，

$$\|\nabla^2u_\varepsilon\|L^\infty(\Omega')\leqslant c_6(\Omega')\qquad(\forall\Omega'\subset\subset\Omega_1)\tag{5.3}$$

下面我们证明关于应力函数的

定理5.1 经典问题(2.1)～(2.4)有唯一弱解$u\in H^2(\Omega\Gamma_1)\cap W_{loc}^{2,\infty}(\Omega\cup\Gamma_2\cup\Gamma_0)$， 即$u\in C^1(\bar{\Omega}\backslash\Gamma_1)\cap C^{1,1}(\Omega\cap\Gamma_2)$，这儿$\Omega\Gamma_1\subset\subset\bar{\Omega}\backslash\Gamma_1$

证明 我们先证明下列边值问题的解是存在唯一的.

$$\left.\begin{aligned}&\max\{-A\bar{u},\ |\nabla\bar{u}|-kx_2^2\}=0\quad(\text{在}\Omega_1\text{中})\\&\bar{u}|_{\Gamma_0}=u_0,\ \ \bar{u}|_{\Gamma_1}=T/2\pi,\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2'}=0\end{aligned}\right\}\tag{5.4}$$

事实上，由引理4.1，4.2和5.2，$\exists\,\varepsilon_m\to0$和函数$\bar{u}\in C^{0,1}(\bar{\Omega}_1)\cap W_{loc}^{2,\infty}(\Omega_1)$，使得

$$\text{在}C(\Omega_1)\text{中}\lim_{m\to\infty}u_{\varepsilon_m}=\bar{u}\tag{5.5}$$

$$\text{在}C(\Omega_1)\text{中}\lim_{m\to\infty}u_{\varepsilon_m,x_i}=\bar{u}_{x_i}\tag{5.6}$$

$$\text{在}W_{loc}^{2,\infty}(\Omega_1)\text{中，}\lim_{m\to\infty}u_{\varepsilon_m,x_ix_j}=\bar{u}_{x_ix_j}\ (\text{弱收敛})$$

$$(i,\ j,\ m=1,\ 2,)\tag{5.7}$$

由引理5.1，$\beta_{\varepsilon_m}\circ(|\nabla u_m|^2-k^2x_2^4)$是局部有界的，利用$|\nabla\bar{u}|$和$\nabla u_{\varepsilon_m}$的连续性及$\beta_\varepsilon$的结构，可以推得，

$$\text{在}\Omega_1\text{中}|\nabla\bar{u}|^2\leqslant k^2x_2^4\tag{5.8}$$

又由于$-Au_\varepsilon\leqslant0$于$\Omega_1$得：

$$-A\bar{u}\leqslant0\qquad(\text{a. e. 于}\Omega_1)\tag{5.9}$$

若对$x_0\in\Omega_1$，$|\nabla\bar{u}(x_0)|<kx_2^2$，注意到$|\nabla\bar{u}|$和函数$g=kx_2^2$的连续性，可知必然存在$x_0$的

某邻域$N(x_0)$，使得$x\in N(x_0)$时，$|\nabla\bar{u}(x)|<kx_2^2$. 从而由(5.6)，就有充分大的$m_0$，使$m>m_0$时，$|\nabla u_{\varepsilon_m}(x)|<kx_2^2\ (\forall x\in N(x_0))$. 这样，通过极限就有：

$$A\bar{u}(x)=0 \qquad (\text{当}x\in N(x_0)\text{时}) \tag{5.10}$$

综合(5.8)～(5.10)就可以断言$\bar{u}\in C^{0,1}(\bar{\Omega}_1)\cap W^{2,\infty}_{loc}(\Omega_1)$是(5.4)之弱解. 再利用引理3.2可得$\bar{u}$在边界$\Gamma_2'$上的正则性，即$\bar{u}\in C^{1,1}(\Omega_1\cup\Gamma_2'')$.

下面来证明(5.4)的解之唯一性. 设$\bar{u}$和$\hat{u}$是(5.4)的两个不同的解，$\rho=\max\limits_{\Omega_1}(\hat{u}-\bar{u})>0$，令$u_\tau=\hat{u}+(\tau-1)\bar{u}\ (0<\tau<1)$，选取适当的$\tau$使得$\max\limits_{\bar{\Omega}_0}u_\tau\geqslant\rho/2$. 作函数$V(x)=a\exp(bx_1)$，其中$a$，$b>0$，则，

$$AV=-x_2^{-3}b^2V<0 \qquad (\text{于}\Omega_1) \tag{5.11}$$

若$u_\tau+V$在$x^\tau\in\bar{\Omega}_0$上达到非负极大值，则有两种可能：

(i) $x^\tau\in\Omega_1'\subset\subset\Omega_1$，由Bony极大原值理[2]，

$$\text{在}x^\tau\text{点，}\nabla(u^\tau+V)=0 \tag{5.12}$$

$$\lim_{x\to x^\tau}\operatorname{ess\,sup}A(u^\tau+V)\geqslant 0 \tag{5.13}$$

取$\delta=\min k(x_2^\tau)^2$，$a_1$充分小使得$a\in(0,a_1)$时，$bV<\tau\delta$，$\max\limits_{\bar{\Omega}_1}V<\rho/4$于$\Omega_1$，则对$a\in(0,a_1)$，

$$|\nabla\hat{u}(x^\tau)|\leqslant k(x_2^\tau)^2-\varepsilon\delta+|\nabla V|<k(x_2^\tau)^2 \tag{5.14}$$

从而在x^2的附近$A\hat{u}(x)=0$(a.e)，进一步由(5.13)和(5.14).

$$0\leqslant\lim\ \operatorname{ess\,sup}|(\tau-1)A\hat{u}+AV)<0.$$

得出矛盾，情形(i)不可能出现.

(ii) $x^\tau\in\Gamma_2''$，此时应用引理3.2，可将(ii)化为(i)，所以(ii)也不可能成立.总之(5.4)之解存在唯一. 现在来延拓(5.4)之解使之成为(2.1)～(2.4)之解.

事实上，由理3.2和本定理的前一部分的证明可知，在T_{h_2}上$A\bar{u}=0$，利用定理2.2，作函数

$$u(x)=\begin{cases}\bar{u}(x) & (x\in\Omega_1)\\ u_0(x) & (x\in\Gamma_0''\cup(\Omega\backslash\Omega_1))\end{cases} \tag{5.15}$$

则$u\in W^{1,\infty}(\Omega)\cap W^{2,\infty}(\Omega\cup\Gamma_2\cup\Gamma_0)$且满足：

$$\left.\begin{aligned}&\max\{-Au,|\nabla u|-kx_2^2\}=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{中})\\ &u|_{\Gamma_1}=T/2\pi,\ u|_{\Gamma_0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}=0\end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

至此定理得证.

注 对于障碍问题或约束变分问题，我们一般不能期望解属于C^2，从某种程度上讲$C^{1,1}$正则性是最优的。

参 考 文 献

[1] M. Biroli and U. Mosco, Stability and homogenization for nonlinear variational inequalities with irregular obstacles and quadratiu growth, *Nonli. Anal.*, 7(1) (1983), 41—60.

[2] J. M. Bony, Principle du maximum dans les espaces de Sobolev, *C. R. A. S.* 265 (1967), 333—336.

[3] C.. W. Cryer, The solution of the axisymmetric elastic-plastic torsion of a shaft using variational inequalities. *J. Math. Anal. Appl.*, 76 (1980), 535—570.

[4] L. C. Evans, A second order elliptic equation with gradient constraint, *Communications in PDEs*, 49 (1979), 557—572.

[5] M. Giaquinta, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlineecr Elliptic Systems*, Princeton Univer. Preess, Princeton (1983).

[6] D. Gilbary and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Dilleremtial Equatiions of Second Order*, Spring-Verlag, New York (1983).

[7] A. Huber, On the uniqueness of generalized axially symmetric potentials, *Ann. of Math.*, 60(2) (1954), 351—358.

[8] H. Ishii and S. Koike, Boundary regularity and uniqueness for an elliptic equation with gradient constraint, *Communications in PDEs*, 8(4) (1983), 317—346.

[9] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Acad. Press, New York (1980)

[10] T. W. Ting, Elastic-plastic torsion of convex cylindrical bars, *J. Math. Mech.*, 19 (1969), 531—551.

[11] T. W. Ttng, Elastic-plastic torsion problem over multiply connected domains., *Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa*, 4(4) (1977), 291—312.

[12] M. Wiegner, The $c^{1,1}$-character of solutions of second order elliptic equations with gradient constraint, *Comm. in PDEs*, 6(3) (1981), 361—371.

[13] 杨孝平，关于无界系数的非线性椭圆变分不等式，湖南大学学报（数学专辑），15(1)(1988), 222—231.

[14] 周叔子，关于一类轴对称的自由边界问题，应用数学学报，6(4)(1983), 420—432.

[15] 周叔子，《变分不等式及其有限元方法》，湖南大学出版社，长沙（1988）.

On an Axially Symmetric Elastic-Plastic Torsion Problem

Yang Xiaoping

(*Nanjing University of Science & Technology, Nanjing* 210094, *P.R. China*)

Zhou Shuzhi

(*Hu'nan University, Changsha* 410000, *P.R. China*)

Li Guangyao

(*Guizhou University, Guiyang* 550000, *P. R. China*)

Abstract

This paper discussed an axially symmetric elastic-plastic torsion problem. In virtue of penalty method, reflection boundaries, Bernstein estimate and reverse Hölder inequality, on account of studying the Corresponding Commplementary boundary problem which had mixed boundary Conditions, the regularity of the solutions was established.

Key words complementary boundary problem, penalty method, Bernstein estimate, regularity