应用数学和力学，第18卷 第5期（1997年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

向量丛动力系统研究注记(Ⅱ)——部份2

廖 山 涛[1]

(1996年1月3日收到)

摘 要

在这部份2中，我们先证明部份1中叙述的定理3.1[15]．这证明是通过换变数的办法，把原方程组化成微分动力系统理论中，有关典范方程组的一种形式来完成的．然后用定理3.1[15]加上预备定理2.1来证明部份1中宣布的本文主要定理．有关可容许扰动的定义包含在这部份2的附录中．这主要定理的意义描述在部份1引言中．

关键词 向量丛动力系统 非一致双曲性 遍历性 可容许扰动 点式有界

四、换变数

叙述在本文部份1第一节中的主要定理将在第六节中完成它的证明．现在对于给在第三节中的常微分方程组，简写

$$\bar{a}_i(\delta)=\max\left[-\lambda,\max_{j=1,2,\cdots,q}\left\{\frac{1}{\delta T}\int_0^{\delta T}\operatorname{diag}_j A(iT+t)dt\right\}\right]$$

$$\bar{\bar{a}}_i(\delta)=\min\left[\lambda,\min_{j=q+1,\cdots,p}\left\{\frac{1}{\delta T}\int_0^{\delta T}\operatorname{diag}_j A(iT+t)dt\right\}\right]$$

$$(i=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots;\ \delta=-1,1).$$

命$\bar{\alpha}(t)$及$\bar{\beta}(t)$为$(-\infty,\infty)$上分别具有下述性质(i)及(ii)的函数．

$$\text{(i)}\quad \bar{\alpha}(m\delta T)=\begin{cases}0 & (\text{对}m=0)\\ T\sum_{\tau=0}^{m-1}\bar{a}_{\tau\delta}(\delta) & (\text{对}m=1,2,3,\cdots;\ \delta=-1,1)\end{cases}$$

且$\bar{\alpha}(t)$在每一$\langle m\delta T,(m\delta+1)T\rangle$是线性的，即，

$$\bar{\alpha}(t)=\bar{\alpha}(m\delta T)+(t-m\delta T)(\bar{\alpha}((m\delta+1)T-\bar{\alpha}(m\delta T))/T,$$

$$m\delta T\leqq t\leqq(m\delta+1)T\qquad(\text{对}m=0,1,2,3,\cdots;\ \delta=-1,1)$$

$$\text{(ii)}\quad \bar{\beta}(s(k)T)=\bar{\alpha}(s(k)T)\qquad(\text{对}k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots),$$

且对每一k存在$\bar{r}(k)\in(s(k)T,s(k+1)T)$使得$\bar{\beta}(t)$在$\langle s(k)T,\ \bar{r}(k)\rangle$和在$\langle\bar{r}(k),s(k+1)T\rangle$上都是线性的，且

---

1 北京大学数学系，北京 100871．

$$\bar{\beta}(t)=\begin{cases}\bar{\beta}(s(k)T)+(-\lambda-\pi)(t-s(k)T) & (\text{对}s(k)T\leqq t\leqq \bar{r}(k))\\ \bar{\beta}(s(k+1)T)+(-\lambda+2\pi)(t-(s(k+1)T) & (\text{对}\bar{r}(k)\leqq t\leqq s(k+1)T).\end{cases}$$

这样$\bar{r}(k)$的存在是由于方程组(*)[15]的性质(Ⅱ)．这存在是唯一的．

于是，从(*)[15]的性质(Ⅱ)及上述(i)，(ii)，简单的计算给出

$$-2\pi\leqq(\bar{\beta}(t)-\bar{\alpha}(t))/(t-s(k)T)\leqq-\pi$$
$$(\text{对}s(k)T<t\leqq\bar{r}(k))$$

及

$$-2\pi\leqq(\bar{\beta}(t)-\bar{\alpha}(t))/(s(k+1)T-t)\leqq-\pi$$
$$(\text{对}\bar{r}(k)\leqq t<s(k+1)T) \tag{4.1}$$

再从(*)的性质(Ⅱ)我们分别有如下(iii)及(iv)中所述的函数$\bar{\bar{\alpha}}(t)$及$\bar{\bar{\beta}}(t)$．

(iii) $\bar{\bar{\alpha}}(t)$在$\langle m\delta T,\ (m\delta+1)T\rangle$上是线性的($m=0,1,2,3,\cdots$)，且

$$\bar{\bar{\alpha}}(m\delta T)=\begin{cases}0 & (\text{对}m=0),\\ T\sum\limits_{\tau=0}^{m-1}\bar{\bar{a}}_{\tau\delta}(\delta) & (\text{对}m=(1,2,3,\cdots;\ \delta=-1,1)).\end{cases}$$

(iv) $\bar{\bar{\beta}}(t(k)T)=\bar{\bar{\alpha}}(s(k)T)$(对$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$)．对每一$k$存在$\bar{\bar{r}}(k)\in\langle s(k)T,\ s(k+1)T\rangle$使得$\bar{\bar{\beta}}(t)$在$\langle s(k)T,\ \bar{\bar{r}}(k)\rangle$上及在$\langle\bar{\bar{r}}(k),\ s(k+1)T\rangle$上都是线性的；确切地说，

$$\bar{\bar{\beta}}(t)=\begin{cases}\bar{\bar{\beta}}(s(k)T)+(\lambda-\pi)(t-s(k)T) & (s(k)T\leqq t\leqq\bar{\bar{r}}(k))\\ \bar{\bar{\beta}}(s(k+1)T)+\lambda(t-s(k+1)T) & (\bar{\bar{r}}(k)\leqq t\leqq s(k+1)T).\end{cases}$$

我们于是有

$$-\pi\leqq\frac{\bar{\bar{\beta}}(t)-\bar{\bar{\alpha}}(t)}{t-s(k)T}\leqq0,\qquad -\pi\leqq\frac{\bar{\bar{\beta}}(t)-\bar{\bar{\alpha}}(t)}{s(k+1)T-t}\leqq0$$
$$(\text{对}s(k)T<t<s(k+1)T) \tag{4.2}$$

考虑$(-\infty,\infty)$上的函数

$$\bar{\beta}(t)-\bar{\alpha}(t)\text{及}\bar{\bar{\beta}}(t)-\bar{\bar{\alpha}}(t).$$

它们对t连续，但在$t=s(k)T$等这样的一些点处可能对t不可微．我们于是考虑函数

$$\left.\begin{aligned}\bar{N}(t)&=\frac{1}{2d}\int_{-d}^{d}(\bar{\beta}(t+s)-\bar{\alpha}(t+s))ds\\ \bar{\bar{N}}(t)&=\frac{1}{2d}\int_{-d}^{d}(\bar{\bar{\beta}}(t+s)-\bar{\bar{\alpha}}(t+s))ds\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

$t\in(-\infty,\infty)$，其中

$$d=\min\left\{\frac{T}{4},\ \frac{\pi T}{2(\bar{\eta}+\lambda)}\right\} \tag{4.4}$$

($\bar{\eta},\lambda,T$及π分别见(3.1)及(3.2)．这些函数对t连续地可微，且

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\bar{N}(t)}{dt}&=\frac{1}{2d}(\bar{\beta}(t+d)-\bar{\alpha}(t+d)-\bar{\beta}(t-d)+\bar{\alpha}(t-d))\\ \frac{d\bar{\bar{N}}(t)}{dt}&=\frac{1}{2d}(\bar{\bar{\beta}}(t+d)-\bar{\bar{\alpha}}(t+d)-\bar{\bar{\beta}}(t-d)+\bar{\bar{\alpha}}(t-d))\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

我们断言

$$\frac{1}{2d}|\bar{\alpha}(t+d)-\bar{\alpha}(t-d)|\leqq\bar{\eta}+\lambda \tag{4.6}$$

对所有$t\in(-\infty,\infty)$．事实上，对任给定的t设$\langle t-d,t+d\rangle\subset$某一区间$\langle kT,(k+1)T\rangle$．则由上面(i)中所述的线性质我们有

$$\frac{1}{2d}(\bar{\alpha}(t+d)-\bar{\alpha}(t-d))=\frac{\bar{\alpha}((k+1)T)-\bar{\alpha}(kT)}{T},$$

其绝对值$\leqq\bar{\eta}+\lambda$，如所论断．设不然，有一整数k使得$t-d<kT<t+d$．则因$2d<T$，类似的论据可证明

$$\frac{|(\bar{\alpha}kT)-\bar{\alpha}(t-d)|}{kT-(t-d)}\leqq\bar{\eta}+\lambda,$$

$$\frac{|\bar{\alpha}(t+d)-\bar{\alpha}(kd)|}{t+d-kT}\leqq\bar{\eta}+\lambda。$$

故我们的论断仍成立．

以类似方式易看出

$$\left.\begin{aligned}&-\lambda-\pi\leqq(\bar{\beta}(t+d)-\bar{\beta}(t-d))/(2d)\leqq-\lambda+2\pi\\&\lambda-\pi\leqq(\bar{\bar{\beta}}(t+d)-\bar{\bar{\beta}}(t-d))/(2d)\leqq\lambda\end{aligned}\right.\tag{4.7}$$

$$|\bar{\bar{\alpha}}(t+d)-\bar{\bar{\alpha}}(t-d)|/(2d)\leqq\bar{\eta}+\lambda\tag{4.8}$$

对所有$t\in(-\infty,\infty)$．故

$$\left|\frac{d\bar{N}(t)}{dt}\right|\leqq\eta^*,\quad\left|\frac{d\bar{\bar{N}}(t)}{dt}\right|\leqq\eta^*\tag{4.9}$$

其中 $\eta^*=\bar{\eta}+2\lambda+\pi$．

从(ii)，(iv)及(4.1)～(4.3)可得

$$\bar{N}(t)\leqq0,\ \bar{\bar{N}}(t)\leqq0\text{且}\bar{N}(t)-\bar{\bar{N}}(t)\leqq0\tag{4.10}$$

对所有$t\in(-\infty,\infty)$．

现在，写每一$z\in E^p$为

$$z=(\overline{pr}z,\overline{\overline{pr}}z)$$

其中 $\overline{pr}z\in E^q$，$\overline{\overline{pr}}z\in E^{p-q}$．我们可写(＊)(第三节)[15]中的三角式方阵$A(t)$为分块形式

$$A(t)=\begin{pmatrix}\bar{A}(t)&0\\C(t)&\bar{\bar{A}}(t)\end{pmatrix}$$

其中 $\bar{A}(t)$及$\bar{\bar{A}}(t)$分别为$q\times q$及$(p-q)\times(p-q)$方阵．

对于方程组(＊)作变数变换

$$z\mapsto y=z\psi(t)=z\begin{pmatrix}(\exp\bar{N}(t))I_q&0\\0&(\exp\bar{\bar{N}}(t))I_{p-q}\end{pmatrix}\tag{4.11}$$

其中 I_q及I_{p-q}分别为$q\times q$及$(p-q)\times(p-q)$单位方阵而$\psi(t)$对每一t都是一正则$p\times p$方阵．结果我们得出常微分方程组(#)，即

$$(\#)\qquad\frac{dy}{dt}=yB(t)+g(t,y)\qquad((t,y)\in(-\infty,\infty)\times E^p)$$

其中

$$B(t)=\begin{pmatrix}\bar{A}(t)&0\\(\exp(\bar{N}(t)-\bar{\bar{N}}(t))C(t)&\bar{\bar{A}}(t)\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{d\overline{N}(t)}{dt} I_q & 0 \\ 0 & \frac{d\overline{\overline{N}}(t)}{dt} I_{p-q} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} g(t,y) &= (\overline{pr}(g(t,y)),\ \overline{\overline{pr}}(g(t,y))) \\ &= \Bigg((\exp(\overline{N}(t)))\,\overline{pr}\Big(f\Big(t, \frac{\overline{pr}y}{\exp(\overline{N}(t))}, \frac{\overline{\overline{pr}}y}{\exp(\overline{\overline{N}}(t))}\Big)\Big), \\ &\quad (\exp(\overline{\overline{N}}(t)))\,\overline{\overline{pr}}\Big(f\Big(t, \frac{\overline{pr}y}{\exp(\overline{N}(t))}, \frac{\overline{\overline{pr}}y}{\exp(\overline{\overline{N}}(t))}\Big)\Big)\Bigg) \end{aligned} \tag{4.13}$$

命题4.1 常微分方程组(#)具有下述性质($\overline{\text{Ⅰ}}$)～($\overline{\text{Ⅲ}}$).

($\overline{\text{Ⅰ}}$) $B(t)$对所有$t\in(-\infty,\infty)$都是三角式方阵，对角线以上的系数都是0，对t连续且在$(-\infty,\infty)$上有界：

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} \mathscr{N}(B(t)) \leqq \overline{\eta}+\eta^*$$

（其中 $\overline{\eta},\eta^*$分别见(3.1)，(4.9)）.

($\overline{\text{Ⅱ}}$) 对于$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$我们有

$$\max_{i=1,2,\cdots,q} \frac{1}{T}\int_{kT}^{(k+1)T} \operatorname{diag}_j B(t)\,dt \leqq -\frac{3}{4}\lambda \tag{4.14}$$

$$\min_{j=q+1,\cdots,p} \frac{1}{T}\int_{kT}^{(k+1)T} \operatorname{diag}_j B(t)\,dt \geqq \frac{3}{4}\lambda \tag{4.15}$$

($\overline{\text{Ⅲ}}$) $g(t,y)$对(t,y)连续且在$(-\infty,\infty)\times E^p$上有界

$$\sup_{(t,y)\in(-\infty,\infty)\times E^p} \|g(t,y)\| \leqq \overline{\overline{\eta}};$$

可是，$g(t,y)$在整个$(-\infty,\infty)$上可以不满足 Lipschitz 条件，虽然 $f(t,z)$ 是满足的（看[15]的(3.4)）.

证 ($\overline{\text{Ⅰ}}$)从(Ⅰ)(第三节)，(4.9)及(4.12)直接导出.($\overline{\text{Ⅲ}}$)从(Ⅲ)（第三节），(4.10)及(4.13)直接导出. $\overline{\overline{pr}}(g(t,y))$可以不满足Lipschitz条件，简单地因为

$$\lim_{k\to\infty}(s(k+1)-s(k))=\infty,\quad \lim_{k\to-\infty}(s(k+1)-s(k))=\infty$$

有可能发生，由是据(4.1)～(4.3)及(4.13)，

$$\exp(\overline{N}(t))/\exp(\overline{\overline{N}}(t))$$

可以不是$(-\infty,\infty)$上的有界函数.

尚余证($\overline{\text{Ⅱ}}$). 事实上，如果 $t\in\langle kT+d,(k+1)T-d\rangle$，则如同(4.6)的证明中，我们有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2d}\int_{kT}^{(k+1)T} (\overline{\alpha}(t+d)-\overline{\alpha}(t-d))\,dt \\ &= \Big(1-\frac{2d}{T}\Big)(\overline{\alpha}((k+1)T)-\overline{\alpha}(kT)) \\ &\quad + \Big(\int_{kT}^{kT+d}+\int_{(k+1)T-d}^{(k+1)T}\Big)\frac{\overline{\alpha}(t+d)-\overline{\alpha}(t-d)}{2d}\,dt \\ &\geqq \overline{\alpha}((k+1)T)-\overline{\alpha}(kT)-2d\Big(\overline{\eta}+\lambda+\frac{\overline{\alpha}((k+1)T)-\overline{\alpha}(kT)}{T}\Big) \\ &\geqq \overline{\alpha}((k+1)T)-\overline{\alpha}(kT)-4d(\overline{\eta}+\lambda). \end{aligned}$$

结合这个及(4.12)，(4.7)，(4.4)与(3.2)，对于$j=1,2,\cdots,q$来说我们有

$$\int_{kT}^{(k+1)T}\mathrm{diag}_jB(t)dt=\int_{kT}^{(k+1)T}\mathrm{diag}_jA(t)dt+\int_{kT}^{(k+1)T}\left(\frac{d\bar{N}(t)}{dt}\right)dt$$

$$\leqq\bar{\alpha}((k+1)T)-(\bar{\alpha}kT)$$

$$+\int_{kT}^{(k+1)T}\frac{\bar{\beta}(t+d)-\bar{\beta}(t-d)-(\bar{\alpha}(t+d)-\bar{\alpha}(t-d))}{2d}dt$$

$$\leqq(-\lambda+2\pi)T+4d(\bar{\eta}+\lambda)\leqq(-\lambda+4\pi)T\leqq-\frac{3}{4}\lambda T.$$

这证明(4.14)。同样可证(4.15)。命题4.1证完。

对每一$u\in E^p$写

$$y_{\#}(t,u)=z_*(t,u\psi(0)^{-1})\psi(t),\quad y(t,u)=z(t,u\psi(0)^{-1})\psi(t)\tag{4.16}$$

其中 $\psi(t)$及$z_*(t,u\psi(0)^{-1}),z(t,u\psi(0)^{-1})$分别见(4.11)及(3.5)，(3.7)。显然，$y_{\#}(t,u)$及$y(t,u)$分别是方程组(#)的解及线性方程组

$$\frac{dy}{dt}=yB(t)\quad((t,y)\in(-\infty,\infty)\times E^p)\tag{4.17}$$

的解，满足$y_{\#}(0,u)=u=y(0,u)$。

对于s及t命$E_j(B;\ s,t)$为对角式$p\times p$方阵使

$$\mathrm{diag}_kE_j(B;\ s,t)=\delta_{jk}\exp\int_s^t\mathrm{diag}_kB_k(t')dt',$$

$$(j,k=1,2,\cdots,p)$$

(这里δ_{jk}表Kronecker delta))．从上述命题中($\bar{\mathrm{I}}$)及($\bar{\mathrm{II}}$)可看出无穷积分

$$\int_{-\infty}^{t}E_j(B;\ s,t)ds\qquad(j=1,2,\cdots,q);$$

$$\int_{\infty}^{t}E_j(B;\ s,t)ds=-\int_t^{\infty}E_j(B;\ s,t)ds\qquad(j=q+1,\cdots,p)$$

且存在数θ^*满足

$$0<\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\sum_{j=1,2,\ldots,p}\mathscr{N}\left(\int_{\tau_j}^{t}E_j(B;\ s,t)ds\right)\leqq\theta^*<\infty\tag{4.18}$$

其中 $\tau_j=-\infty$或∞按$j\leqq q$或$>q$而定。

据命题4.1，我们可取θ^*它仅依赖于(3.1)及(3.2)中的$\bar{\eta}$，λ及T。

对每一$t\in(-\infty,\infty)$写$B(t)=B^0(t)+B'(t)$其中$B^0(t)$是对角式$p\times p$方阵，

$$\mathrm{diag}_jB^0(t)=\mathrm{diag}_jB(t)\qquad(j=1,2,\cdots,p).$$

基于命题4.1，我们有

命题4.2 方程组(#)的解与线性方程组(4.17)的解以下述方式相关联，即：对每一$u\in E^p$存在唯一的$\Delta_{\#}(u)\in E^p$使得

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\|y(t,\Delta_{\#}(u))-y_{\#}(t,n)\|<\infty,$$

且对每一$u\in E^p$存在$(-\infty,\infty)$上唯一连续有界并取值于E^p的向量函数$\zeta_u(t)$满足

$$\zeta_u(t)=\sum_{j=1}^{p}\int_{\tau_j}^{t}(\zeta_u(s)B^1(s)+g(s,y_{\#}(s,u)))E_j(B;\ s,t)ds.$$

我们有

$$y(t,\Delta_{\#}(u))=y_{\#}(t,u)-\zeta_u(t),$$

特别地，$\Delta_{\#}(u)=u-\zeta_u(0)$。后者给出一满映射

$$\Delta_{\#}:E^p\to E^p.$$

并且 $\sup\limits_{t\in(-\infty,\infty)}\|\zeta_u(t)\|\leqq c^*$，其中

$$c^*=\theta^*\bar{\bar{\eta}}(1+2(\quad+\eta^*)\theta^*)^p,$$

θ^*，$\bar{\bar{\eta}}$，$\bar{\eta}$ 及η^*分别见(4.18)，(3.3)，(3.1)及(4.9)。故c^*可如是取，它仅依赖于$\bar{\eta}$，λ，T 及$\bar{\bar{\eta}}$（它们见（3.1)，(3.2)及(3.3))。

证明　以[6,pp.272～274]中同样方式进行。我们注意到，用于证明［6,定理3.1］的论据在目前情况下完全有效，虽然方程组(#)中的向量函数$g(t,y)$可能在$(-\infty,\infty)$上不适合Lipschitz条件（在前面($\overline{\mathrm{II}}$)中已提到过).但它在任一有限区间$\langle t_0,t_1\rangle$上都满足 Lipschitz条件，从而解$y_{\#}(t,u)$（见(4.16))对u的连续性在任一这样的区间上对t来说是一致的。

前面已经提到过θ^*可如是取，仅依赖于$\bar{\eta}$，λ及T。所以c^*可如是取，同这命题断言中所述。

据方程组(*)的性质(Ⅱ)及$\bar{\alpha}(t)$，$\bar{\bar{\alpha}}(t)$，$\bar{\beta}(t)$与$\bar{\bar{\beta}}(t)$的定义我们易检验：

$$\begin{aligned}
&0\leqq\bar{\alpha}(t)-\bar{\beta}(t)\leqq2\pi(t-s(k)T) &&(\text{对}s(k)T\leqq t<\infty),\\
&0\leqq\bar{\alpha}(t)-\bar{\beta}(t)\leqq2\pi(s(k)T-t) &&(\text{对}-\infty<t\leqq s(k)T),\\
&0\leqq\bar{\bar{\alpha}}(t)-\bar{\bar{\beta}}(t)\leqq\pi(t-s(k)T &&(\text{对}s(k)T\leqq t<\infty),\\
&0\leqq\bar{\bar{\alpha}}(t)-\bar{\bar{\beta}}(t)\leqq\pi(s(k)T-t) &&(\text{对}-\infty<t\leqq s(k)T),\\
&\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)
\end{aligned}\tag{4.19}$$

命题4.3　对每一$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$我们有：

$$\begin{aligned}
&0\leqq-\bar{N}(t)\leqq2\pi(t-s(k)T+d) &&(s(k)T\leqq t<\infty);\\
&0\leqq-\bar{N}(t)\leqq2\pi(s(k)T-t+d) &&(-\infty<t\leqq s(k)T);\\
&0\leqq-\bar{\bar{N}}(t)\leqq\pi(t-s(k)T+d) &&(s(k)T\leqq t<\infty);\\
&0\leqq-\bar{\bar{N}}(t)\leqq\pi(s(k)T-t+d) &&(-\infty<t\leqq s(k)T).
\end{aligned}$$

证明　用(4.3)，(4.4)，(4.19)及$\bar{\beta}(t)$与$\bar{\bar{\beta}}(t)$的定义。

由是从(4.11)，

$$1\leqq\mathscr{N}(\psi(s(k)T)^{-1})\leqq\exp(2\pi d)\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)\tag{4.20}$$

五、定理3.1的证明

引理5.1　对于线性方程组(3.6)[15]的一任给的解$z(t,u)$，$u\neq0\in E^p$，我们有：如果$\bar{\bar{pr}}u=0\in E^{p-q}$，则

$$\varliminf_{t\to-\infty}\frac{-1}{t}\log\|z(t,u)\|\geqq\lambda-\pi\tag{5.1}$$

如果$\bar{\bar{pr}}u\neq0\in E^{p-q}$，则

$$\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|z(t,u)\|\geqq\lambda-\pi\tag{5.2}$$

证　设$\bar{\bar{pr}}u=0$，即

$u=(u_1,u_2,\cdots,u_k,0,\cdots,0)$，$u_k\neq0$对$1\leqq k\leqq q$。因为如(Ⅰ)(第三节)中所述，$A(t)$是三角

式方阵，其对角线以上的系数都是0；故$z(t,u)$的第k个坐标是

$$u_k \exp\int_0^t \mathrm{diag}_k A(s)\,ds.$$

但从(Ⅱ)(第三节)，

$$\frac{1}{m}\sum_{\tau=0}^{m-1}\min_{j=1,2,\cdots,q}\frac{1}{T}\int_{\tau\delta T}^{(\tau+1)\delta T}\mathrm{diag}_j A(s(0)T+t)\,dt$$

$$=\frac{-1}{m}\sum_{\tau=0}^{m-1}\max_{j=1,2,\cdots,q}\frac{1}{\delta T}\int_{\tau\delta T}^{(\tau+1)\delta T}\mathrm{diag}_j A(s(0)T+t)\,dt$$

$$\geqq \lambda-\pi$$

对于$\delta=-1$；$m=1,2,3,\cdots$. 故

$$\frac{1}{m}\sum_{\tau=0}^{m-1}\frac{1}{T}\int_{\tau\delta T}^{(\tau+1)\delta T}\mathrm{diag}_k A(t)\geqq\lambda-\pi,$$

$\delta=-1, m=1,2,3,\cdots$，结合这个及(3.1)易得出(5.1)。

要证 (5.2) 对$\overline{\overline{pr}}u\neq 0$先注意

$$\|z(t,u)\|\geqq\|\overline{\overline{pr}}z(t,u)\| \tag{5.3}$$

再因$A(t)$对每一t都是三角式的，且对角线以上的系数都是0，$\overline{\overline{pr}}z(t,u)$满足

$$\frac{d\,\overline{\overline{pr}}(z(t,u))}{dt}=\overline{\overline{pr}}(z(t,u))\overline{\overline{A}}(t),$$

$0\leqq t<\infty$，而$\overline{\overline{pr}}(z(0,u))=\overline{\overline{pr}}u$.所以用(Ⅱ)(第三节)及(5.3)，与上述用来证(5.1)相类似的办法即给出 (5.2) 对于$\overline{\overline{pr}}u\neq 0$。这证完引理。

定理3.1的证明 对每一$u\in E^p$命

$$\Delta_*(u)=(\Delta_\#(u\psi(0)))\psi(0)^{-1}\in E^p,$$

其中 $\psi(0):E^p\to E^p$及$\Delta_\#:E^p\to E^p$分别见(4.11)及命题4.2. 我们于是得出满自映射

$$\Delta_*:E^p\to E^p.$$

但$y_\#(t,u\psi(0))\psi(t)^{-1}$及$y(t,\Delta_\#(u)\psi(0))\psi(t)^{-1}$分别是(*)及(3.6)的解

$$z_*(t,u)\text{及}z(t,\Delta_*(u)).$$

所以，据(4.11)，(4.20)及命题4.2，

$$\|z(t,\Delta_*(u))-z_*(t,u)\|\leqq c^*\exp(2\pi d)$$

对$t=s(k)T$，$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$. 换言之，$z(t,\Delta_*(u))$与$z_*(t,u)$点式有界。

要完成定理的证明，尚余证：如果对于一给定的$\bar{u}\in E^p$，(3.6)的解$z(t,\bar{u})$与 $z_*(t,u)$ 点式有界，即，存在一双向整数叙列

$$\cdots<m(-3)<m(-2)<m(-1)<0=m(0)$$
$$<m(1)<m(2)<m(3)<\cdots$$

使得

$$\sup_{k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots}\|z(m(k)T,\bar{u})-z_*(m(k)T,u)\|\leqq b_*<\infty,$$

则$\bar{u}=\Delta_*(u)$. 事实上，再用(4.11)及命题4.2并在命题4.3中置$k=0$我们就有

$$\|z(t,\Delta_*(u))-z_*(t,u)\|\leqq c^*\exp(2\pi(|t|+d)),\ t\in(-\infty,\infty).$$

由是 $$\|z(m(k)T,\bar{u}-\Delta_*(u))\|=\|z(m(k)T,\bar{u})-z_*(m(k)T,u)\|$$
$$+\|z_*(m(k)T,u)-z(m(k)T,\Delta_*(u))\|$$

$$\leq b^* + c^* \exp(2\pi(|m(k)|T+d) \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots).$$

所以，若$\bar{u}-\Delta_*(u) \neq 0$，则

$$\lim_{k\to\pm\infty} \frac{1}{|m(k)T|} \log \|z(m(k)T, \bar{u}-\Delta_*(u))\|$$

$$=2\pi \leq \lambda/8$$

（看(3.2)），这与引理5.1矛盾．定理3.1证完．

从(4.11)，(4.20)及命题4.2我们有

系5.1 对任一$u\in E^p$，（$*$）与(3.6)的解$z_*(t,u)$及$z(t,\Delta_*(u))$满足

$$\|z(t,\Delta_*(u))-z_*(t,u)\| \leq c^*\exp(2\pi|t-s(k)T|+d)$$

对所有$t\in(-\infty,\infty)$及$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$.

假定对于$\bar{u}$及$u\in E^p$及$t_0<t_1<t_0+T$我们有

$$\|z(t,\bar{u})-z_*(t,u)\|>0 \text{对于} t_0\leq t\leq t_1.$$

则据(3.1)及(3.3)，

$$\frac{d}{dt}\|z(t,\bar{u})-z_*(t,u)\|$$

$$=((z(t,\bar{u})-z_*(t,u))A(t)-f(t,z_*(t,u)))$$

$$\cdot((z(t,\bar{u})-z_*(t,u))/\|z(t,\bar{u})-z_*(t,u)\|),$$

这蕴涵

$$\|z(t,\bar{u})-z_*(t,u)\| \leq \|z(t_0,\bar{u})-z_*(t_0,u)\|$$

$$+\int_{t_0}^{t}(\bar{\eta}\|z(t',\bar{u})-z_*(t',u)\|+\bar{\bar{\eta}})dt' \qquad (t_0\leq t\leq t_1).$$

所以应用Gronwall引理[14,p.40]我们有

$$\|z(t,\bar{u})-z_*(t,u)\| \leq (\bar{\bar{\eta}}T+\|z(t_0.\bar{u})-z_*(t_0,u)\|)\exp(\bar{\eta}T),$$

$$(t_0\leq t\leq t_1)$$

由是见于定理3.1中的映射Δ_*可以较广的方式来定义，如下所述．

系5.2 设对于$\bar{u}$及$u\in E^p$有一双向叙列的数$\{s(k)\}=\{s(k;\ \bar{u},u)\}$使得

$$\cdots<s(-3)<s(-2)<s(-1)<s(0)=0$$

$$<s(1)<s(2)<s(3)<\cdots,$$

$$\lim_{k\to\infty}s(k)=\infty,\ \lim_{k\to-\infty}s(k)=-\infty$$

且使得

$$\sup_{k=0,\pm1,\pm2,\pm2,\ldots}\|z(s(k),\bar{u})-z_*(s(k),u)\|<\infty.$$

则$\bar{u}=\Delta_*(u)$．

记ρ为关于方程组($*$)的Lipschitz常数(3.4)．为方便，我们称类型如($*$)的方程组为一方程组E

$$\mathfrak{M}(\bar{\eta},\bar{\bar{\eta}},\rho,\lambda,T;\ q)$$

其中 $\bar{\eta}$，$\bar{\bar{\eta}}$等见(3.1)～(3.4)（对于给定的p）．（$*$）的性质(Ⅱ)将引述为对一双向单调上升的整数叙列$\{s(k)\}$来说的假双曲分裂性质．显然，（$*$）可以对不同的整数叙列具有这样的性质．

我们说，$\mathfrak{M}(\bar{\eta},\bar{\bar{\eta}},\rho,\lambda,T;\ q)$中一叙列的方程组$\{(Z_i)\}$

$$(Z_i)\qquad \frac{dz}{dt}=zA_i(t)+f_i(t,z)\qquad ((t,z)\in(-\infty,\infty)\times E^p),$$

收敛到$\mathfrak{M}(\bar{\eta},\bar{\bar{\eta}},\rho,\lambda,T;\ q)$中一方程组

$$(Z_*)\qquad \frac{dz}{dt}=zA_*(t)+f_*(t,z)\qquad ((t,z)\in(-\infty,\infty)\times E^p),$$

如果$\lim\limits_{i\to\infty}A_i(t)=A_*(t)$，$\lim\limits_{i\to\infty}f_i(t,z)=f_*(t,z)$，且这里第一个收敛式对$(-\infty,\infty)$中任给的有限区间中的所有$t$来说是一致的，第二个收敛式对$(-\infty,\infty)\times E^p$中一任给的紧致域中的所有点$(t,z)$来说也是一致的。假定每个$(Z_i)$对于某一双向单调上升整数叙列$\{s_i(k)\}$具有假双曲分裂性质，同时也假定$(Z_*)$对于某一双向单调上升整数叙列$\{s_*(k)\}$具有假双曲分裂性质。

依照定理3.1，对每一i存在一满映射

$$\Delta_i: E^p\to E^p$$

使得对每一$u\in E^p$，线性方程组

$$\frac{dz}{dt}=zA_i(t),\ (t,z)\in(-\infty,\infty)\times E^p$$

取初值为$\Delta_i(u)$的解与(Z_i)取初值为u的解点式有界。同时也存在一满映射

$$\Delta_*: E^p\to E^p$$

使得对每一$u\in E^p$，线性方程组

$$\frac{dz}{dt}=zA_*(t),\ (t,z)\in(-\infty,\infty)\times E^p$$

取初值为$\Delta_*(u)$的解与(Z_*)取初值为u的解点式有界。

命题5.1　命$\mathfrak{M}(\bar{\eta},\bar{\bar{\eta}},\rho,\lambda,T;\ q)$中一叙列$\{(Z_i)\}$与一方程组$(Z_*)$以及整数叙列$\{s_i(k)\}$与$\{s_*(k)\}$给出如上。假设$\{(Z_i)\}$收敛到$(Z_*)$。进一步假设双向整数叙列$\{s_i(k)\}$及$\{s_*(k)\}$满足条件

(**)对每一整数$k_*\geqq 1$存在一整数$i(k_*)\geqq 1$使得只要$i\geqq i(k_*)$，即有

$$s_i(k)=s_*(k)\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm k_*).$$

在这些假设下，如果$\{z_i\}$是E^p中一叙列使得

$$\lim_{i\to\infty}z_i=\bar{z}\in E^p,$$

我们就有$\lim\limits_{i\to\infty}\Delta_i(z_i)=\Delta_*(\bar{z})$。

证　依照展现于第四节中的方式，对每个(Z_i)作变数变换

$$z\mapsto y=z\psi_i(t)$$

其中　$\psi_i(t)$为方阵，其构造法与见于(4.11)中的，恰切类同。于是(Z_i)换成一方程组

$$(Y_i)\qquad \frac{dy}{dt}=yB_i(t)+g_i(t,y)\qquad ((t,y)\in(-\infty,\infty)\times E^p).$$

同样，对(Z_*)作变数变换

$$z\mapsto y=z\psi_*(t)$$

把(Z_*)换成

$$(Y_*)\qquad \frac{dy}{dt}=yB_*(t)+g_*(t,y)\qquad ((t,y)\in(-\infty,\infty)\times E^p).$$

如同第四节中，(Y_i)及(Y_*)都是满足命题4.1要求（对于同样的$\bar{\eta},\eta^*,\bar{\bar{\eta}},\lambda,T,q$）的方程组，因为$(Z_i)$及$(Z_*)$都$\in\mathfrak{M}(\bar{\eta},\bar{\bar{\eta}},\rho,\lambda,T;\ q)$）。如同(4.20)我们有

$$1\leqq\exp(\mathscr{N}(\psi_i(s_i(k)T)^{-1})\leqq\exp(2\pi d),$$
$$1\leqq\exp(\mathscr{N}(\psi_{\#}(s_{\#}(k)T)^{-1})\leqq\exp(2\pi d),$$
$$(i=1,2,3,\cdots;\ k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots).$$

在上面所述的假设(＊＊)下，我们易检验对于每一t和每一(t,y)有

$$\lim_{i\to\infty}\psi_i(t)=\psi_{\#}(t),\ \lim_{i\to\infty}B_i(t)=B_{\#}(t),$$
$$\lim_{i\to\infty}g_i(t,y)=g_{\#}(t,y),$$

这里前两个收敛式对于$(-\infty,\infty)$中任一个有限区间中所有的t都具有一致性，而第三个则对于$(-\infty,\infty)\times E^p$中任一紧致域中所有的$(t,y)$具有一致性．这样，我们可应用［6,定理3.3］证明中的同样方法到目前的叙列$\{(Y_i)\}$及方程组$(Y_{\#})$，并最后得出命题5.1的证明．

注 命题5.1仍然成立，即令没有(＊＊)这假定．验证留给读者．

六、主要定理的证明

命从K的底空间W中每一点x与$\mathscr{L}_n(K)$中由K的纤维E_x所决定的点$[E_x]$等同．这样来，$\mathscr{L}_n(K)$与W等同，而变换群$\varphi_t:\mathscr{L}_n(K)\to\mathscr{L}_n(K)$也将与原给在$K$上的单参变换群相一致．映射(2.1)将重写作

$$\xi:\mathscr{F}_n^{\#}(K)\to W.$$

命$\nu\in I(W,\varphi_t)$(W上所有遍历φ_t-不变概率测度作成的集合）给定同第二节中．按照[4]我们可取$\mu\in I(\mathscr{F}_n^{\#}(K),\ \chi_t^{\#})$使

$$\xi_*(\mu)=\nu$$

且$\vartheta_1(\mu,K)\leqq\vartheta_2(\mu,K)\leqq\cdots\leqq\vartheta_n(K)$，其中

$$\vartheta_j(\mu,K)=\int_{\mathscr{F}_n^{\#}(K)}\omega_j(\gamma,K)\mu(d\gamma),$$

$j=1,2,\cdots,n$（看第二节）．简写

$$\sigma_j=\vartheta_j(\mu,K).$$

设W中遍历集$\varepsilon(\nu)$(＝见于第二节的$L_n(\nu)$)是Φ_t-非一致双曲的，即

$$\sigma_j\neq0\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

(看[4],[7])．给定一数$\lambda>0$使

$$\sigma_q<-\lambda,\ \sigma_{q+1}>\lambda.$$

对于数列$\sigma_1\leqq\sigma_2\leqq\cdots\leqq\sigma_q<\sigma_{q+1}\leqq\cdots\leqq\sigma_n$，考虑给在第二节中$\mathscr{F}_n^{\#}(K)$的子集$\Theta(\sigma(n))$及$\Lambda(\sigma(n))$．

引理6.1 对每一$\gamma\in\Theta(\sigma(n))$对应一整数$c=c(\gamma)\geqq1$及一双向整数叙列$\{s(k)\}=\{s(k,\gamma)\}$满足

$$\cdots<s(-3)<s(-2)<s(-1)<0=s(0)$$
$$<s(1)<s(2)<s(3)<\cdots\tag{6.1}$$

且使得对于$\pi=\min\{1,\lambda\}/16$，我们有：

$$-\lambda \leqq \frac{1}{m}\sum_{\tau=0}^{m-1}\max\left\{-\lambda, \max_{j=1,2,\cdots,q}\frac{1}{\delta T}\int_{\tau\delta T}^{(\tau+1)\delta T}\omega_j(\chi_t^{\#}\ \chi_{s(k)T}^{\#}(\gamma,K))dt\right.$$

$$\leqq -\lambda+\pi/2 \tag{6.2}$$

$$\lambda-\pi/2 \leqq \frac{1}{m}\sum_{\tau=0}^{m-1}\min\left\{\lambda, \min_{j=q+1,\cdots,p}\frac{1}{\delta T}\int_{\tau\delta T}^{(\tau+1)\delta T}\omega_j(\chi_t^{\#}\ \chi_{s(k)T}^{\#}(\gamma,K))dt\right.$$

$$\leqq \lambda \tag{6.3}$$

其中

$$T=T_{c(\gamma)}(\text{见[15]的(2.2)});\ s(k)=s(k,\gamma);\ \delta=-1,1;$$

$$(m=1,2,3,\cdots;\ k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots) \tag{6.4}$$

证 据$\Theta(\sigma(n))$的定义，对每一 $\gamma\in\Theta(\sigma(n))$ 有一整数 $c=c(\gamma)\geqq 1$ 及一双向整数叙列$\{s(k)\}=\{s(k,\gamma)\}$满足(6.1)且使得对于$\pi=\min\{1,\lambda\}/16$，我们有：

$$\frac{1}{m}\sum_{\tau=0}^{m-1}\max_{j=1,2,\cdots,n}\left|\sigma_j-\frac{1}{\delta T}\int_{\tau\delta T}^{(\tau+1)\delta T}\omega_j(\chi_t^{\#}\ \chi_{s(k)T}^{\#}(\gamma),K)dt\right|\leqq\pi/2 \tag{6.5}$$

这里同(6.4)中,$T=T_{c(\gamma)}$; $s(k)=s(k,\gamma)$; $(\delta=-1,1,m=1.2,3,\cdots;\ k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$。但

$$\frac{1}{m}\sum_{\tau=0}^{m-1}\max_{j=1,2,\cdots,q}\left(\frac{1}{\delta T}\int_{\tau\delta T}^{(\tau+1)\delta T}\omega_j(\chi_t^{\#}\ \chi_{s(k)T}^{\#}(\gamma),k)dt-\sigma_q\right)$$

及

$$\frac{1}{m}\sum_{\tau=0}^{m-1}\max_{j=q+,\cdots,n}\left(\sigma_{q+1}-\frac{1}{\delta T}\int_{\tau\delta T}^{(\tau+1)\delta T}\omega_j(\chi_t^{\#}\chi_{s(k)T}^{\#}(\gamma),K)dt\right)$$

两者都$\leqq$(6.5)式的右端。故(6.2)及(6.3)成立。这证明引理。

引理6.2 命λ及π同引理6.1中。设$\mu(\Lambda(\sigma(n)))>0$。则 $\mathscr{F}_n^{\#}(K)$ 有一闭子集$\bar{\boldsymbol{\Omega}}$满足下述(a)～(b)：

(a) $\bar{\boldsymbol{\Omega}}\subset\Omega(\sigma(n))$(见[15]中定理2.4)，$\mu(\bar{\boldsymbol{\Omega}})>0$；

(b) 存在一不依赖于$\gamma\in\bar{\boldsymbol{\Omega}}$的整数$\bar{c}>1$且对于每一$\gamma\in\bar{\boldsymbol{\Omega}}$存在一双向整数叙列$\{s(k,\gamma)\}$使得(6.1)～(6.3)成立对于$T=T_{\bar{c}}$ (见 (2.2))，$s(k)=s(k,\gamma)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$，$m=1,2,3,\cdots$及$\delta=-1,1$。

证 对$\eta=\pi/2$命

$$F(\eta)=\bigcap_{i=1,2,3,\cdots}F(\eta,\phi_i)$$

给出同定理2.1证明中。因为$\mu(F(\eta)\cap\Omega(\sigma(\eta)))\geqq 1/4$，我们可选取一整数$\bar{c}=c(i,\eta)\geqq 1$ 对某一$i>1$使得$\mathscr{F}_n^{\#}(K)$有一闭子集$\bar{\boldsymbol{\Omega}}\subset F(\eta,\phi_i)\cap\Omega(\sigma(\eta))$并满足$\mu(\bar{\boldsymbol{\Omega}})>0$。这个$\bar{c}$将满足这引理的要求。

对每一 $\gamma\in\mathscr{F}_n^{\#}(K)$考虑给在本文附录中的线性微分方程组

$$(Z_\gamma)\qquad \frac{dz}{dt}=zR_\gamma(t)^{tr}\qquad ((t,z)\in(-\infty,\infty)\times E^n).$$

如同彼处所述，$R_\gamma(t)$对每一t都是$n\times n$三角式方阵，其对角线系数

$$\mathrm{diag}_j R_\gamma(t)=\omega_j(\chi_t^{\#}(\gamma),K)\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

对角线以下的系数都是0；$R_\gamma(t)$作为$(t,\gamma)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_n^\#(K)$的函数是连续的，且有界

$$\sup_{(t,\gamma)\in(-\infty),\infty\times\mathscr{F}_n^\#(K)}\mathscr{N}(R_\gamma(t)^{tr})\leqq\bar{\eta}/2<\infty \tag{6.6}$$

命$\Psi_t(-\infty<t<\infty)$为一Φ_t-可容许扰动．如同附录中所述，对应于这扰动，对每一$\gamma\in\mathscr{F}_n^\#(K)$有一微分方程组

$$(Z_\gamma(\Psi_t))\qquad \frac{dz}{dt}=zR_\gamma(t)+f_\gamma(t,z)\qquad((t,z)\in(-\infty,\infty)\times E^n);$$

$f_\gamma(t,z)$作为$(t,z,\gamma)\in(-\infty,\infty)\times E^n\times\mathscr{F}_n^\#(K)$的函数是连续的，且有界

$$\sup_{(t,z,\gamma)\in(-\infty,\infty)\times E^n\times\mathscr{F}_n^\#(K)}\|f_\gamma(t,z)\|\leqq\bar{\eta}/2<\infty \tag{6.7}$$

并且有一Lipschitz常数ρ

$$\|f_\gamma(t,z)-f_\gamma(t,z')\|\leqq\rho\|z-z'\| \tag{6.8}$$

对所有(t,z,γ)及$(t,z',\gamma)\in(-\infty,\infty)\times E^n\times\mathscr{F}_n^\#(K)$.

主要定理的证明 有了上面的预备，特别是引理6.1，我们看到，对每一$\gamma\in\Theta(\sigma(n))$微分方程组$(Z_\gamma(\Psi_t))$是第三节中所考虑的$(*)$这一类型的方程组．命$z_\gamma(t,z)$及$z_\gamma^*(t,z)$分别是$(Z_\gamma)$及$(Z_\gamma(\Psi_t))$的解使$z_\gamma(0,z)=z=z_\gamma^*(0,z)$．于是按照定理3.1，对每一$z\in E^n$有唯一的$\Delta_\gamma(z)\in E^n$使得$z_\gamma(t,\Delta_\gamma(u))$与$z_\gamma^*(t,z)$点式有界，且$z\mapsto\Delta_\gamma(z)$给出一满映射

$$\Delta_\gamma: E^n\to E^n.$$

我们还注意，给在附录中的映射$P_{t,\gamma}$把E^n同构映到K中由$\chi_t^\#(\gamma)$的n个向量所张的纤维上．因$\chi_t^\#(\gamma)\in\mathscr{F}_n^\#(K)$，$P_{t,\gamma}$保持内积．所以，

$$P_{t,\gamma}(z_\gamma(t,z))=\Phi_t(P_{0,\gamma}(z)),$$
$$P_{t,\gamma}(z_\gamma^*(t,z))=\Psi_t(P_{0,\gamma}(z)),$$

而经过$P_{0,\gamma}(\Delta_\gamma(z))$的$\Phi_t$-轨线与经过$P_{0,\gamma}(z)$的$\Psi_t$-轨线点式有界．并且，再用定理3.1加上系5.2我们看出，如果$\bar{u}$和$P_{0,\gamma}(z)$是K中同一纤维中的点而经过$\bar{u}$的Φ_t-轨线与经过$P_{0,\gamma}(z)$的Ψ_t-轨线点式有界，则$\bar{u}=P_{0,\gamma}(\Delta_\gamma(z))$.

据命题2.3，$\mu(\Lambda(\sigma(n)))>0$．所以，如定理2.1中所述，$\Theta(\sigma(n))$含有$\mathscr{F}_n^\#(K)$的一$\chi_t^\#$-不变Borel子集$\Omega(\sigma(n))$具有$\mu(\Omega(\sigma(n)))=1$．我们于是取$\mathscr{F}_n^\#(K)$的一闭子集$\bar{\Omega}$具有引理6.2所述的(a)～(b)．

写

$$D_k=\varepsilon(v)\cap(\cup_{t\in(-k,k)}\varphi_t(\xi(\bar{\Omega})))\qquad(k=0,1,2,3,\cdots)$$

因$\mathscr{F}_n^\#(K)$紧致，$\varphi_t(-\infty<t<\infty)$是$W$上一单参变换群而$\nu=\xi_*(\mu)$，由是

$$\mathscr{D}=\bigcup_{k=0,1,2,3,\cdots}D_k$$

是W的一$\chi_t^\#$-不变的Borel子集具有

$$\nu(\mathscr{D})>0.$$

但ν是遍历的，而$\nu(\varepsilon(\nu))=1$对于ν的遍历集$\varepsilon(\nu)$．故

$$\nu(\mathscr{D})=1.$$

据D_k的定义，我们看出

$$D_k\subset\xi(\cup_{t\in(-k,k)}\chi_t^\#(\bar{\Omega}))$$

由是部份从$K|\mathscr{D}$的每一纤维都由$\Theta(\sigma(n))$中一标架的n个向量张成。这样来，用我们已经在上段对于映射Δ_γ刚才证明过的，我们可得出结论：如果$u\in K|\mathscr{D}$，则存在唯一的

$$\Delta(u)\in K|\mathscr{D}$$

满足主要定理结论中的要求(a)。这仅仅需要选取某些$\gamma\in\Theta(\sigma(n))$及$z\in E^n$使得

$$u=P_{0,\gamma}(z)\text{及}\Delta(u)=P_{0,\gamma}(\Delta_\gamma(z)).$$

（看附录关于这步骤的细节。）进一步再用定理3.1及引理6.1 我们立即看出这样得出的自函数

$$\Delta: K|\mathscr{D}\to K|\mathscr{D}$$

满足主要定理结论中的要求(b_1)及(b_2)。

要完成这定理的证明，尚余证Δ满足(b_3)。为此，我们需要

引理6.3　自函数$\Delta: K|\mathscr{D}\to K|\mathscr{D}$当限制在$K|D_0$上时，是连续的。

基于此引理，我们可验证(b_3)。事实上，对每一$k=1,2,3,\cdots,K|D_k$显然是$K|\mathscr{D}$的一闭子集，而据(b_1)及(b_2)我们有

$$\Delta(K|D_k)=K|D_k\text{及}\Delta^{-1}(K|D_k)=K|D_k.$$

故为我们的目的，只须证：如果F是K的闭子集，则$\Delta^{-1}(F\cap K|D_k)$在$K|D_k$中闭（例如，参看[11,p.70]）。但这可直接从(b_2)及这引理导出，因为$\Phi_t(-\infty<t<\infty)$及$\Psi_t(-\infty<t<\infty)$是K上的单参变换群，而$K|D_0$在$K|\mathscr{D}$中闭。这验证了(b_3)。

现在，我们来给

引理6.3的证明　命$\{u_i\}$为$K|D_0$中一叙列，它收敛到$\bar{u}\in K|D_0$。我们需证$\{\Delta(u_i)\}$收敛到$\Delta(\bar{u})$。因为Δ把$K|D_0$的每一纤维映到其自身上，而$D_0\subset\bar{\boldsymbol{\Omega}}$，我们可假定：对于某些$\bar{\gamma}$及$\gamma(i)\in\bar{\boldsymbol{\Omega}}$来说，$\bar{u}$及$\Delta(\bar{u})\in K|\xi(\bar{\gamma})$（$=K$在$\xi(\bar{\gamma})$处的纤维）而$u_i$及$\Delta(u_i)\in K|\xi(\gamma(i))$（$i=1,2,3,\cdots$）。

因为$\bar{\boldsymbol{\Omega}}$是紧致的，$\{\gamma(i)\}$的每一子叙列都有一收敛子叙列，而每个如此的收敛子叙列都会收敛到某个$\bar{\bar{\gamma}}\in\bar{\boldsymbol{\Omega}}$使得$\xi(\bar{\bar{\gamma}})=\xi(\bar{\gamma})$。这是因为$\{u_i\}$收敛到$\bar{u}$。这样来，对于我们的目的来说，不失一般性可假定$\{\gamma(i)\}$自身收敛到$\bar{\gamma}$，从而去证明$\{\Delta(u_i)\}$收敛到$\Delta(\bar{u})$。但依照附录中的论据，我们有$\bar{z}$及$z_i$及$E^n(i=1,2,3,\cdots)$，使得

$$P_{0,\bar{\gamma}}(\bar{z})=\bar{u},\quad P_{0,\gamma(i)}(z_i)=u_i,$$

$$\lim_{i\to\infty}z_i=\bar{z}.$$

余下须证的是

$$\lim_{i\to\infty}\Delta_{\gamma(i)}(z_i)=\Delta_{\bar{\gamma}}(\bar{z}).\tag{6.9}$$

我们将利用引理6.2。命$T=T_{\bar{z}}$，整数叙列$\{s(k,\bar{\gamma})\}$及$\{s(k,\gamma(i)\}$给出同这引理中使得(6.1)～(6.3)成立对于$\{s(k)\}=\{s(k,\bar{\gamma}\}$或$\{s(k,\gamma(i)\}(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$。

我们断言对任给定的$k_*\geqq1$，存在一整数$i(k_*)\geqq1$具有下述性质，即：只要$i\geqq i(k_*)$，就有一整数叙列

$$\begin{aligned}\cdots&<\bar{s}(-3,\gamma(i))<\bar{s}(-2,\gamma(i))<\bar{s}(-1,\gamma(i))<0\\&=\bar{s}(0,\gamma(i))<\bar{s}(1,\gamma(i))<\bar{s}(2,\gamma(i))<\bar{s}(3,\gamma(i))<\cdots,\end{aligned}$$

使得

$$s(k,\gamma(i))=s(k,\bar{\gamma})\qquad(\text{对}k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm k_*)\tag{6.10}$$

且使得对$m=1,2,3,\cdots$，及$\delta=-1,1$我们有

$$-\lambda\leqq\frac{1}{m}\sum_{\tau=\iota}^{m-1}\max\left\{-\lambda,\ \max_{j=1,2,\cdots,q}\left\{\frac{1}{\delta T}\int_{\tau\delta T}^{(\tau+1)T\delta}\mathrm{diag}_j R_{\gamma(i)}(s(k)T+t)dt\right\}\right\}$$

$$\leqq-\lambda+\pi$$

及

$$\lambda-\pi\leqq\frac{1}{m}\sum_{\tau=0}^{m-1}\min\left\{\lambda,\ \min_{j=q+1,\cdots,n}\left\{\frac{1}{\delta T}\int_{\tau\delta T}^{(\tau+1)\delta T}\mathrm{diag}_j R_{\gamma(i)}(s(k)T+t)dt\right\}\right\}$$

$$\leqq\lambda\qquad(s(k)=\bar{s}(k,\gamma(i));\ k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)\tag{6.11}$$

事实上，依据引理6.1及6.2对于$\gamma=\bar{\gamma}$或$\gamma=\gamma(i)$ $(i=1,2,3,\cdots)$我们有

$$\frac{1}{mT}\sum_{\tau=0}^{m-1}\max_{j=1,2,\cdots,q}\int_{\tau T}^{(\tau+1)T}\mathrm{diag}_j R_\gamma(s(k_*)T+t)dt$$

$$\leqq\frac{1}{mT}\left(\sum_{\tau=0}^{k_*+m-1}\max_{j=1,2,\cdots,q}\int_{\tau T}^{(\tau+1)T}\mathrm{diag}_j R_\gamma(t)dt+k_*T\bar{\eta}\right)$$

$$\leqq\frac{1}{(k_*+m)T}\sum_{\tau=0}^{k_*+m-1}\max_{j=1,2,\cdots,q}\int_{\tau T}^{(\tau+1)T}\mathrm{diag}_j R_\gamma(t)dt$$

$$+\frac{k_*\bar{\eta}}{m}+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{k_*+m}\right)(k_*+m)\bar{\eta}$$

$$=\frac{1}{(k_*+m)T}\sum_{\tau=0}^{k_*+m-1}\max_{j=1,2,\cdots,q}\int_{\tau T}^{(\tau+1)T}\mathrm{diag}_j R_\gamma(t)dt+\frac{2k_*\bar{\eta}}{m}$$

$$(m=1,2,3,\cdots)\tag{6.12}$$

明显地，如果$m\geqq$一充分大的$k_\#\geqq k_*+1$，则$2k_*\bar{\eta}/m\leqq\pi/2$。但从前面已提到过的$R_\gamma(t)^{tr}$对$(t,\gamma)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}^\#_*(K)$的连续性，存在$i(k_*)$使得：如果$i\geqq i(k_*)$，则

$$\left|\frac{1}{T}\int_{\tau T}^{(\tau+1)T}(\mathrm{diag}_j R_{\gamma(i)}(t)-\mathrm{diag}_j R_{\bar{\gamma}}(t))dt\right|$$

$$\leqq\pi/2\qquad(j=1,2,\cdots,q;\ \tau=0,1,2,\cdots,k_\#).$$

这些以及(6.2)对于$s(k)=s(k,\gamma(i))$或$s(k,\bar{\gamma})$与(6.12)给出下述结论：如果$i\geqq i(k_*)$且如果

$$\bar{s}(k,\gamma(i))=\begin{cases}\bar{s}(k,\bar{\gamma}) & (\text{对}k=0,1,2,\cdots,k_*),\\ s(k-k_*+i_\gamma,\gamma(i)) & (\text{对}k>k_*)\end{cases}$$

其中 i_γ表示一整数使$s(i_\gamma,\gamma(i))\geqq\bar{s}(k_*,\bar{\gamma})$，则我们得出一整数叙列满足(6.10)及(6.11)的部份要求。显然，类似论据可用来得出一$i(k_*)$满足我们断言中的全部要求。

从附录中的论据我们有

$$\lim_{i\to\infty}R_{\gamma(i)}(t)=R_{\bar{\gamma}}(t),\ \lim_{i\to\infty}f_{\gamma(i)}(t,z)=f_{\bar{\gamma}}(t,z),$$

并且这里第一个收敛式对$(-\infty,\infty)$中任给的一有限区间中的所有t来说是一致的，而第二个则对$(-\infty,\infty)\times E^n$中任给的紧致域中所有$(t,z)$来说也是一致的。这样来，据(6.6)～(6.8)及上述讨论，$\{(Z_{\gamma(i)}(\Psi_\epsilon))\}$是$\mathfrak{M}(\bar{\eta},\bar{\bar{\eta}},\rho,\lambda,T;q)$(意义见第五节)中一微分方程组叙列，它收敛到$(Z_{\bar{\gamma}}(\Psi_\epsilon))\in\mathfrak{M}(\bar{\eta},\bar{\bar{\eta}},\rho,\lambda,T;q)$。于是我们可用命题5.1得出(6.9)成立这结论。这证

明引理6.3，也完成本文主要定理的证明。

附　录

据$\Phi_t:\mathcal{U}_p(K)\to\mathcal{U}_p(K)$ 及 $\chi_t^{\#}:\mathcal{F}_p^{\#}(K)\to\mathcal{F}_p^{\#}(K)$ 的定义 [4,p.283]，对每一 $(t,\gamma)\in(-\infty,\infty)\times\mathcal{F}_p^{\#}(K)$可写

$$\Phi_t(\gamma)=\chi_t^{\#}(\gamma)C_\gamma(t),$$

这里$C_\gamma(t)$是三角式$p\times p$方阵，其对角线系数是

$$\operatorname{diag}_k C_\gamma(t)=\|\operatorname{proj}_k\chi_t(\gamma)\|>0 \qquad (k=1,2,\cdots,p),$$

对角线以下的系数都是 0(右端是$\chi_t^{\#}(\gamma)$的向量列乘$C_\gamma(t)$的行如通常)。明显地，

$$C_\gamma(s+t)=C_{\chi_s^{\#}(\gamma)}(t)C_\gamma(s),\ C_\gamma(0)=I_p.$$

命题 对所有 $\gamma\in\mathcal{F}_p^{\#}(K)$，$C_\gamma(t)$对$t$可微，而

$$\frac{d}{dt}C_\gamma(t)\ \Big|_{t=0}$$

作为$\gamma\in\mathcal{F}_p^{\#}(K)$的函数是连续的。

证 首先回顾，K上的变换群$\Phi_t(-\infty<t<\infty)$原本假定满足可微条件：对$k=1,2,\cdots,p(p=1,2,\cdots,n)$函数$\|\operatorname{proj}_k\chi_t(\gamma)\|$对$t\in(-\infty,\infty)$可微，且

$$\omega_k(\gamma,K)=\frac{d\|\operatorname{proj}_k\chi_t(\gamma)\|}{dt}\Big|_{t=0}$$

对$\gamma\in\mathcal{F}_p(K)$连续[4,p.284]。我们于是看到，对任一$u\in K$，$\|\Phi(u)\|$对$t$可微且

$$\frac{d\|\Phi_t(y)\|}{dt}\Big|_{t=0}$$

对u连续（把u看作是1标架若$u\neq0$）。因而若u及$v\in K$的同一纤维内，则

$$\langle\Phi_t(u),\ \Phi_t(v)\rangle=(\|\Phi_t(u+v)\|^2-\|\Phi_t(u)\|^2-\|\Phi_t(v)\|^2)/2$$

也对t可微。

这样来，如果$\gamma=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_p)\in\mathcal{F}_p^{\#}(K)$，则因 $\chi_t^{\#}(\gamma)$对所有t都是正规标架，

$$C_\gamma(t)=\chi_t^{\#}(\chi)^{tr}\Phi_t(\gamma)$$

这蕴涵

$$C_\gamma(t)^{tr}\cdot C_\gamma(t)=\Phi_t(\gamma)^{tr}\cdot\Phi_t(\gamma)=(\langle\Phi_t(u_i),\ \Phi_t(u_j)\rangle).$$

因为对于每对$(i,\ j)$，$\langle\Phi_t(u_i),\ \Phi_t(u_j)\rangle$对$t$可微，且从上述讨论我们易看出

$$\frac{d}{dt}\langle\Phi_t(u_i),\ \Phi_t(u_j)\rangle\Big|_{t=0}$$

对于每对$(i,\ j)$都是$\gamma\in\mathcal{F}_p^{\#}(K)$的连续函数，于是我们得出对$\gamma\in\mathcal{F}_p^{\#}(K)$连续的方阵函数

$$\frac{d}{dt}(C_\gamma(t)^{tr}\cdot C_\gamma(t))\Big|_{t=0}.$$

对于每一$(t,\ \gamma)\in(-\infty,\ \infty)\times\mathcal{F}_p^{\#}(K)$我们可写

$$C_\gamma(t)=(C_{jk}(t,\ \gamma))$$

其中 $C_{jk}(t,\ \gamma)=0$对$j>k$而$C_{kk}(t,\ \gamma)=\|\operatorname{proj}_k\chi_t(\gamma)\|$。我们观察到，当$1<k\leqslant p$时，$C_\gamma(t)^{tr}\cdot C_\gamma(t)$的第$k$列是

$$((C_{1k}(t,\ \gamma),\ C_{2k}(t,\ \gamma),\ \cdots,\ C_{(k-1)k}(t,\ \gamma))C_\gamma(t,\ k-1),\ \cdots)\in E^p$$

这里$C_\gamma(t,\ k-1)$表正则的三角式方阵

$$\begin{pmatrix} C_{11}(t,\ \gamma) & \cdot & \cdots & C_{1(k-1)}(t,\ \gamma)\\ 0 & C_{22}(t,\ \gamma) & \cdots & C_{2(k-1)}(t,\ \gamma)\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & C_{(k-1)(k-1)}(t,\ \gamma)\end{pmatrix}$$

(对角线以下的系数都是0)。注意，若$C_\gamma(t,\ k)$有对t可微而$C_\gamma(0,\ k)$对γ连续这些性质，则$C_\gamma(t,\ k)^{-1}$也同样有这些性质。

现在显然可对$k=1,\ 2,\ \cdots,\ p$取归纳法来完成这命题的证明。

对每一$(t,\ \gamma)\in(-\infty,\ \infty)\times\mathscr{F}_p^{\#}(K)$定义

$$R_\gamma(t)=\frac{dC_\gamma(t)}{dt}C_\gamma(t)^{-1}$$

则$R_\gamma(t)$是三角式方阵，对角线系数是

$$\operatorname{diag}_k R(t)=\omega_k(\chi_t^{\#}(\gamma),K)\qquad(k=1,2,\cdots,p)$$

对角线以下的系数都是0，且$R_\gamma(0)$对γ连续。从 $C_\gamma(s+t)=C_{\chi_s^{\#}(\gamma)}(t)\cdot C_\gamma(s)$我们有

$$\frac{dC_\gamma(s+t)}{dt}=\left(\frac{d}{dt}C_{\chi_s^{\#}(\gamma)}(t)\right)C_\gamma(s),$$

由是

$$R_\gamma(s+t)=R_{\chi_s^{\#}(\gamma)}(t).$$

这样来，据变换群$\chi_t^{\#}(-\infty<t<\infty)$的连续性及$\mathscr{F}_n^{\#}(K)$的紧致性，$R_\gamma(t)$作为$(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_p^{\#}(K)$上的方阵函数，连续且有界。

在这附录的余下部份中我们取

$$p=n.$$

每一$\gamma\in\mathscr{F}_n^{\#}(K)$将提供$K$的一个坐标系统，这个纤维即是由$\gamma$所张成的线性空间，它将记作$H(\gamma)$。这样来，每一$u\in H(\gamma)$可表成$u=z\cdot\gamma^{tr}$，$z$是$u$的坐标。由$P_\gamma(t,z)=z\chi_t^{\#}(\gamma)^{tr}$对于$\gamma\in\mathscr{F}_n^{\#}(K)$给出一映射

$$P_\gamma:(-\infty,\infty)\times E^n\to K,$$

它将称作基于(Φ_t,γ)的可容许映射，或简称为(Φ_t,γ)-可容许映射。对每一给定的t，$P_{t,\gamma}(z)=P_\gamma(t,z)$给出一映射

$$P_{t,\gamma}:E^n\to K$$

而$P(t,z,\gamma)=P_\gamma(t,z)$给出一映射

$$P:(-\infty,\infty)\times E^n\times\mathscr{F}_n^{\#}(K)\to K.$$

例如，记$z_\gamma(t,z)(-\infty<t<\infty)$ 为线性方程组

$$(Z_\gamma)\qquad \frac{dz}{dt}=zR_\gamma(t)^{tr}\qquad(t,z)\in(-\infty,\infty)\times E^n,$$

$(\gamma\in\mathscr{F}_n^{\#}(K))$的解取初值$z_\gamma(0,z)=z$。据$R_\gamma(t)$的定义我们看出$P_{t,\gamma}(z_\gamma(z_\gamma(t,z))=\Phi_t(P_{0,\gamma}(z))$。

K上的一向量场g是一自映射$g:K\to K$它把K的每一纤维映到其自身中。进一步我们说这向量场g是可容许的，如果它在K上有界且有一Lipschitg常数ρ。这意思是指

$$\sup_{u\in K}\|g(u)\|<\infty,\ \|g(u)-g(u')\|\leqslant\rho\|u-u'\|$$

只要u及$u'\in K$的同一纤维内。

K上一单参变换群$\Psi_t(-\infty<t<\infty)$将称作$\Phi_t(-\infty<t<\infty)$的扰动如果对每一$(t,u)\in(-\infty,\infty)\times K$，$\Phi_t(u)$及$\Psi_t(u)$总在$K$的同一纤维内。我们的最后目的是要给出

定义 $\Phi_t(-\infty<t<\infty)$的扰动$\Psi_t(-\infty<t<\infty)$将叫作一Φ_t-可容许扰动，如果K上有一可容许向量场g且对每一$\gamma\in\mathscr{F}_n^{\#}(K)$有一方程组

$$(Z_\gamma(\Psi_t))\qquad \frac{dz}{dt}=zR_\gamma(t)^{tr}+f_\gamma(t,z)\qquad((t,z)\in(t,z)\times E^n),$$

使得对所有$(t,z)\in(-\infty,\infty)\times E^n$，

（Ⅰ） $P_{t,\gamma}(f_\gamma(t,z))=g(P_{t,\gamma}(z))$，且

（Ⅱ） $P_{t,\gamma}(z_\gamma^{\#}(t,z))=\Psi_t(P_{0,\gamma}(z))$ 只要 $z_\gamma^{\#}(t,z)$是$(z_\gamma(\Psi))$的一解满足$z_\gamma^{\#}(0,z)=z$。

我们易检验：

（1） 据可容许向量场g的性质，对每一$\gamma\in\mathscr{F}_n^{\#}(K)$存在$(-\infty,\infty)\times E^n$上唯一的向量函数$f_\gamma(t,z)$满

足上述定义中的要求(Ⅰ)。这函数在$(-\infty,\infty)\times E^n$上有界，对$(t,\gamma)$连续，且有一Lipschitz常数，它与$g$的Lipschitz常数相同。当$\Psi_t=\Phi_t$时，$(Z_\gamma(\Psi_t))$即为$(Z_\gamma)$

(2) 如果 $\bar{\gamma}=\chi_s^{\#}(\gamma)$，则

$$R_{\bar{\gamma}}(t)=R_\gamma(s+t),\ 且 f_{\bar{\gamma}}(t,z)=f_\gamma(s+t,z).$$

(3) $f_\gamma(t,z)$对(t,z,γ)连续且在$(-\infty,\infty)\times E^n\times\mathscr{F}_n^{\#}(K)$上有界，因为$P_{t,\gamma}(f_\gamma(t,z))=g(P_{t,\gamma}(z))$。

(4) 如果对于 $\gamma\in\mathscr{F}_\gamma^{\#}(K)$，方程组$(Z_\gamma(\Psi_t))$已给定如上，而$\bar{\gamma}\in\mathscr{F}_n^{\#}(K)$与$\gamma$张成$K$中同一个纤维，则方程组$(Z_{\bar{\gamma}}(\Psi_t))$可用换变数

$$z\to\bar{z}=zV_{\gamma\bar{\gamma}}(t)$$

的办法得出，这里$V_{\gamma\bar{\gamma}}(t)=\chi_t^{\#}(\gamma)^{tr}\cdot\chi_t^{\#}(\bar{\gamma})$。我们于是得方程组

$$(Z_{\bar{\gamma}}(\Psi_t))\qquad \frac{d\bar{z}}{dt}=\bar{z}R_{\bar{\gamma}}(t)^{tr}+f_{\bar{\gamma}}(t,\bar{z})\qquad ((t,\bar{z})\in(-\infty,\infty)\times E^n),$$

其中

$$R_{\bar{\gamma}}(t)^{tr}=V_{\gamma\bar{\gamma}}(t)^{tr}R_\gamma(t)V_{\gamma\bar{\gamma}}(t)+V_{\gamma\bar{\gamma}}(t)^{tr}\left(\frac{d}{dt}V_{\gamma\bar{\gamma}}(t)\right),$$

$$f_{\bar{\gamma}}(t,\bar{z})=f_\gamma(t,\bar{z}V_{\gamma\bar{\gamma}}(t)^{tr})V_{\gamma\bar{\gamma}}(t).$$

容易看出$V_{\gamma\bar{\gamma}}(t)$对$t$可微。

这种类型的Φ_t-可容许扰动的具体例子，可从微分动力系统理论典范方程组[4]中找到。

更正 参考文献[7]中文版p.758，第10行和(1.3)式中，分别把$q_1+q_1+\cdots+q_m=q$和$\mathscr{F}_p^{\#}(K)$换成$q_1+q_2+\cdots+q_m=p$和$\mathscr{F}_q^{\#}(K)$。

参考文献

[1] V. I. Oseledec, A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trudy Mosk. Mat. Obsce.*, **19** (1969), 179—210.

[2] R. J. Sacker and G.R. Sell, A spectral theory for linear differential systems, *J. Differential Equations*, **27** (1978), 320—358.

[3] R. A. Johnson, K. J. Palmer and G. R. Sell, Ergodic properties of linear dynamical systems, *SIAM J. Math. Anal.*, **18** (1987), 1—33.

[4] S. T. Liao, On characteristic exponents construction of a new Borel set for the multiplicative ergodic theorem for vector fields, *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, **29** (1993), 277—302.

[5] J. Palis and W. Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag (1982).

[6] 廖山涛，典范方程组，数学学报，**17** (1974)，100—109；175—196；270—295.

[7] 廖山涛，向量丛动力系统研究注记(Ⅰ)，应用数学和力学，**16**(9) (1995)，757—766.

[8] Ya. Pesin, Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory, *Uspehi Mat. Nauk.*, **32** (1977), 55—112.

[9] C. Pugh and M. Shub, Ergodic attractors, *Trans. AMS.*, **312** (1989), 1—54.

[10] C. Pugh, The $C^{1+\alpha}$ hypothesis in Pesin theory, *Publ. Math. IHES*, **59** (1984), 43—161.

[11] H. Fedrer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag (1969).

[12] V. Nemyskii and V. Stepunov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Princeton University Press (1960).

[13] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag (1982).

[14] S. Lefschetz, *Differential Equations: Geometric Theory*, Wiley (1963).

[15] 廖山涛, 向量丛动力系统研究注记(Ⅱ)——部份1, 应用数学和力学,17(9) (1996),759—772.

Notes on a Study of Vector Bundle Dynamical Systems(Ⅱ) ——Part 2

Liao Shantao

(*Mathematics Department, Peking University, Beijing* 100871, *P. R. China*)

Abstract

In Part 2, theorem 3.1 stated in part 1[15] is proved first. The proof is obtained via a way of changing variables to reduce the original system of differential equations to a form concerning standard systems of equations in the theory of differentiable dynamical systems. Then by using theory 3.1 together with the preliminary theory 2.1, the Main Theorem of this paper announced in part 1 is proved. The definition of admissible perturbation is contained in the appendix of part 2. The meanings of the main theorem is described in ihe introduction of part 1.

Key words vector bundle dynamics, nonuniform hyperbolicity, ergodicity, admissible perturbation, pointwise boundedness