应用数学和力学，第18卷 第5期（1997年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

流体流过下凹地形的共振流动*

朱 勇[1]

（钱伟长推荐，1996年1月8日收到）

摘 要

本文讨论流体流过下凹地形时共振产生非线性毛细重力波。采用摄动方法，导出了一个具负强迫力的KdV方程。采用拟谱方法，对所得方程进行了数值分析，给出了在超临界，亚临界以及精确共振情形的数值结果。

关键词 非线性波 fKdV方程 表面张力

一、引 言

流体流过底部地形的流动的研究是一项具重要理论和实际应用意义的课题。近年来，强迫的Kortewege-de Viries 方程（fKdV方程）被看着是该问题共振流动的典型的非线性模型[1~2]。有时（例如，微重力情形），表面张力的作用不容忽略。作者[3]已发现具表面张力的流体流过上凸障碍物时会产生下游下凹的孤立波串，这个结果与传统的结果完全不同。本文将报道具表面张力的流体流过下凹地形时的流动情况。

二、控制方程

考虑不可压流体的二维运动，忽略粘性的作用，并假定初始时刻流体运动是无旋的，底部地形有一个下凹的坑。流体自由表面上有表面张力的作用，且考虑 Bond 数大于1/3 的情形。基本流动是均匀的，且与线性波速十分接近，即我们考虑共振情形，可写成

$$\frac{v_0}{c_0}=1+\Delta\varepsilon \tag{2.1}$$

其中 ε 是小量，Δ为常数，$\Delta>0$（或<0）对应于超临界流动（或亚临界流动）。底部地形假定变化是缓慢的，即

$$f(x)=-h_0-\gamma G_0\exp[-\xi^2(x-x_0)^2]\cdot h_0 \tag{2.2}$$

其中 γ为小量，G_0为下凹最大幅度，x_0为下凹的中心位置。

---

* 国家教委留学回国人员科研基金和上海市教委科学发展基金资助项目。

1 上海大学，上海市应用数学和力学研究所，上海 200072。

引进速度势函数φ，并作变换 $\varphi'=v_0x-\frac{1}{2}v_0^2t+\varphi$，且引进如下的无量纲量

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=a/h_0,\ \ \beta=h_0/l,\ \ \varphi^*=\frac{c_0}{gla}\varphi'\\&x^*=x/l,\ \ y^*=y/h_0,\ \ t=c_0t/l\\&\eta^*=\eta/a,\ \ T^*=T/\rho gh_0^2\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

其中 a是自由面特征波幅，l是特征水平长度，h_0是流体平均特征深度.

我们假定无量纲波幅α和无量纲波长β是小量．为了保证非线性与色散的平衡，在这种共振情形令

$$\alpha=\beta^2=r^{1/2}=\varepsilon\tag{2.4}$$

则有如下的无量纲 Laplace 方 程，自由面运动学和动力学条件以及底部边界条件（省略各量上的 * 号）.

$$\alpha\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0\qquad(f\leqslant y\leqslant\eta)\tag{2.5}$$

$$\alpha\eta_t+\alpha(1+\alpha\Delta+\alpha\varphi_x)\eta_x-\varphi_y=0\qquad(y=\eta)\tag{2.6}$$

$$\varphi_t+\frac{1}{2}\alpha\varphi_x^2+\frac{1}{2}\varphi_y^2+(1+\alpha\Delta)\varphi_x+\eta-\alpha T\eta_{xx}(1+\alpha^3\eta_x^2)^{-3/2}=0\qquad(y=\eta)\tag{2.7}$$

$$\varphi_y=2\alpha^2(1+\alpha\Delta+\alpha\varphi_x)G_0\xi^2(x-x_0)\exp[-\xi^2(x-x_0)^2]\qquad(y=f)\tag{2.8}$$

对上述方程我们引进新的时间尺度

$$\tau=\alpha t\tag{2.9}$$

以及将φ和η依α展开

$$\varphi=\varphi_0+\alpha\varphi_1+\alpha^2\varphi_2+\cdots\tag{2.10}$$

$$\eta=\eta_0+\alpha\eta_1+\alpha^2\eta_2+\cdots\tag{2.11}$$

可以得含有α的各阶方程．从零阶、一阶以及二阶方程分析可得如下的演化方程.

$$-(\eta_{0\tau}+\Delta\eta_{0x})+\frac{3}{2}\eta_0\eta_{0x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-T\right)\eta_{0xxx}-G_0\xi^2(x-x_0)\exp[-\xi^2(x-x_0)^2]=0\tag{2.12}$$

因为我们考虑 $T>\frac{1}{3}$的情形，因此可以置以下的变量变换

$$\left.\begin{aligned}&A'(x',\ t')=\frac{1}{4}\eta_0(x,t),\qquad x'=\sqrt{\frac{2}{T-1/3}}x\\&\tau'=\sqrt{\frac{2}{T-1/3}}\tau,\qquad \Delta'=\Delta\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

则有如下的方程（省略 ′ 号）

$$-(A\tau+\Delta A_x)+6AA_x-A_{xxx}-\frac{3}{4}G_0\xi^2(x-x_0)\exp[-\xi^2(x-x_0)^2]=0\tag{2.14}$$

方程(2.12)或(2.14)称为负色散的强迫的KdV方程(nfKdV方程).

三、数 值 解

从(2.14)知，方程的解依赖于Δ，G_0和ξ三个参数．方程(2.14)一般情况下无解析解．我们采用Fornberg和whitham[4]的拟谱法进行数值求解，假定初始时刻自由表面无扰动，即$t=0$时，$A=0$．ξ度量下凹的宽度，在此取为0.3．下凹的中心x_0取为 170.7．下凹的最大幅度G_0取为2/3．我们将给出不同Δ值时的结果．

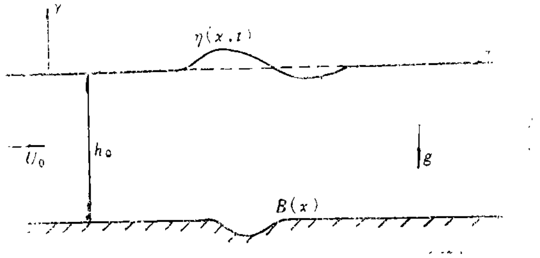

图1 流动模型

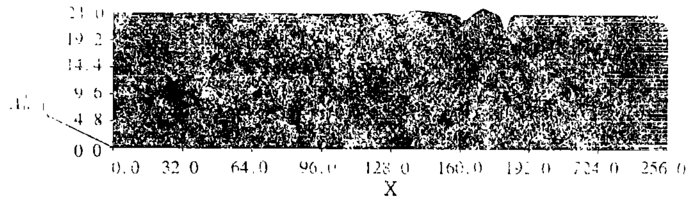

图2 精确共振情形

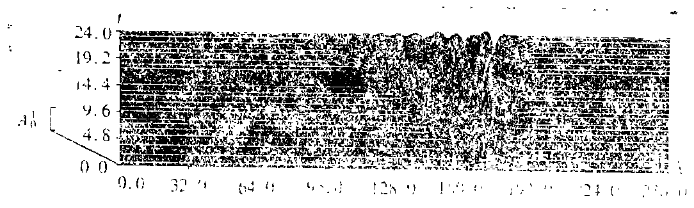

图3 超临界共振情形

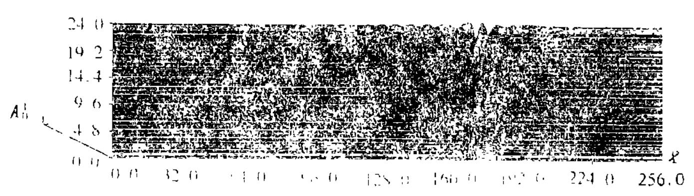

图4 亚临界共振情形

图2给出了$\Delta=0$，即精确共振情形的结果。从图中可以看出，在下凹地形的下游仅有一个孤立波产生，上游扰动很小，这与相同参数但上凸的地形的情形很不一样。图3 给出了$\Delta=1$ 的超临界共振流动的结果，在这种情况，上游扰动变强，且具有椭圆余弦波的迹象，而下游的下凹波更靠近下凹坑的中心．在下凹坑区域内流动是瞬变的．图 4 显示了亚临界共振

流动 ($\Delta=-1$) 的结果．与超临界情形相比，上游扰动要小些，下游波动也不大，而下凹坑区域的波动加强．从总体来说，这三种情形的结果无本质上的区别，因为它们同属于共振流动的范围内（即 $-1.2<\Delta<2.4$）[1]．而下凹的地形将产生负的压迫力，因而与上凸所产生的正的压迫力的情形所得到的结果不一致．进一步的数值结果表明，如果增加下凹的坑的宽度（即取较大的ξ值），在流动的下游会激发出较多的孤立波．

致谢 作者感谢与Grimshaw院士的有益的讨论．

参 考 文 献

[1] T. T. Wu, Generation of upsercam advancing solitims by moving disturbance, *J. Fluid Mech.*, **184**(1987), 75—90.

[2] R. Grimshaw, Resonant forcing of nonlinear dispersive waves, in the Conference Proceedings, *Nonlinear Dispersive Waves*, Ed. by L. Debnath, World Scientific (1992), 1—12.

[3] Y. Zhu, Resonant generations of nonlinear capillary-gravity waves, *Physics of Fluids*, 7(9) (1995), 2294—2296.

[4] D. Fornberg and G. B. Whitham, A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, **A289**(1978), 373—404.

Resonant Flow of a Fluid Past a Concave Topography

Zhu Yong

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, the resonant generation of nonlinear capillary-gravity waves in a fluid system with the effect of surface tension and the concave topography is examined by using a perturbation method and numerical method.

Key words nonlinear waves, fKdV equation, surface tension