应用数学和力学，第18卷 第4期（1997年4月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

充分发展管流计算中的一种方法

卢志明[1]　　刘宇陆[1]

（1995年10月13日收到）

摘　　要

本文结合摄动法、伽辽金法和有限差分法求解小曲率及小Dean数情形下充分发展的弯曲矩形管中的二次流流函数 ψ、轴向速度 w，该方法避免了直接求解N-S方程的巨大工作量，也克服了通常流函数法中构造高阶差分的困难。小曲率、小 Dean数情形针对不同宽高比的计算结果与前人的计算与实验结果对比表明，该方法是成功的。

关键词　弯曲管　伽辽金法　Dean数

一、引　　言

自从 Dean(1928)[7]对弯曲圆管流动现象的开创性研究工作以来，弯曲管的流动结构及其对传热传质等方面的影响的研究一直受到流体力学工作者的重视。Berger，Talbot 和 Yao(1983)等[4]及Nandakumar和 Masliyah(1986)[3]等都对此作了详细的综述。弯曲管流中由于离心力的影响，存在复杂的二次流现象，在小 Dean数情形，二次流表现为一对反方向旋转的涡对；在大Dean数情形，二次流表现为两对反方向旋转的涡对(Lyne型四涡)，在过渡区存在多解现象（M. Selmi，K. Nandakumar & W.H.Finlay(1994))[5]。在数值解方面，一般有以下三种方法：初始变量的N-S方程，涡—流函数—径向速度法(ψ-ω-w)，单流函数—径向速度法(ψ-w)。它们各有优缺点，单流函数—径向速度(ψ-w) 法未知量最少，但流函数方程为四阶，边界附近的高阶差分格式较难构造，所以应用的不多。但是M. Selmi，K. Nandakumar和W.H. Finlay 等人针对旋转管流问题采用拟谱方法进行了数值求解，即假设ψ，w展开为切比雪夫多项式

$$\psi=\sum_{m=0}^{N_r-1}\sum_{n=0}^{N_z-1}C^{\psi}_{mn}R^{\psi}_m(\tilde{r})Z^{\psi}_n(\tilde{z}),\quad w=\sum_{m=0}^{N_r-1}\sum_{n=0}^{N_z-1}C^{w}_{mn}R^{w}_m(\tilde{r})Z^{w}_n(\tilde{z})$$

其中R^{ψ}_m，R^{w}_m，Z^{ψ}_n和Z^{w}_n是切比雪夫多项式的线性组合，适当选择R^{ψ}_m，R^{w}_m，Z^{ψ}_n和Z^{w}_n使其满足无滑移、无穿透边界条件，并令在给定点(the Gauss points)上满足控制方程，得到一组$2N_rN_z$阶的非线性代数方程组，其数值结果令人满意，详细情况请参见文献[2]。但是该方法计算量较大，对于本文小曲率、小 Dean 数情形是不合适的，所以我们寻求一种更简便的计算方法，新方法在小曲率、小Dean数情形取得了令人满意的结果。

1 上海大学，上海市应用数学和力学研究所，上海 200072

二、控制方程

在图1所示柱极坐标系下，矩形管中充分发展的流动控制方程为

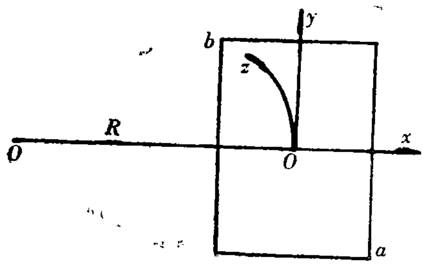

图1 弯管流中的柱极坐标系

1. 连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{u}{R+x}=0 \tag{2.1}$$

2. 运动方程

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{w^2}{R+x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{R+x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{(R+x)^2}\right) \tag{2.2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1}{R+x}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{2.3}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{uw}{R+x}=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{1+x/R}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{R+x}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{w}{(R+x)^2}\right) \tag{2.4}$$

在小曲率即$\delta=d_h/R\leqslant 1$，$d_h=2ab/(a+b)$情形，可将上述控制方程写成如下的ψ-w形式

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla^2\psi-\frac{2\bar{w}_0^2 d_h^3}{R\gamma^2}w\frac{\partial w}{\partial y}=\nabla^4\psi \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{Gd_h^2}{\mu\bar{w}_0}+\nabla^2 w \tag{2.6}$$

上式中ψ，w，x，y都已经适当的无量纲化，其中R为弯管曲率半径，$\bar{w}_0$为轴向平均速度，$d_h=2ab/(a+b)$，$G=-\partial p/\partial z$。此时边界条件为

$$\psi=0,\ w=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \qquad x=\pm\frac{a}{d_h}$$

$$\psi=0,\ w=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \qquad y=\pm\frac{b}{d_h}$$

令$k=2\bar{w}_0^2 d_h^3/\nu^2 R$，$c=Gd_h^2/\mu w_0$，$k$与Dean数满足关系式$Dean=\sqrt{2\cdot k}$，

三、方程的求解

(2.5)、(2.6)两式构成一组耦合的非线性偏微分方程组，精确求解几乎是不可能的，寻求一种较好的近似解法正是本文的目的。我们知道，在直管情形，(2.5)和(2.6)成为：

$$\psi_0=0 \tag{3.1}$$

$$\nabla^2 w_0=-c \tag{3.2}$$

假设$c=2$，求解(3.1)和(3.2)得：

$$\psi_0=0 \tag{3.3}$$

$$w_0=\left(\frac{a}{d_h}\right)^2-x^2-\frac{32a^2}{\pi^3 d_h^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2\operatorname{ch}\frac{(2n-1)\pi d_h y}{2a}\cos\frac{(2n-1)\pi d_h x}{2a}}{(2n-1)^3\operatorname{ch}\frac{(2n-1)\pi d_h b}{2a}} \tag{3.4}$$

在弯曲管流情形，我们假设y，w有以下形式渐近解：

$$w=w_0+kw_1+k^2w_2+\cdots \tag{3.5}$$

$$\psi=k\psi_1+k^2\psi_2+\cdots \tag{3.6}$$

(3.5)，(3.6)代入(2.5)，(2.6)两式得各阶摄动方程：

$$k^0:\quad \nabla^2 w_0=-c \tag{3.7}$$

$$k^1:\quad \nabla^4\psi_1=-w_0\frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{3.8}$$

$$k^1:\quad \nabla^2 w_1=\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{3.9}$$

……

(3.7)式的解就是(3.4)式，(3.8)式是一个四阶微分方程，构造差分离散格式较为繁锁，需九点以上的格式，而且边界附近又需特别处理。故本文采用伽辽金法来求解(3.8)，基于问题的对称性，我们先考虑$y\geqslant 0$的流动区域，此时ψ_1应满足如下边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\psi_1=\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=0 && x=\pm\frac{a}{d_h}\\&\psi_1=\frac{\partial\psi_1}{\partial y}=0 && y=\frac{b}{d_h}\\&\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=\frac{\partial\psi_1}{\partial y}=0 && y=0\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

现令：

$$\psi_1=\sum_{m=1}^{N_y}\sum_{n=1}^{N_x}c_{mn}\cdot\varphi_{mn}(x,\ y) \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{mn}(x,\ y)=&\left(\left(\frac{a}{d_h}\right)^{2n}-x^{2n}-\frac{nd_h^2}{(n+1)a^2}\left(a^{2(n+1)}-x^{2(n+1)}\right)\right)\\&\cdot\left(\left(\left(\frac{b}{d_h}\right)^m-y^m\right)\cdot y^{bm/a}-\frac{m}{m+1}\frac{1}{(b/d_h)^{1+b/a}}\left(\left(\frac{b}{d_h}\right)^{m+1}-y^{m+1}\right)\cdot y^{b(m+1)/a}\right)\end{aligned} \tag{3.12}$$

(3.11)式满足各项边界条件是显然的，为了确定(3.10)系中的系数c_{mn}，由伽辽金法可得

$$\iint\left(\nabla^4\psi_1+w_0\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)\cdot\varphi_{mn}=0 \qquad (m,\ n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{3.13}$$

积分后得到含有N_xN_y个c_{mn}的线性方程组，采用 GMRES 方法求解该系统从而确定这些待定系数c_{mn}得到流函数的一阶近似解．(3.4)和(3.11)两式代入(3.9)式，用差分法可解得轴向速度的近似解w_1．从而得到方程(2.5)、(2.6)的一阶近似解．

四、数值结果

为了检验本文方法的可行性和正确性，针对不同的宽高比($\delta=b/a$)进行了计算模拟，部分计算结果见图2，3，4．图 2 为Dean数等于80的方管流动二次流流函数 ψ_1及轴向速度w的分布图，图3、图 4 分别表示$\delta=2$，$Dean=100$和$\delta=4$，$Dean=100$矩形管流动二次流流函数ψ_1及轴向速度w的分布图．从图可看出，弯曲管道流动中，由于受离心力的影响，流体被挤向外壁，反映在轴向速度图上就是极大速度值出现在靠近外壁附近，对比直管流动的速度分布图 5 明显可看出轴向速度对比直管情形的偏离程度．从图 2，3，4 还可知，管中流体被挤向外壁的同时还被对称地挤向上方和下方（关于 $y=0$ 对称），使得轴向速度在y方向出现两个最大值，这与前人的计算结果和实验是相符合的(参见文献[2]、[3])．图 6 是B．Bara，K．Nandakumar和J．H．Masliyah等人的计算结果($\delta=1$，$Dean=123$)．

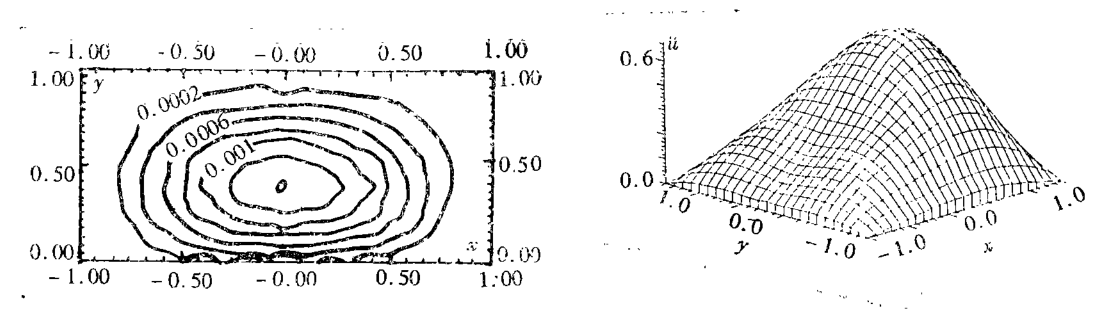

图2　$\delta=1$，$Dean=80$时二次流流函数ψ_1及轴向速度w

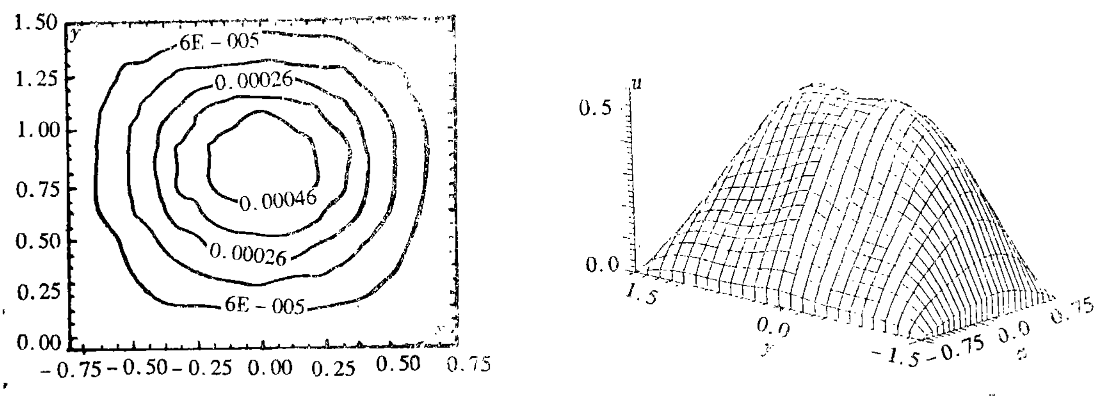

图3　$\delta=2$，$Dean=100$时二次流流函数ψ_1及轴向速度w

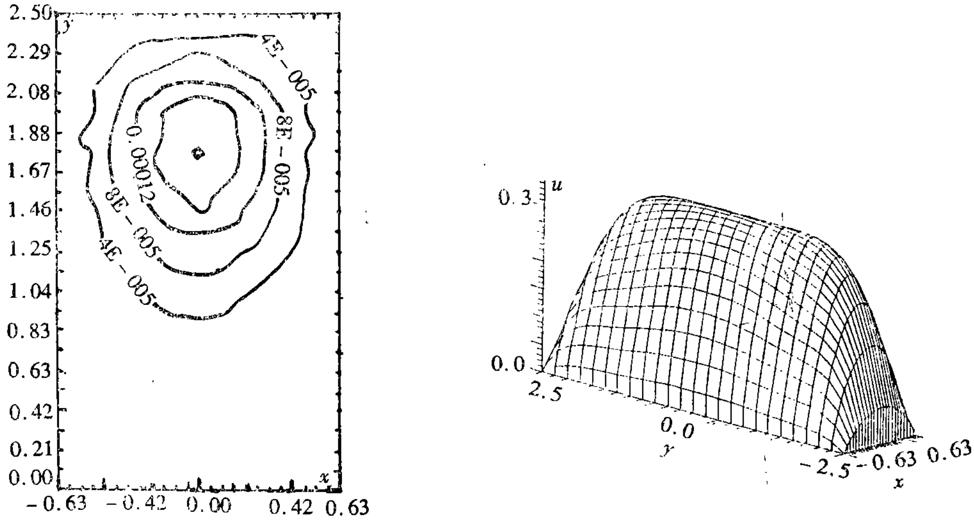

图4　$\delta=4$，$Dean=100$时二次流流函数ψ_1及轴向速度w

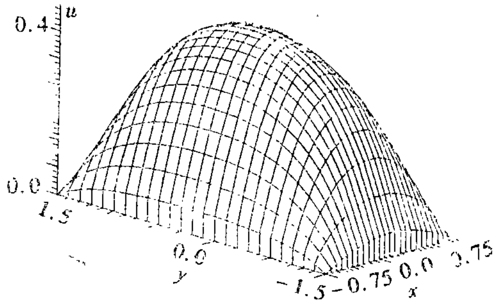

图5　$\delta=2$直管流动轴向速度分布

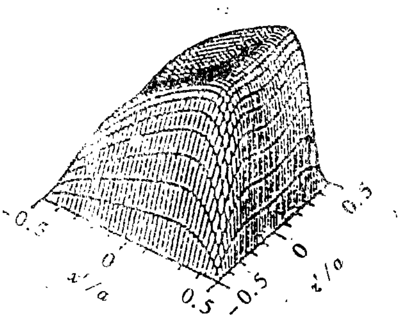

图6　二涡型流动轴向速度分布[文献3]

五、结论与讨论

弯曲矩形管流中，随着k数（或Dean数），曲率的变化存在复杂的二次流以及由此引起的复杂的轴向速度分布，二次流既可以是二涡型的，也可能是四涡型的，而轴向速度可能有两个、或三个极大值点。本文考虑小 Dean数、小曲率充分发展情形，结合摄动法、伽辽金法和差分法进行了数值计算，得到了一阶近似解，二次流是二涡型的，轴向流动偏向外壁的同时还被挤往上、下两方。这与他人的数值或实验结果相吻合。本文采用的计算方法具有两个优点：其一，方程未知量个数最少，经摄动法展开后简化了求解方程，即使原来的耦合的非线性偏微分方程解耦，转化成求解几个线性微分方程，求解计算量相应较少；其二，流函数计算采用伽辽金法避免了构造高阶差分及边界特殊处理的麻烦。本文方法简单易行，可以推广到其它形状截面或边界条件的弯曲流动问题（如明渠流动问题）。

参 考 文 献

[1] K. N. Chia and J. S. Sokhey, Laminar incompressible viscous flow in curved ducts of regular cross-sections, *J. Fluids Engineering, Transactions of the*

ASME, Dec. (1977), 640-648.

[2] S. Thangam and N. Hur, Laminar secondary flows in curved rectangular ducts, *J. Fluids Mech.*, **217** (1990), 421—440.

[3] B. Bara, K. Nandakumar and J. H. Masliyah, An experiments and numerical study of the Dean problem: Flow development towards two-dimensional multiple solutions, *J. Fluids Mech.*, **244** (1992), 339—376.

[4] S. A. Berger, L. Talbot and L. -S. Yao, Flow in curved pipes, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **15** (1983), 461—512.

[5] M. Selmi, K. Nandakumar and W. H. Finlay, A bifurcation study of viscous flow through a rotating curved duct, *J. Fluid Mech.*, **262** (1994), 353—375.

[6] W. R. Dean, The stream-line motion of fluid in a curved paper, *Philosophical Magzine*, (20) (1927), 208—223.

[7] W. R. Dean, The stream-line motion of fluid in a curved paper, *Philosophical Magzine*, (30) (1928), 673—693.

[8] K. H. Winters, A bifurcation study of laminar flow in a curved tube of rectangular cross-section, *J. Fluid Mech.*, **180** (1987), 343—369.

[9] 刘宇陆、肖文伟、蔡树棠等，弯曲管道中流体流动的理论和实验研究，«MMM-Ⅵ会议论文集»，苏州大学出版社 (1995).

[10] H. J. de Vriend, Velocity redistribution in curved channels, *J. Fluid Mech.*, **107** (1981), 423—439.

[11] W. R. Dean and J. M. Hurst, Note on the motion of fluid in a curved pipe, *Mathematika*, **6** (1959), 77—85.

[12] Y. Saad and M. H. Schultz, GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear system, *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, **7** (1986), 856—869.

A Calculation Method for Fully Developed Flows in Curved Rectangular Tubes

Lu Zhiming Liu Yulu

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, a method, consisted of perturbation method, Garlerkin method and finite-difference method, is designed to calculate fully developed flows in curved tubes of rectangular cross-section. It costs less computation than that of direct solving N-S equations, and prevents from building high-order difference equations and extra dealing with the boundary conditions. Numerical results in the situation of small curvature and low Dean number is in accordance with former's numerical and experimental results in quality, and it shows the feasibility of this paper's method.

Key words curved tube, Galerkin method, Dean number