

多夹层板壳的非线性理论及应用(Ⅲ) ——扁壳的弯曲和稳定

吴建成¹ 潘立宙²

(1995年8月1日收到)

摘 要

本文根据文[1]获得的多夹层扁壳非线性基本方程, 求解了各种载荷及边界条件下矩形底面多夹层扁壳的非线性弯曲问题, 多夹层板、扁柱壳在轴向压力作用下的稳定问题, 以及一般形状的扁壳在边界作用力下的变形。

关键词 多夹层扁壳 非线性 弯曲 稳定

求解矩形板的大挠度弯曲问题和后屈曲问题的非线性方程, 一直是较为困难的问题。一般地, 可以根据具体的边界条件, 选用合适的级数, 然后进行求解^[2]。刘人怀和成振强^[3]应用摄动法求解了简支夹层矩形板横向载荷作用下的非线性弯曲问题, 成振强等^[4]采用混合 Fourier 级数精确地求解了矩形中厚板和夹层板的后屈曲问题。Chia^[5]采用伽辽金法求解了层合柱壳的振动和后屈曲问题。

本文的第Ⅱ部分已推得各向同性材料无量纲化的多夹层扁壳的基本方程, 从中可以看出, 当扁壳的初始曲率为零(即 $1/R=0$)时退化为平板, 此时方程中板的内面变形部分与横向变形部分是由于大挠度而产生的非线性项才耦合的, 若不考虑非线性问题, 那么平板的方程是解耦的(求解弯曲问题时)。而扁壳由于壳体初始曲率的存在, 在线性范围方程也是耦合的。本文的处理方法, 把以上的耦合项一并处理。这样, 采用混合 Fourier 级数解法^[4], 求解多夹层扁壳问题, 求解的过程并不比求解平板问题的过程复杂。同时, 一般说来, 弯曲问题和稳定问题是分开来求解的, 而本文对于非线性弯曲和稳定, 尝试用同样的方法进行求解, 使解题的过程简化许多。因此, 这里用与求解非线性夹层矩形板问题相当难度的方法、过程, 求解了多夹层扁壳的非线性弯曲和稳定问题, 获得了大量的计算结果, 而这些结果有许多是壳体所独有的。

一、基本方程

多夹层扁壳的坐标如图1所示, 本文的第(Ⅱ)部分已经给出了基本方程。这里, 首先

1 同济大学工程力学研究所, 上海 200092

2 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072

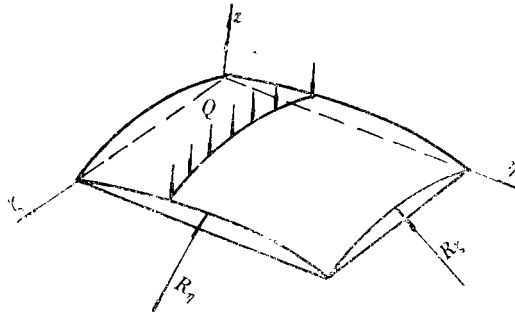


图1 矩形底面扁壳的坐标系

求解不考虑表层抗弯作用的方程 (即令 $\varepsilon_f = 0$)，那么，此时的基本方程为

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \Psi_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2 \Psi_\xi}{\partial \eta^2} + \frac{1+\nu}{2} \lambda \frac{\partial^2 \Psi_\eta}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{\varepsilon} \left(\Psi_\xi + \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) = 0 \\
 & \frac{1+\nu}{2} \lambda \frac{\partial^2 \Psi_\xi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \Psi_\eta}{\partial \eta^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \Psi_\eta}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\varepsilon} \left(\Psi_\eta + \lambda \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) = 0 \\
 & \frac{\partial \Psi_\xi}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \eta} + L_1 W = -\varepsilon (Q + Q' + F) \\
 & L_1^2 \Phi = \varepsilon_0 (1-\nu^2) \lambda^2 A \\
 & \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{1+\nu}{2} \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} = -B \\
 & \frac{1+\nu}{2} \lambda \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = -C \\
 & L_1 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\
 & Q' = P \left[\left(\frac{1}{R} + \rho \frac{r}{R} \right) - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \rho \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

在求解壳体中面内可移边界时，有

$$\begin{aligned}
 F &= \lambda^2 \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - \frac{r}{\lambda^2 R} \right) - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right] \\
 A &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{r}{\lambda^2 R} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

在求解壳体中面内不可移边界时，有

$$\begin{aligned}
 F &= \varepsilon_0 \left\{ \left[\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{W}{R} \right] \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - \left(\frac{1}{R} + \frac{\nu r}{R} \right) \right] + \lambda \left[\frac{\partial V}{\partial \eta} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{rW}{\lambda R} \right] \left[\lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \left(\frac{r}{R} + \frac{\nu}{R} \right) \right] + (1-\nu) \lambda \left(\lambda \frac{\partial U}{\partial \eta} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\partial V}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right\} \\
 B &= \frac{\partial W}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1+\nu}{2} \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{1}{R} + \frac{\nu r}{R} \right) \frac{\partial W}{\partial \xi} \\
 C &= \lambda \frac{\partial W}{\partial \eta} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1+\nu}{2} \lambda \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{r}{R} + \frac{\nu}{R} \right) \lambda \frac{\partial W}{\partial \eta}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

在求解只有横向载荷作用的弯曲问题时, 有 $Q'=0$; 若求解轴向压力 P 作用下的稳定及一般的扁壳在边界作用力下的变形问题时, 有 $Q=0$.

相应的边界条件可以给出. 现以简支边界、夹紧固定边界为例, 有简支

$$\left. \begin{aligned} \xi=0, 1: \quad W=0, \quad \frac{\partial \Psi_{\xi}}{\partial \xi}=0, \quad \Psi_{\eta}=0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}=0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}=0 \\ \eta=0, 1: \quad W=0, \quad \Psi_{\xi}=0, \quad \frac{\partial \Psi_{\eta}}{\partial \eta}=0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}=0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}=0 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

夹紧固定

$$\left. \begin{aligned} \xi=0, 1: \quad W=0, \quad \Psi_{\xi}=0, \quad \Psi_{\eta}=0, \quad U=0, \quad V=0 \\ \eta=0, 1: \quad W=0, \quad \Psi_{\xi}=0, \quad \Psi_{\eta}=0, \quad U=0, \quad V=0 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

滑动固支、铰支边界的边界条件同样可以给出, 这里略去.

下一节求解以上的基本方程

二、方程的求解

假设 Ψ_{ξ} , Ψ_{η} 和 W 具有如下形式的解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Psi_{\xi} \\ \Psi_{\eta} \\ W \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} s \Psi_{\xi n}(\xi) \sin n \pi \eta \\ \sum_{n=0}^{\infty} c \Psi_{\xi n}(\xi) \cos n \pi \eta \\ \sum_{n=1}^{\infty} W_{\xi n}(\xi) \sin n \pi \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} c \Psi_{\eta m}(\eta) \cos m \pi \xi \\ \sum_{m=1}^{\infty} s \Psi_{\eta m}(\eta) \sin m \pi \xi \\ \sum_{m=1}^{\infty} W_{\eta m}(\eta) \sin m \pi \xi \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{\xi m n}^* \cos m \pi \xi \sin n \pi \eta \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{\eta m n}^* \sin m \pi \xi \cos n \pi \eta \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{m n}^* \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

这里, $s \Psi_{\xi n}(\xi)$, $c \Psi_{\xi n}(\xi)$, $W_{\xi n}(\xi)$ 和 $c \Psi_{\eta m}(\eta)$, $s \Psi_{\eta m}(\eta)$, $W_{\eta m}(\eta)$ 是待定函数, $\Psi_{\xi m n}^*$, $\Psi_{\eta m n}^*$, $W_{m n}^*$ 是待定常数.

把(2.1)式代入基本方程(1.1)式的前三个方程, 同时把 Q , F 作如下的展开

$$Q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{m n} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta, \quad F = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{m n} \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta \quad (2.2)$$

那么, 可得有关 $s\Psi_{\xi n}$, $c\Psi_{\xi n}$, $W_{\xi n}$, $c\Psi_{\eta m}$, $s\Psi_{\eta m}$, $W_{\eta m}$ 的常微分方程组和有关 $\Psi_{\xi mn}^*$, $\Psi_{\eta mn}^*$, W_{mn}^* 的代数方程组。然后结合具体问题的边界条件求解以上所得的常微分方程组和代数方程组, 在求解过程中, 可把 F_{mn} 视为常数, 这样就得到了 $s\Psi_{\xi n}$, $c\Psi_{\xi n}$, $W_{\xi n}$, $c\Psi_{\eta m}$, $s\Psi_{\eta m}$, $W_{\eta m}$ 和 $\Psi_{\xi mn}^*$, $\Psi_{\eta mn}^*$, W_{mn}^* , 也就是解得了 Ψ_{ξ} , Ψ_{η} , W 。

若是求解中面内可移动边界的问题, 可假设 Φ 有解

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{\xi n}(\xi) \sin n\pi\eta + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{\eta m}(\eta) \sin m\pi\xi + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn}^* \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (2.3)$$

同样, $\Phi_{\xi n}(\xi)$, $\Phi_{\eta m}(\eta)$ 是待定函数, Φ_{mn}^* 是待定常数。

把(2.3)式代入基本方程(1.1)式的第四个方程, 同时展开 A ,

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (2.4)$$

那么可得有关 $\Phi_{\xi n}$, $\Phi_{\eta m}$ 的常微分方程和有关 Φ_{mn}^* 的代数方程, 求解这些方程可得 $\Phi_{\xi n}$, $\Phi_{\eta m}$ 和 Φ_{mn}^* , 求解中同样视 A_{mn} 为常数, 这样也就解得了 Φ 。

在给定了 Q_{mn} , F_{mn} 的情况下, 就可以解得 Ψ_{ξ} , Ψ_{η} 和 W ; 给定了 A_{mn} , 可解得 Φ 。在求解弯曲问题时, 载荷 Q 是给定的, 那么由(2.2)式所得的展开系数 Q_{mn} 也是确定的。解题开始时, 给定 W 的某个初始值 $W^{(0)}$, 那么由(1.2)式可求得 A 及按(2.4)式展开的系数 A_{mn} , 此时就可解得 Φ 的值 $\Phi^{(1)}$; 有了 $W^{(0)}$, $\Phi^{(1)}$, 由(1.2)式可得 F 及相应的展开系数 F_{mn} , 那么又可解得 $\Psi_{\xi}^{(1)}$, $\Psi_{\eta}^{(1)}$, $W^{(1)}$ 。重复以上步骤, 经 n 次迭代求解, 可求得系列解 $\Phi^{(1)}$, $\Psi_{\xi}^{(1)}$, $\Psi_{\eta}^{(1)}$, $W^{(1)}$, ... $\Phi^{(n-1)}$, $\Psi_{\xi}^{(n-1)}$, $\Psi_{\eta}^{(n-1)}$, $W^{(n-1)}$, $\Phi^{(n)}$, $\Psi_{\xi}^{(n)}$, $\Psi_{\eta}^{(n)}$, $W^{(n)}$ 。当 $(n-1)$ 次与 n 次求得的解相当接近, 满足精度要求时, 就可以认为求得了 Φ , Ψ_{ξ} , Ψ_{η} , W 。

在求解中面内可移边界的弯曲问题中, 基本变量 Φ , Ψ_{ξ} , Ψ_{η} , W 已经解得, 那么广义内力、应力、应变等诸多量就不难求得了。这样, 问题就得以求解。

若是求解中面内不可移动边界的问题, 可假设 U , V 有如下形式的解

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} U_{\xi n}(\xi) \sin n\pi\eta \\ \sum_{n=0}^{\infty} V_{\xi n}(\xi) \cos n\pi\eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} U_{\eta m}(\eta) \cos m\pi\xi \\ \sum_{m=1}^{\infty} V_{\eta m}(\eta) \sin m\pi\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}^* \cos m\pi\xi \sin n\pi\eta \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} V_{mn}^* \sin m\pi\xi \cos n\pi\eta \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

以下的方程与前面的过程相似, 不再赘述。

若是求解稳定问题与边界作用力下的变形问题, 方程(1.1)式的第三个方程中, $Q=0$, 而 Q' 存在。上述解题过程中, 只需把 Q 替换成 Q' , 就可以求解了。而解题步骤基本上是不变的。

三、弯曲问题的计算结果及讨论

上一节, 已经求得了弯曲问题的无穷级数解. 在实际的计算中, 需要在无穷级数中截取有限的项来进行运算求解. 那么截取多少项比较合适呢? 经过试算, 在计算中面内可移边界的弯曲问题中, 截取级数的前 N 项, 当 $N=5$, $N=7$ 时, 计算所得的载荷挠度曲线已是相当接近; 计算中面内不可移边界问题, $N=5$ 时, 已具有相当的精度.

本文给出的算例中, 材料常数取为

$$E_f = 7031 \text{ kg/mm}^2, \nu = 0.3, G_c = 21.1 \text{ kg/mm}^2 \quad (3.1)$$

E_f , ν 是表层的杨氏模量、泊松比, G_c 为夹心的剪切模量. 并且用 t 表示表层的总厚度, h 为壳体的厚度, n 表示多夹层板壳的层数.

从图1可以看出, 壳体的上部受横向压力作用, 此时载荷及相应的挠度的方向与 z 轴的正向相反. 因此, 算例的图中载荷 Q_0 及中心挠度 W_0 前都有负号.

图2、3分别是 $n=5$, $n=7$ 夹层方板四边夹紧固定均布载荷 Q_0 作用下的非线性弯曲问题, 图中示出本文的计算结果 (实线) 与文[6]的结果的比较. 开始时两者符合得较好, 尔后的结果表明文[6]板的刚度较大, 本文的结果较小. 图中算例的参数为 $\lambda=1$, $a/h=11.63$, $t/h=0.07$.

图4是四边简支多夹层方板在静水压 ($q=q_0 x/a$) 作用下的载荷与中心挠度关系的曲线, 四根曲线由上至下分别对应着 $n=3, 5, 7, 9$ 四种构造的多夹层板. 从图中可看出, 当壳厚 h 与表层总厚度 t 不变时, 层数多的板显得较软. 图5是四种不同边界多夹层方板均布载荷与中心挠度曲线.

对于壳体, 有 $R_\xi = R_x/a$, $R_\eta = R_y/a$. 图6是四边简支方底多夹层扁球壳 ($R_0 = R_\xi = R_\eta = 0.725$) 在均布外压作用下, 层数 $n=3, 5, 7, 9$ 四种扁球壳的载荷与中心挠度曲线. 从图上看, 随着中心挠度的增加, 载荷呈现先增加后下降然后再上升的趋势, 而壳体的实际变形, 一般开始时随载荷增大挠度增大, 到达 C 点时, 挠度由 C 点突跃至 C' 点, 然后随着载荷增大, 挠度沿曲线继续增大. 因此, C 点对应的载荷 Q_c , 又可称为壳体的横向临界载荷. 而这是壳体在横向载荷作用下所特有的现象.

图7是 $n=3$ 层的不同曲率 ($R_0 = -1, \infty, 10, 5, 2, 1, 0.725$) 的方底夹层扁球壳简支边界时均布载荷作用下的载荷与中心挠度曲线, 其中 $R_0 = -1$, 即是 $R_0 = 1$ 的壳体充内压的情形, $R_0 = \infty$, 对应着方板. 可以发现, R_0 较小, 即壳较凸时, 有横向失稳现象出现; 而 R_0 较大, 即壳体扁平时, 没有横向失稳出现.

图4~13的算例中, 有参数 $\lambda=1$, $a/h=20$, $t/h=0.05$.

以上的求解与计算过程, 忽略了表层抗弯的影响. 若需考虑表层抗弯的影响, 那么基本方程的第三式应由下式代替

$$\frac{\partial \Psi_\xi}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \eta} + L_1 W - \varepsilon_f L_1^2 W = -\varepsilon(Q + F) \quad (3.2)$$

把上式改写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi_\xi}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \eta} + L_1 W &= -\varepsilon(Q + F') \\ F' &= F - \varepsilon' L_1^2 W, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon} = -\frac{D_f}{D'} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

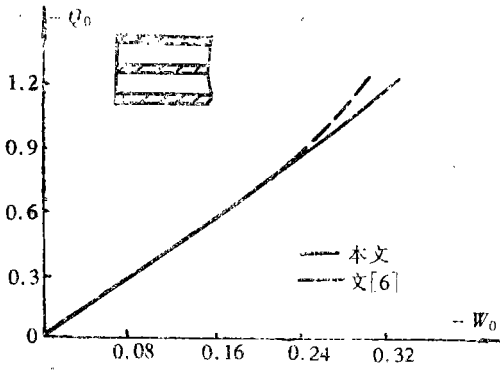


图2 多夹层方板夹紧固定边界均布载荷与中心挠度曲线 ($n=5, a/h=11.63, t/h=0.07$)

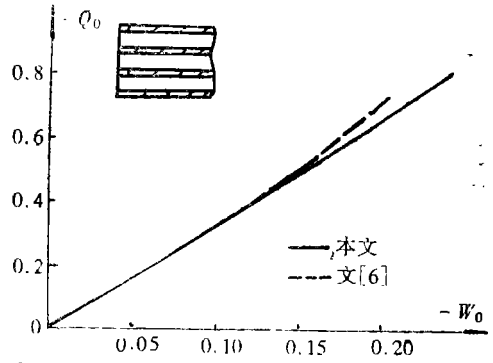


图3 多夹层方板夹紧固定边界均布载荷与中心挠度曲线 ($n=7, a/h=11.63, t/h=0.07$)

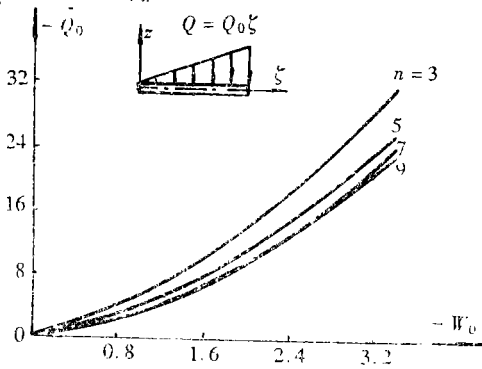


图4 简支多夹层方板静水压 $Q=Q_0\xi$ 作用下的载荷与中心挠度曲线

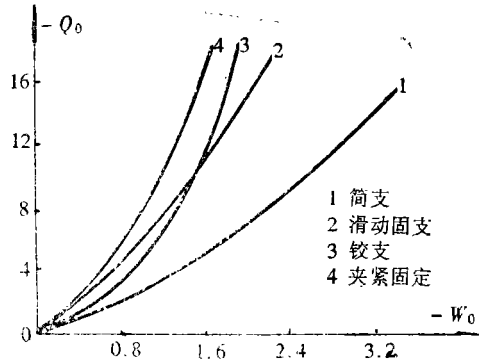


图5 不同边界的夹层方板均布载荷的载荷与中心挠度曲线

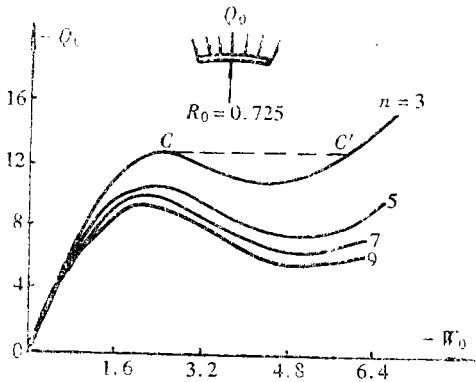


图6 简支方底多夹层扁球壳均布外压的载荷与中心挠度曲线 ($R_0=0.725$)

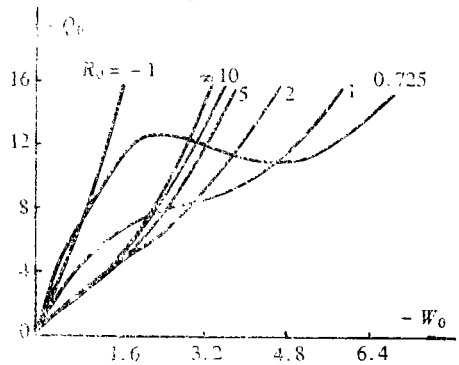


图7 不同曲率的简支方底夹层扁球壳均布外压的载荷与中心挠度曲线 ($n=3$)

这样,基本方程的形式可以不变动,而 F 由上式的 F' 代替。

下面考虑边界条件。由于偏微分方程的次数升高,还需增加新的边界约束条件。在简支、铰支边界时,有

$$\left. \begin{array}{l} \xi=0, 1: \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}=0 \\ \eta=0, 1: \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}=0 \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

滑动固支、夹紧固定时,有

$$\left. \begin{array}{l} \xi=0, 1: \quad \frac{\partial W}{\partial \xi}=0 \\ \eta=0, 1: \quad \frac{\partial W}{\partial \eta}=0 \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

以上的解题过程中,可以发现简支、铰支边界条件已得到满足,那么以上求解步骤求得的解就是精确解。若是滑动固支、夹紧固定边界,条件(3.5)不能满足,此时求得的解与精确解是有差别的,不过由于 ϵ' 很小,在靠近边界的区域,两者会有一些误差,而其余地方就相差很小。

下面以四边简支受均布载荷的 $n=3$ 层方板为例,看一看表层抗弯对计算结果的影响。当 $t/h=0.05$ 时,两者相差极小。如 $Q_0=16.0$ 时,考虑表层抗弯与忽略表层抗弯的中心挠度 W_0 分别为3.4703和3.4712,相差不到0.03%;当 $t/h=0.2$ 时,表层已较厚,两者相差亦不多,如中心挠度 $W_0=2.0$ 时, Q_0 分别为18.7726和18.3482,相差2.3%。

因此,当表层较薄时,不考虑表层抗弯的 Reissner 夹层板理论还是相当精确的,可以满足实际应用的需要。

四、稳定问题的计算结果及讨论

对于平板,若边界受中面内的压力作用,此时存在稳定问题。当边界的轴压小于某一个值(即临界压力 P_0^*),平板不产生横向变形,此时板在轴压下处于稳定状态;超过临界值,就会有较大的挠度出现,此时板进入后屈曲状态。对于扁柱壳,在边界上受沿圆柱母线方向的轴压时,也存在着稳定问题。而一般的扁壳(如扁球壳)受轴压作用,挠度随载荷立即产生,不存在稳定问题。

图8是双向均布轴压下($\rho=1$)简支多夹层($n=3, 5, 7, 9$)方板的边界压力 P_0 与中心挠度 W_0 的关系曲线;图9是不同边界及轴压形式下 $n=3$ 层方板的载荷中心挠度曲线。板的后屈曲状态,从图上可知,随着挠度的增大,边界压力还可有缓慢地增加。

图10是扁柱壳沿母线方向边界受压力作用,后屈曲的载荷与中心挠度的曲线。当 $W_0 \rightarrow 0$ 时,压力 P_0^* 就是临界载荷;图11是不同曲率($R_0=1, 2, 5, 10, \infty$)的简支方底夹层($n=3$)扁柱壳的载荷与中心挠度曲线。与板的后屈曲不同,壳体屈曲后,载荷中心挠度曲线的计算结果是,随着挠度的增加,载荷要经历先减少再增加的过程^[5]。一般说来,此时壳体结构会由于很大的变形而失去承载能力。

图12给出了不同曲率的简支方底夹层扁球壳在双向轴压下($\rho=1$)的载荷与中心挠度的曲线, $R_0=\infty$ 则对应着方板,此时有屈曲现象出现。

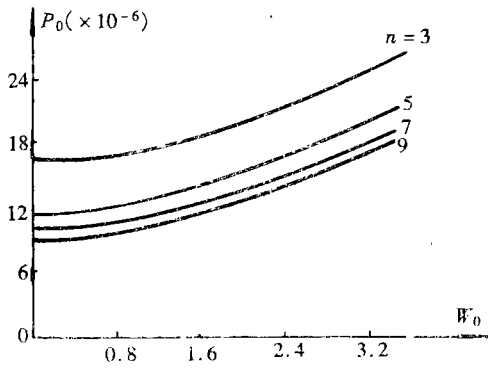


图8 双向轴压作用 ($\rho=1$) 简支多层板
的载荷与中心挠度曲线

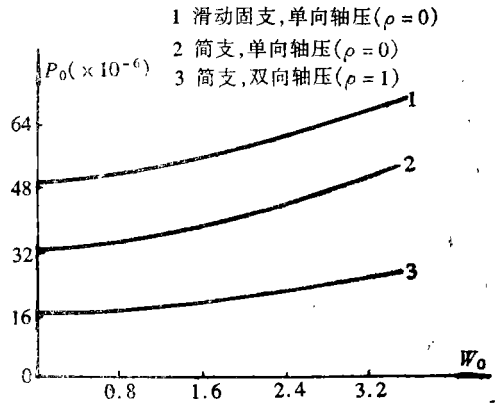


图9 不同边界及轴压形式下的夹层板
的载荷与中心挠度曲线($n=3$)

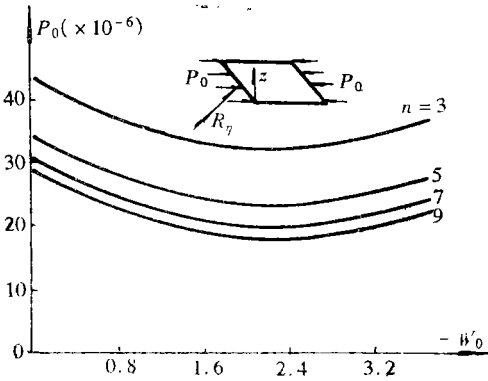


图10 轴压下简支方底多层夹层扁柱壳的载荷
与中心挠度曲线($R_\gamma=1$)

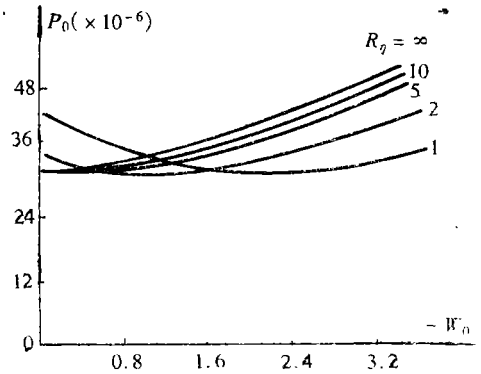


图11 不同曲率的简支方底夹层扁柱壳在轴
压下的载荷与中心挠度曲线($n=3$)

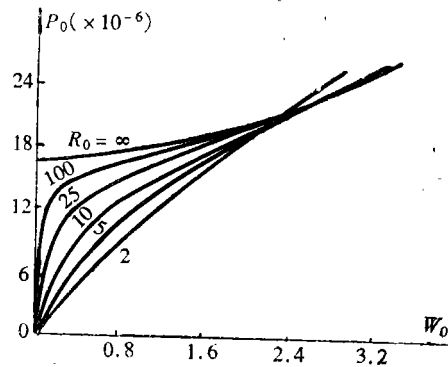


图12 不同曲率的简支方底夹层扁球壳在双向轴
压($\rho=1$)的载荷与中心挠度曲线($n=3$)

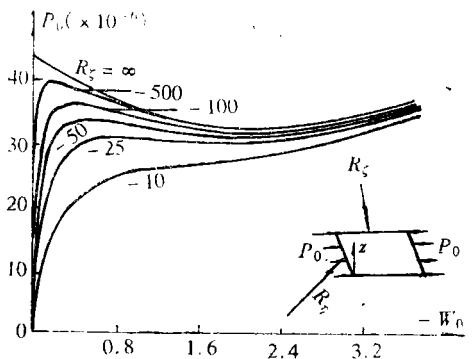


图13 简支方底双曲夹层扁壳在轴压下的载荷与
中心挠度曲线($n=3, R_\gamma=1$)

图13是 $R_\eta=1$, $R_\zeta=-10, -25, -50, -100, -500, \infty$ 的双曲夹层扁壳在沿 $\zeta=0, 1$ 的边界上作用着均布压力 P_0 时的载荷与中心挠度曲线。 $R_\zeta=\infty$ 对应着扁柱壳, 有屈曲现象出现; 而其余的双曲扁壳, 由于 ζ 向有初始曲率, 轴向载荷一开始就可以产生挠度, 从理论上讲, 不存在屈曲问题。但实际上, 壳体总是不可避免地带有各种缺陷, 比如扁柱壳的母线方向带有很小的初始曲率, 如图中 $R_\zeta=-500$ 的例子, 其初始的几何缺陷可以说是微乎其微。现在考察它的受压变形过程, 轴压逐渐增加, 几乎没有多少挠度出现, 但到达最高点 P_{\max} 后, 就会突然产生非常大的变形, 甚至导致壳体结构的破坏。以上的变形过程与屈曲现象基本吻合, 但它的最大载荷 $P_{\max}=40.02 \times 10^{-6}$, 与理想扁柱壳的临界载荷 $P_0^*=43.25 \times 10^{-6}$ 相比, 下降了7.5%。而 $R_\zeta=-50$ 时, 初始缺陷还是相当小的, 而最大载荷 $P_{\max}=34.19 \times 10^{-6}$, 与 P_0^* 相比竟下降20.9%。这可以从一方面解释了壳体的临界压力值, 实验值总是比计算值低。

以上, 就是根据多夹层扁壳的基本方程, 求得的弯曲和稳定问题的部分计算结果, 以及简单的讨论。

本文是在钱伟长教授的指导下完成的, 同时也得到了刘人怀教授的关心和帮助, 作者在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] 吴建成、潘立宙, 多夹层板壳的非线性理论及应用(Ⅱ)——正交异性材料扁壳的基本方程, 应用数学和力学, 18(2) (1997), 119—129.
- [2] C. Y. Chia, *Nonlinear Analysis of Plates*, McGraw Hill, New York (1980).
- [3] 刘人怀、成振强, 简支夹层矩形板的非线性弯曲, 应用数学和力学, 14(3) (1993), 203—218.
- [4] 成振强、王秀喜、黄茂光, 矩形中厚板和夹层板的后屈曲, 应用数学和力学, 15(7) (1994), 577—582.
- [5] C. Y. Chia, Non-linear free vibration and postbuckling of symmetrically laminated orthotropic imperfect shallow cylindrical panels with two adjacent edges simply supported and the other edges, *Int. J. Solids Structures*, 23 (1987), 1123—1132.
- [6] S. V. Rajagopal, et al., Large deflection and nonlinear vibration of multilayer sandwich plates, *AIAA Journal*, 25 (1987), 130—133.

Nonlinear Theory of Multilayer Sandwich Shells and Its Application(Ⅲ)—Large Deflection and Postbuckling of Shallow Shells

Wu Jiancheng

*(Institute of Engineering Mechanics, Tongji University,
Shanghai 200092, P. R. China)*

Pan Lizhou

*(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)*

Abstract

In this paper, exact solutions of large deflection of multilayer sandwich shallow shells under transverse forces and different boundary conditions are presented. Exact results of postbuckling of multilayer sandwich plates, shallow cylindrical shells and nonlinear deflection of general shallow shells such as spherical shells under inplane edge forces are also obtained by the same procedure.

Key words multilayer sandwich shallow shells, nonlinear, deflection, postbuckling