

球面各向同性颗粒复合材料膨胀系数的界限

何陵辉¹ 刘人怀²

(1995年11月3日收到)

摘 要

本文致力于球面各向同性颗粒增强复合材料膨胀行为的研究。首先,在所提出的基体均匀场概念的基础上导出了该种复合材料等效膨胀系数与体积模量的精确关系,其次,由能量极值原理给出了等效体积模量的Paul型界限,从而得到等效膨胀系数的界限。

关键词 复合材料 膨胀行为 界限

一、引 言

非均匀材料等效性质的严格界限问题一直为人们所关注。Hashin 和 Shtrikmann^[1] 基于他们所提出的用弹性极化张量表示的变分原理^[2]给出了由各向同性相构成的宏观各向同性复合材料等效弹性模量最优的可能下限和上限。他们的这一工作后来被 Walpole^[3,4] 和 Willis^[5]等人改进和推广。在膨胀性质方面, Levin^[6]利用虚功原理导出了两各向同性相组成的复合材料热膨胀系数和弹性模量的精确关系, Rosen 和 Hashin^[7]进一步得到了两直线各向异性相复合材料的相应结果。因此,利用这些关系以及等效弹性模量的界限,可以直接给出一类复合材料等效膨胀性质的界限。本文也将沿这一途径研究球面各向同性球粒复合材料的等效膨胀行为。

球面各向同性球粒在自然界并非少见,如一些石墨球粒和聚乙烯颗粒就呈现球面各向同性特征。关于此类复合材料已有一些研究结果。例如, Dryden^[8]分析了其内部应力问题和等效弹性模量, Chen^[9]则应用 Mori-Tanaka 方法研究了其等效热弹性和传导性质。然而,该类复合材料等效膨胀性质的界限尚未见报道。这是因为对于含曲线各向异性增强相的复合材料,利用现有的方法,如变分方法^[8]和均匀场方法^[10,11]等,并不能导出其等效热弹性性质的精确关系。

本文研究随机分布的球面各向同性颗粒增强复合材料,其宏观对称性为各向同性。在第二节中,证明了球对称变形下一球面各向同性球粒可由一几何尺寸相同的各向同性球替代,而不改变其表面的位移和应力。第三节中,通过施以适当的温度和力学边界条件构造了复合材料基体中的均匀温度、应力和应变场。第四节给出了复合材料等效热膨胀系数与体积模量之间的精确关系。第五节先由能量驻值原理得到等效体积模量的Paul型界限^[12],进而给出

1 中国科学技术大学近代力学系二专业,合肥 230026; 2 暨南大学校长室,广州 510632

等效膨胀系数的界限。需要指出的是, Paul型界限一般要比 Hashin-Shtrikmann 型界限弱, 但对于球面各向同性颗粒复合材料后者尚待进一步研究。

二、替代球粒及其性质

考虑一半径为 R 的球面各向同性球粒, 在通常的球坐标系 (r, θ, φ) 中其正应力 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi$ 与正应变 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi$ 的关系由下式给出:

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_{11}\alpha_A + 2C_{12}\alpha_T \\ C_{12}\alpha_A + (C_{22} + C_{23})\alpha_T \\ C_{12}\alpha_A + (C_{22} + C_{23})\alpha_T \end{pmatrix} T \quad (2.1)$$

这里球坐标系的原点选在球心, C_{ij} 表示弹性常数, α_A 和 α_T 分别表示径向和横向膨胀系数, T 表示相对于一无应力状态的温度变化。我们将证明, 在球对称变形条件下, 该球可由一半径相同的各向同性球替代, 而不改变其表面的应力和位移条件。

为此, 在球面各向同性球表面给定边界条件

$$u_r = \varepsilon^0 R, \quad u_\theta = u_\varphi = 0, \quad T = T^0, \quad \text{当 } r = R \text{ 时} \quad (2.2)$$

其中 ε^0 和 T^0 分别为一恒定应变和一恒定温度变化。稳态条件下, 球中唯一不为零的位移分量 u_r 满足方程

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} + \frac{2(C_{12} - C_{22} - C_{23})}{C_{11}} \frac{u_r}{r^2} = \frac{2(C_{11} - C_{12})\alpha_A + 2(2C_{12} - C_{22} - C_{23})\alpha_T}{C_{11}r} T^0 \quad (2.3)$$

其通解为:

$$u_r = Ar\beta_1 + Br\beta_2 + \xi T^0 r \quad (2.4)$$

其中 A, B 为待定常数, β_1 和 β_2 为特征方程

$$\beta^2 + \beta + \lambda = 0 \quad (2.5)$$

的根。 ξ 和 λ 由下式给出:

$$\xi = \frac{(C_{11} - C_{12})\alpha_A + (2C_{12} - C_{22} - C_{23})\alpha_T}{C_{11} + C_{12} - C_{22} - C_{23}}, \quad \lambda = \frac{2(C_{12} - C_{22} - C_{23})}{C_{11}} \quad (2.6)$$

Dryden^[8] 证明, 为使应变能正定, β_1 和 β_2 须为实数。此外, 为保持球粒内部的物理敏感性, β_1 和 β_2 必须符号相反。这仅当 $\lambda < 0$, 即 $C_{22} + C_{23} > C_{11}$ 时可能。于是, 不失一般性可假设 $\beta_1 > 0$ 而 $\beta_2 < 0$ 。由 $r=0$ 时 u_r 有限的条件及式 (2.2) 可知

$$A = (\varepsilon^0 - \xi T^0) R / (1 - \beta_1), \quad B = 0 \quad (2.7)$$

因而球外表面上的应力可写成

$$\sigma_r|_{r=R} = (\beta_1 C_{11} + 2C_{12})\varepsilon^0 + [(1 - \beta_1)\xi C_{11} - (C_{11}\alpha_A + 2C_{12}\alpha_T)]T^0 \quad (2.8)$$

另考虑一半径为 R , 体积模量为 K_R , 膨胀系数为 α_R 的各向同性球。同样在其外表面给定边界条件 (2.2)。类似地可以求得稳态条件下其外表面上的应力为

$$\sigma_r|_{r=R} = 3K_R\varepsilon^0 - 3K_R\alpha_R T^0 \quad (2.9)$$

比较式 (2.8) 和 (2.9) 可知, 如果

$$K_R = \frac{1}{3}(C_{11}\beta_1 + 2C_{12}), \quad \alpha_R = \frac{C_{11}(\beta_1 - 1)\xi}{C_{11}\beta_1 + 2C_{12}} + \frac{C_{11}\alpha_A + 2C_{12}\alpha_T}{C_{11}\beta_1 + 2C_{12}} \quad (2.10)$$

则球面各向同性球粒可由该各向同性球替代, 而不改变其表面的位移和应力。值得一提的是, 在式 (2.10) 中, K_R 和 α_R 并不包括 R , 这表明任意尺寸的球面各向同性球其相应的替代

球体积模量均为 K_R 而膨胀系数均为 α_R ,

三、基体均匀场的存在条件

在直角坐标系 (x_1, x_2, x_3) 中考虑由各向同性基体 (记为第一相) 和球面各向同性球粒 (记为第二相) 构成的复合材料. 各球粒半径可以不同, 其分布也是随机的. 假设基体是各向同性的, 基体与球粒之间是完善粘结的, 即满足位移和牵引力的连续条件, 现在复合材料表面给定边界条件:

$$u_1 = \hat{\varepsilon} x_1, \quad u_2 = \hat{\varepsilon} x_2, \quad u_3 = \hat{\varepsilon} x_3, \quad T = \hat{T} \quad (3.1)$$

其中 $\hat{\varepsilon}$ 和 \hat{T} 为常数. 本节将研究 $\hat{\varepsilon}$ 和 \hat{T} 满足何种条件时复合材料基体中的应力和应变场是均匀的.

不妨假设基体中均匀应力应变场确实存在, 因而应变 $\varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{22}^{(1)}, \varepsilon_{33}^{(1)}$ 和应力 $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{33}^{(1)}$ 可表示为

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{33}^{(1)} = \hat{\varepsilon}, \quad \sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{33}^{(1)} = 3K_1(\hat{\varepsilon} - \alpha_1 \hat{T}) \quad (3.2)$$

其中 K_1 为基体的体积模量, α_1 为膨胀系数. 由于此时任一球粒均承受一球对称变形, 按上节的结果可知, 它可由体积模量和膨胀系数分别为 K_R 和 α_R 的半径相同的各向同性球粒替代, 而不改变基体的应力和应变. 于是可知, 任一球面各向同性球粒紧邻球粒—基体界面处的应变为 $\varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{22}^{(2)} = \varepsilon_{33}^{(2)} = \hat{\varepsilon}$, 而应力为

$$\sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{33}^{(2)} = 3K_R(\hat{\varepsilon} - \alpha_R \hat{T}) \quad (3.3)$$

比较式(3.2)和(3.3)可知, 球粒和基体界面处的应力平衡条件可写成

$$(K_R - K_1)\hat{\varepsilon} = (K_R\alpha_R - K_1\alpha_1)\hat{T} \quad (3.4)$$

式(3.4)即为保证边界条件(3.1)下基体应力和应变为均匀的条件. 如 $K_R \neq K_1$, 式(3.4)可进一步表示为

$$\hat{\varepsilon} = \eta \hat{T} \quad (3.5)$$

其中

$$\eta = \frac{K_R\alpha_R - K_1\alpha_1}{K_R - K_1} \quad (3.6)$$

如 $K_R = K_1$, 为使式(3.4)的条件被满足, 要么有 $\hat{T} = 0$, 要么有 $\alpha_R = \alpha_1$, 但无论对何种情况, $\hat{\varepsilon}$ 和 \hat{T} 都可以视为彼此独立的.

四、等效体积模量与膨胀系数的精确关系

如果所考虑的复合材料为宏观均匀且各向同性的, 在均匀温度变化条件下其等效正应力和正应变之间的关系可表示成

$$\begin{Bmatrix} \langle \sigma_{11} \rangle \\ \langle \sigma_{22} \rangle \\ \langle \sigma_{33} \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \varepsilon_{11} \rangle \\ \langle \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 3K\alpha \\ 3K\alpha \\ 3K\alpha \end{Bmatrix} T \quad (4.1)$$

其中 K , G 和 α 分别为复合材料的等效体积模量、剪切模量和膨胀系数, $\langle \sigma_{ij} \rangle$ 和 $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ 分别表示体平均应力和应变, 即

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \quad (4.2)$$

V 为复合材料的体积. 不难证明

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = c_1 \langle \sigma_{ij} \rangle_1 + c_2 \langle \sigma_{ij} \rangle_2, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = c_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_1 + c_2 \langle \varepsilon_{ij} \rangle_2 \quad (4.3a, b)$$

其中

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_s = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} \sigma_{ij}^{(s)} dV, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle_s = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} \varepsilon_{ij}^{(s)} dV \quad (s=1, 2) \quad (4.4)$$

这里 c_1 和 c_2 分别为基体和球粒的体积分数, $c_1 + c_2 = 1$, V_1 和 V_2 表示基体和球粒的体积.

使复合材料承受边界条件(3.1)并设 $\hat{\varepsilon}$ 和 \hat{T} 满足条件(3.4). 此时基体中的应力和应变场是均匀的. 利用Gauss定理可证明

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle_2 = \langle \varepsilon_{22} \rangle_2 = \langle \varepsilon_{33} \rangle_2 = \hat{\varepsilon}, \quad \langle \sigma_{11} \rangle_2 = \langle \sigma_{22} \rangle_2 = \langle \sigma_{33} \rangle_2 = 3K_R(\hat{\varepsilon} - \alpha_R \hat{T}) \quad (4.5)$$

因此, 将式(4.3a)代入(4.1)并利用(4.5)可知

$$(K_R - K)\hat{\varepsilon} = (K_R \alpha_R - K\alpha)\hat{T} \quad (4.6)$$

当 $K_R \neq K_1$ 时, 将式(3.5)代入(4.6), 消去 \hat{T} 并借助于(3.6)得到

$$\alpha = \alpha_1 + \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K} \right) \left[(\alpha_R - \alpha_1) / \left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_R} \right) \right] \quad (4.7)$$

如球粒为各向同性, 式(4.7)完全等同于Levin关系^[6]. 当 $K_R = K_1$ 而 $\alpha_R \neq \alpha_1$ 时, 有 $\hat{T} = 0$, 由式(4.6)知

$$K = K_1 \quad (4.8)$$

当 $K_R = K_1$ 且 $\alpha_R = \alpha_1$ 时, $\hat{\varepsilon}$ 和 \hat{T} 相互独立, 此时从式(4.6)可得

$$K = K_1, \quad \alpha = \alpha_1 \quad (4.9)$$

五、等效膨胀系数的界限

前节结果表明, 当 $K_R = K_1$ 且 $\alpha_R = \alpha_1$ 时, 复合材料的等效膨胀系数即为 $\alpha = \alpha_1$, 而当 $K_R \neq K_1$ 时, α 与 K 的关系由式(4.7)给出. 我们将利用这一关系导出 $K_R \neq K_1$ 时 α 的界限. 为此先研究 K 的界限.

假定复合材料在其外表面承受边界条件

$$u_1 = \varepsilon^0 x_1, \quad u_2 = \varepsilon^0 x_2, \quad u_3 = \varepsilon^0 x_3 \quad (5.1)$$

其中 ε^0 为一常应变. 则复合材料的总势能可表示为

$$U = \frac{9}{2} K (\varepsilon^0)^2 V \quad (5.2)$$

为得到 U 的上限, 现构造复合材料中的可能位移场. 令基体中的可能位移场为

$$u_1^{(1)*} = \varepsilon^0 x_1, \quad u_2^{(1)*} = \varepsilon^0 x_2, \quad u_3^{(1)*} = \varepsilon^0 x_3 \quad (5.3)$$

此时任一球粒承受球对称变形, 可由相应的各向同性球替代. 强制球粒和基体界面上的位移连续条件 (正应力不必连续), 不难得到相应于可能位移场的复合材料总势能为

$$U^* = \frac{9}{2} (c_1 K_1 + c_2 K_R) (\varepsilon^0)^2 V \quad (5.4)$$

于是由最小势能原理可知 $U \leq U^*$, 即

$$K \leq c_1 K_1 + c_2 K_R \quad (5.5)$$

再使复合材料在其外表面承受如下边界条件

$$\sigma_{11} = \sigma^0, \quad \sigma_{22} = \sigma^0, \quad \sigma_{33} = \sigma^0 \quad (5.6)$$

其余应力分量为零. 这里 σ^0 表示一常应力. 复合材料的总余能可表示为

$$U_o = \frac{1}{2} \frac{(\sigma^0)^2}{K} V \quad (5.7)$$

构造复合材料中的可能应力场, 即令基体中的应力是均匀的:

$$\sigma_{11}^{(1)*} = \sigma^0, \quad \sigma_{22}^{(1)*} = \sigma^0, \quad \sigma_{33}^{(1)*} = \sigma^0 \quad (5.8)$$

其余分量为零. 此时任一球粒也处于球对称变形状态, 可由相应的各向同性球替代. 由强制界面正应力连续条件 (位移不必连续), 可知对应于可能应力场时复合材料的总余能为

$$U_c^* = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_R} \right) (\sigma^0)^2 V \quad (5.9)$$

因此由最小余能原理知 $U_c \leq U_c^*$, 即

$$K \geq 1 / \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_R} \right) \quad (5.10)$$

综合式(5.5)和(5.10)我们有

$$1 / \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_R} \right) \leq K \leq c_1 K_1 + c_2 K_R \quad (5.11)$$

按式(4.7)可知, 当 $\alpha_R \geq \alpha_1$, $K_R > K_1$, 或 $\alpha_R \leq \alpha_1$, $K_R < K_1$ 时, α 随 K 增大而单调增大, 因而由式(5.11)可知此时等效膨胀系数满足

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_R \leq \alpha \leq \left(c_1 \frac{\alpha_1}{K_R} + c_2 \frac{\alpha_R}{K_1} \right) / \left(c_1 \frac{1}{K_R} + c_2 \frac{1}{K_1} \right) \quad (5.12)$$

当 $\alpha_R \geq \alpha_1$, $K_R \leq K_1$, 或 $\alpha_R \leq \alpha_1$, $K_R > K_1$ 时, α 随 K 的增大而单调减小. 同样由式(5.11)可知此时 α 满足:

$$\left(c_1 \frac{\alpha_1}{K_R} + c_2 \frac{\alpha_R}{K_1} \right) / \left(c_1 \frac{1}{K_R} + c_2 \frac{1}{K_1} \right) \leq \alpha \leq c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_R \quad (5.13)$$

式(5.11)为等效体积模量 K 的Paul型界限^[12], 而式(5.12)和(5.13)为不同情况下等效膨胀系数 α 的界限. 当 $K_R = K_1$ 时, K 的上下限重合, 即 $K = K_1$; 而当 $\alpha_R = \alpha_1$ 时 α 的上下限重合, 即 $\alpha = \alpha_1$. 一般地, Paul型界限要比Hashin-Shtrikmann型界限^[1]弱, 但比Voigt型^[13]和Reuss型^[14]界限强. 然而, 对于随机分布的球面各向同性颗粒增强复合材料, 仅在一些非常特殊的情况下才能得到其等效弹性性质的Hashin-Shtrikmann型界限. 以下将给出一例.

如图1所示, 设想复合材料是这样构成的: 首先将大小不同的球面各向同性球粒用基体材料包裹, 形成复合球, 对于每一复合球, 其中球面各向同性球所占的体积分数等于 c_2 ; 再

将不同尺寸的复合球随机地粘合起来,使其无缝隙地填充复合材料所占的全部空间。这样构成的复合材料称为复合球聚集体。显然复合球聚集体中球面各向同性球的体积分数也为 c_2 。如果复合球聚集体是宏观各向同性的,类似于 Hashin^[15]关于两各向同性相复合球聚集体的推导可以知道,其等效体积模量的 Hashin-Shtrikmann 型上下界限重合。这表明对于这种特殊的复合材料,其等效体积模量可以精确地得到:

$$K = K_1 + c_2 / \left(\frac{1}{K_R - K_1} + \frac{3c_1}{3K_1 + 4G_1} \right) \quad (5.14)$$

其中 G_1 为基体的剪切模量,相应地,将式(5.14)代入(4.7)即得其等效膨胀系数的精确解。

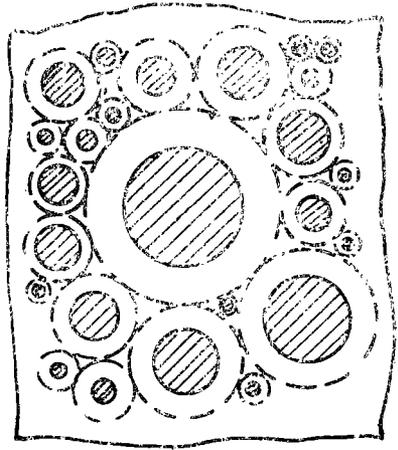


图1 复合球聚集体模型示意图

六、结 束 语

本文在适当的温度和位移边界条件下建立了球面各向同性球粒复合材料的基体均匀场,由此给出了复合材料等效膨胀系数与体积模量的精确关系。通过能量驻值原理导出了等效体积模量的 Paul 型界限。进而得到了等效膨胀系数的相应界限。本文结果可用于检验相应细观力学模型的内在一致性以及相关结果的精度。尽管本文假设材料性质不依赖于温度的变化,但如材料性质为温度的函数,不难发现本文所导出的关系作为瞬态材料性质的结果仍然成立。

参 考 文 献

- [1] Z. Hashin and S. Shtrikmann, A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 11 (1963), 127—140.
- [2] Z. Hashin and S. Shtrikmann, On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, 10 (1962), 335—342.
- [3] L. J. Walpole, On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems—I, *J. Mech. Phys. Solids*, 14 (1966), 151—162.
- [4] L. J. Walpole, On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous system—II, *J. Mech. Phys. Solids*, 14 (1966), 289—301.
- [5] J. L. Willis, Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites, *J. Mech. Phys. Solids*, 25 (1977), 185—202.
- [6] V. M. Levin, Thermal expansion coefficients of heterogeneous materials, *Mekh. Tverdogo Tela*, 2 (1967), 88—94.
- [7] R. W. Rosen and Z. Hashin, Effective thermal expansion coefficients and specific heats of composite materials, *Int. J. Eng. Sci.*, 8 (1970), 157—173.

- [8] J. R. Dryden, Elastic constants of spherulitic polymers, *J. Mech. Phys. Solids*, **36** (1988), 477—498.
- [9] T. Chen, Thermoelastic properties and conductivity of composites reinforced by spherically anisotropic particles, *Mech. Mater.*, **14** (1993), 257—268.
- [10] G. J. Dvorak, Thermal expansion of elastic-plastic composite materials, *J. Appl. Mech.*, **53** (1986), 737—743.
- [11] G. J. Dvorak, On uniform fields in heterogeneous media, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A431** (1990), 89—110.
- [12] B. Paul, Prediction of elastic constants of multiphase materials, *Trans. of the ASME*, **218** (1960), 36—41.
- [13] W. Voigt, Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper, *Wied. Ann.*, **38** (1889), 573—587.
- [14] A. Reuss, Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Enkristalle, *ZAMM*, **9** (1929), 49—58.
- [15] Z. Hashin, The elastic moduli of heterogeneous materials, *J. Appl. Mech.*, **29** (1962), 143—150.

Bounds of the Expansion Coefficients of Composites Reinforced by Spherically Isotropic Particles

He Linghui

(*University of Science and Technology of China, Hefei*
230026, P. R. China)

Liu Renhuai

(*Ji'nan University, Guangzhou 510632, P. R. China*)

Abstract

The present paper is devoted to the study of expansional behaviours of a composite reinforced by spherically isotropic particles. An exact relation is derived between the effective expansion coefficient and bulk modulus of the composite by using the concept of uniform fields in the matrix which is proposed here. Through obtaining the Paul-type bounds of the bulk modulus by using the extreme principle of energy, bounds of the effective expansion coefficient are also derived.

Key words composite, expansional behaviour, bounds