应用数学和力学，第18卷 第4期（1997年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

结构模糊有限元平衡方程的一种新解法*

吕恩琳[1]

（张汝清推荐，1996年1月26日收到）

摘　　要

本文将区间数方程组解的定义与结构有限元平衡方程的力学意义结合起来，针对由于材料性能的模糊性、结构边界条件的模糊性和载荷的模糊性而得到的模糊有限元平衡方程组，提出了一种快速而准确的解法，其计算量与普通有限元法几乎相等.

关键词　有限元平衡方程　模糊数　区间数方程

一、引　　言

在模糊有限元方法中，对平衡方程解法的研究具有十分重要的意义. 特别是对模糊有限元方法的实际应用而言，其关键就在于要寻找一种快速高效的平衡方程组解法. 在现有的模糊有限元平衡方程解法中[1]、[2]，都是把该方程组视为一般的模糊线性代数方程组，以模糊数、区间数的各种运算规则为基础去寻找解法. 本文在将模糊平衡方程组化为区间系数方程组之后，结合该方程组本身所固有的力学意义，提出了一种快速而准确的模糊有限元平衡方程解法，其计算量与普通有限元法几乎相等，从而为推动模糊有限元方法的深入研究和工程应用提供了有力工具.

二、结构模糊有限元平衡方程

在工程结构有限元分析中，当考虑结构材料的性能参数、边界条件和载荷的模糊性时，结构的刚度矩阵和载荷向量都是模糊的，从而结构的未知节点位移向量也将是模糊的，于是就得到结构的模糊有限元平衡方程[1]

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\}=\{\mathbf{P}\} \tag{2.1}$$

式中$[\mathbf{K}]$是模糊刚度矩阵，$\{\mathbf{U}\}$是模糊位移向量，$\{\mathbf{P}\}$是模糊载荷向量. 当采用L-R型模糊数作模糊信息的描述和处理时[3]，$[\mathbf{K}]$，$\{\mathbf{U}\}$，$\{\mathbf{P}\}$中的元素均为L-R型模糊数，可表示为

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{k}_{ij}&=(k^m_{ij},\ k^L_{ij},\ k^R_{ij})_{LR}\\ \mathbf{u}_j&=(u^m_j,\ u^L_j,\ u^R_j)_{LR}\\ \mathbf{p}_i&=(p^m_i,\ p^L_i,\ p^R_i)_{LR}\end{aligned}\right\}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

---

* 国家自然科学基金资助项目

1 重庆大学工程力学系，重庆 630044

n为结构自由度数．

对模糊平衡方程(2.1)作不同的水平截集，得到一系列系数为区间数的线性方程组

$$\begin{bmatrix} [\underline{k}_{11}, \bar{k}_{11}], & [\underline{k}_{12}, \bar{k}_{12}], & \cdots, & [\underline{k}_{1n}, \bar{k}_{1n}] \\ [\underline{k}_{21}, \bar{k}_{21}], & [\underline{k}_{22}, \bar{k}_{22}], & \cdots, & [\underline{k}_{2n}, \bar{k}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [\underline{k}_{n1}, \bar{k}_{n1}], & [\underline{k}_{n2}, \bar{k}_{n2}], & \cdots, & [\underline{k}_{nn}, \bar{k}_{nn}] \end{bmatrix}_\lambda \begin{Bmatrix} [\underline{u}_1, \bar{u}_1] \\ [\underline{u}_2, \bar{u}_2] \\ \vdots \\ [\underline{u}_n, \bar{u}_n] \end{Bmatrix}_\lambda = \begin{Bmatrix} [\underline{p}_1, \bar{p}_1] \\ [\underline{p}_2, \bar{p}_2] \\ \vdots \\ [\underline{p}_n, \bar{p}_n] \end{Bmatrix}_\lambda$$

式中$\underline{k}_{ij}$，$\bar{k}_{ij}$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$为λ水平截集下模糊刚度元素的上、下界端点值；$\underline{u}_j$，$\bar{u}_j$ $(j=1, 2, \cdots, n)$为λ水平截集下未知的模糊位移向量元素的上、下界端点值；$\underline{p}_i$，$\bar{p}_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$为λ水平截集下模糊载荷向量元素的上、下界端点值；它们分别构成区间数．上式可简记为

$$K^I U^I = P^I \tag{2.2}$$

方程(2.2)的解$U^I=\{[\underline{u}_1, \bar{u}_1], [\underline{u}_2, \bar{u}_2], \cdots, [\underline{u}_n, \bar{u}_n]\}^T$中各区间数$[\underline{u}_j, \bar{u}_j]$的上、下界端点值由下式确定：

$$\left.\begin{aligned} \underline{u}_j &= \min\{u_j \mid KU=P, \ K\in K^I, \ P\in P^I\}, \\ \bar{u}_j &= \max\{u_j \mid KU=P, \ K\in K^I, \ P\in P^I\}, \end{aligned}\right\} \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{2.3}$$

式中K为普通矩阵，P，U为普通列阵．

记方程(2.2)的解为$U^I=U^I_\lambda$，根据模糊分解定理[4]，方程(2.1)的解可由下式求得：

$$\mathbf{U} = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda U^I_\lambda \tag{2.4}$$

这说明，要求解模糊有限元平衡方程(2.1)，只需求解一系列区间方程组(2.2)即可．对于一般的区间数线性方程组，不少学者作了大量研究工作．E. Hansen和R. Smith[5]、[6]给出了求区间逆矩阵的方法，由于在求区间逆矩阵的过程中附加了限制条件，因而明显地限制了这种解法的广泛应用；王彩华等[1]、[2]提出了区间阵的迭代求解法和基于区间数分解的解法．这些方法推动了模糊有限元方法的研究和应用，但这些方法都是从纯数学的角度去研究区间方程的解法，没有利用式(2.2)所固有的物理意义．事实上，方程(2.2)中U^I随K^I和P^I的变化在很多情况下是有规律可循的，利用这些规律能快速而准确地找到U^I．下面先讨论几种特殊情况，然后再将它们综合起来．

三、材料性能的模糊性及方程解法

本节讨论当结构材料性能参数具有模糊性而结构所承受载荷为清晰时各结点模糊位移求法．

结构刚度除与结构的几何参数有关外，主要取决于材料性能参数，对各向同性材料，即为弹性模量E和泊松比ν．在这两个参数中，弹性模量E的变化对结构的力学响应影响较大，在以下讨论中将认为弹性模量E是模糊的，取泊松比ν是清晰的．在有限元法中，单元刚度阵计算式为：

$$[k]^e = \int_e [B]^T [D] [B] dv \tag{3.1}$$

式中$[D]$是包含相应材料性质的弹性矩阵．当弹性模量为模糊时弹性矩阵中的元素便都是模

糊数，如对于一般的弹性力学问题有：

$$[\mathbf{D}]=\frac{\mathbf{E}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot\begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & (1-2\nu)/2(1-\nu) & 0 & 0 \\ & \text{(对称)} & & & (1-2\nu)/2(1-\nu) & 0 \\ & & & & & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix}$$

式中$\mathbf{E}$为模糊弹性模量．$\mathbf{E}$可用L-R型模糊数描述为：

$$\mathbf{E}=(E_m,\ E_L,\ E_R)_{LR} \tag{3.2}$$

式中E_m为$\mathbf{E}$的主值，其值与不考虑弹性模量模糊性时的E值相同．现引入无量纲模糊数$\boldsymbol{\alpha}$：

$$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{E}/E_m$$

根据L-R型模糊数的数量积运算规则有[3]

$$\mathbf{E}=\boldsymbol{\alpha}E_m,\ \boldsymbol{\alpha}=(1,\ E_L/E_m,\ E_R/E_m)_{LR} \tag{3.3}$$

用$[\mathbf{D}]$代替式(3.1)的$[D]$，便得到单元的模糊刚度矩阵：

$$[\mathbf{k}]^e=\int_e[B]^T[\mathbf{D}][B]dv$$

$$=\boldsymbol{\alpha}\int_e[B]^T[D][B]dv=\boldsymbol{\alpha}[k_m]^e \tag{3.4}$$

式中$[k_m]^e$与普通的单元刚度阵相等．将上式所示模糊单刚迭加起来，得到结构的模糊总刚为

$$[\mathbf{K}]=\boldsymbol{\alpha}[K_m] \tag{3.5}$$

式中$[K_m]$与普通的结构总刚度矩阵相等．

将式(3.5)代入方程(2.1)，并注意到现在载荷是非模糊的，有：

$$\boldsymbol{\alpha}[K_m]\{\mathbf{U}\}=\{P\}$$

对上式作λ水平截集，得区间方程组

$$[\underline{\alpha},\ \bar{\alpha}]_\lambda[K_m]\{\underline{U},\ \bar{U}\}_\lambda=\{P\} \tag{3.6}$$

其解可表示为：

$$\{\underline{U},\ \bar{U}\}_\lambda=[K_m]^{-1}\{P\}/\{\underline{\alpha},\ \bar{\alpha}\}_\lambda$$

记

$$\{U_m\}=[K_m]^{-1}\{P\}=\{u_1^m,\ u_2^m,\ \cdots,\ u_n^m\}^T$$

根据式(2.3)，显然$\{\underline{U},\ \bar{U}\}_\lambda$的各分量为

$$[\underline{u}_j,\ \bar{u}_j]_\lambda=[u_j^m/\alpha_1,\ u_j^m/\alpha_2] \tag{3.7}$$

式中

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1=\bar{\alpha}_\lambda,\ \alpha_2=\underline{\alpha}_\lambda, & \text{当}u_j^m\geqslant 0 \\ \alpha_1=\underline{\alpha}_\lambda,\ \alpha_2=\bar{\alpha}_\lambda, & \text{当}u_j^m<0 \end{array}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\right\} \tag{3.8}$$

式(3.7)是区间方程组(3.6)的准确解．取一系列不同的$\lambda\in[0,\ 1]$值，再由式(2.4)便可构造出模糊位移解$\{\mathbf{U}\}$．需要指出的是，当取不同的λ值时，仅式(3.7)中α_1和α_2在变化，不需重

新求$u_j^m(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，因而计算量几乎与普通有限元法相等.

四、载荷的模糊性及方程解法

本节讨论仅作用于结构的载荷具有模糊性时各结点的模糊位移求法.

设共有l个外载，$\mathbf{f}_i$为第i个模糊外载，用L-R型模糊数描述为：

$$\mathbf{f}_i=(f_i^m,\ f_i^L,\ f_i^R)_{LR}\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$$

只要恰当地选取各载荷的隶属函数及左、右展形f_i^L，$f_i^R(i=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$，总可以引入一个无量纲模糊数$\boldsymbol{\beta}$：

$$\boldsymbol{\beta}=(1,\ \beta_L,\ \beta_R)_{LR}\tag{4.1}$$

使：

$$\mathbf{f}_i=\boldsymbol{\beta} f_i^m=(f_i^m,\ \beta_L f_i^m,\ \beta_R f_i^m)_{LR}\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ l)\tag{4.2}$$

当载荷为非结点载荷时必须等效地移置到结点上去. 例如，对于二维平面单元，当分布载荷为模糊时，其等效模糊结点载荷列阵为

$$\{\mathbf{p}\}^e=\int_s[N]^T\{\mathbf{f}\}^e t ds\tag{4.3}$$

式中$[N]$为形函数矩阵，$\{\mathbf{f}\}^e$为模糊分布载荷，t为单元厚度.当载荷为模糊集中载荷$\{\mathbf{f}\}^e$时，单元等效模糊结点载荷$\{\mathbf{p}\}^e$为

$$\{\mathbf{p}\}^e=[N]^T\{\mathbf{f}\}^e\tag{4.4}$$

考虑式(4.2)，则式(4.3)、(4.4)可统一表示为

$$\{\mathbf{p}\}^e=\boldsymbol{\beta}\{p^m\}^e\tag{4.5}$$

式中$\{p^m\}^e$与普通有限元法中的单元等效结点载荷列阵相同. 对于其它类型的单元，也可得到如式(4.5)所示关系式.

由单元的模糊等效结点载荷可建立结构的总体载荷列阵$\{\mathbf{P}\}$，显然有

$$\{\mathbf{P}\}=\boldsymbol{\beta}\{P^m\}\tag{4.6}$$

式中$\{P^m\}$是$\{\mathbf{P}\}$中各元素的主值组成的向量，其值与普通有限元法中的总体载荷列阵相等.将式(4.6)代入式(2.1)，并注意到在本节中结构总刚是非模糊的，得

$$[K]\{\mathbf{U}\}=\boldsymbol{\beta}\{P^m\}$$

对上式作λ水平截集，得区间方程组

$$[K]\{\underline{U},\ \overline{U}\}_\lambda=[\underline{\beta},\ \overline{\beta}]_\lambda\{P^m\}\tag{4.7}$$

记

$$\{U^m\}=[K]^{-1}\{P^m\}=\{u_1^m,\ u_2^m,\ \cdots,\ u_n^m\}^T$$

根据式(2.3)，得方程(4.7)的解$\{\underline{U},\ \overline{U}\}_\lambda$的各分量为

$$[\underline{u}_j,\ \overline{u}_j]_\lambda=[\beta_1 u_j^m,\ \beta_2 u_j^m]\qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{4.8}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\beta_1=\underline{\beta}_\lambda,\ \beta_2=\overline{\beta}_\lambda,\qquad \text{当}u_j^m\geqslant 0\\&\beta_1=\overline{\beta}_\lambda,\ \beta_2=\underline{\beta}_\lambda,\qquad \text{当}u_j^m<0\end{aligned}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\right\}\tag{4.9}$$

式(4.8)是方程(4.7)的准确解. 取一系列不同的$\lambda\in[0,\ 1]$，再由式(2.4)便可构造出模糊位移解$\{\mathbf{U}\}$. 显然，此时的计算量也几乎与普通有限元法相同.

五、一般模糊有限元平衡方程的解法

现在讨论当结构材料的弹性模量和作用于结构的载荷均具有模糊性时各结点模糊位移的求法。根据前两节的处理方法，此时平衡方程可写为

$$\boldsymbol{\alpha}[K_m]\{\mathbf{U}\}=\boldsymbol{\beta}\{P^m\} \tag{5.1}$$

对上式作 λ 水平截集，得区间方程组：

$$[\underline{\alpha},\ \bar{\alpha}]_\lambda[K_m]\{\underline{U},\ \bar{U}\}_\lambda=[\underline{\beta},\ \bar{\beta}]_\lambda\{P^m\} \tag{5.2}$$

记

$$\{U^m\}=[K_m]^{-1}\{P^m\}=\{u_1^m,\ u_2^m,\ \cdots,\ u_n^m\}^T$$

实际上$\{U^m\}$与普通有限元法位移解向量相等。根据式(2.3)，方程(5.2)的解$\{\underline{U},\ \bar{U}\}_\lambda$的各分量为

$$[\underline{u}_j,\ \bar{u}_j]_\lambda=[(\beta_1/\alpha_1)u_j^m,\ (\beta_2/\alpha_2)u_j^m] \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{5.3}$$

式中α_1，α_2，β_1，β_2的取法与式(3.8)、(4.9)相同。式(5.3)是方程组(5.2)的准确解。取一系列不同的$\lambda\in[0,\ 1]$，再由式(2.4)便可构造出模糊平衡方程(5.1)的位移解$\{\mathbf{U}\}$。

六、边界条件的模糊性及其处理

在结构分析中必须给定位移边界条件，否则无法求解平衡方程。本节讨论模糊支承条件的处理方法。

位移边界条件的模糊性主要来源于边界的支承条件。支承条件可用弹性支座来模拟，即受约束处如果发生位移，该支座便向此结点施加一个阻止位移的力，其大小正比于位移值，这可以看成被约束结点通过一个弹簧连接在刚性支座上。在普通有限元法中处理弹性支座的方法是：设第r个位移分量处有刚度系数为k_s的弹簧约束，只须将k_s加到总刚度矩阵主对角线上第r个元素上去。由于刚性支座可以看成是刚度系数为无穷大的弹性支座，所以k_s可以在零到无穷大之间变化。位移边界条件的模糊性也正是来源于k_s的模糊性。此时可用模糊刚度系数$\mathbf{k}_s$来描述支承条件的模糊性。对$\mathbf{k}_s$恰当地选取左、右展形及隶属函数，可找到常数C_s，使：

$$\mathbf{k}_s=C_s\mathbf{E}=\boldsymbol{\alpha}(C_sE_m) \tag{6.1}$$

式中$\mathbf{E}$和$\boldsymbol{\alpha}$由式(3.2)和(3.3)定义。显然，将$\mathbf{k}_s$加到$\mathbf{k}_{rr}$上之后，总刚仍具有式(3.5)的形式。这说明对于支承条件模糊性的处理方法与处理材料弹性模量模糊性的途径是一致的。当C_s取一很大的数值时，相当于普通有限元法中用大数法处理刚性支座。

七、结　语

有限元法是当今工程结构分析中使用最普遍的方法，模糊有限元法较之普通有限元法向人们提供了更多的有实际价值的辅助信息。但是，如果为了求得这些辅助信息，要花费比普通有限元法多十几倍甚至几十倍的计算量，则将会严重限制这种方法的推广应用。本文将模糊数学理论、区间方程理论和有限元平衡方程的物理意义结合起来，提出了一种快速而又准确的模糊有限元平衡方程解法，其计算量与普通有限元法几乎相同。这为进一步深入研究模

糊有限元理论、方法以及推广其应用提供了有力的工具。

参 考 文 献

[1] 王彩华、朱恒山，基于L-R型模糊数运算法则的一种结构模糊方程的解法，《模糊分析设计的理论与应用》，第三届全国模糊分析设计学术会议论文集，中国建筑工业出版社（1993），35—38.

[2] 禹智涛、吕恩琳、王彩华，结构模糊有限元平衡方程的一种解法，重庆大学学报，19(1)（1996），53—58.

[3] D. 杜布瓦，H. 普哈德著，《模糊集与模糊系统——理论和应用》，江苏省模糊数学专业委员会译，江苏科学技术出版社（1987），70—76.

[4] 王彩华、宋连天主编，《模糊论方法学》，中国建筑工业出版社（1988），23—26.

[5] E. Hansen, Interval arithmetic in matrix computions, Part Ⅰ, *SIAM, J.*, *SeriesB*, *Numerical Analysis*, 2 (1965), 308—320.

[6] E. Hansen, Interval arithmetic in matrix computions, Part Ⅱ, *SIAM J.*, *Series B*, *Numerical Analysis*, 2 (1967), 1—9.

A New Solution to Structural Fuzzy Finite Element Equilibrium Equations (SFFEEE)

Lü Enling

(*Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing* 630044, *P. R. China*)

Abstract

A speedy accurate solution to structural fuzzy finite element equilibrium equations (SFFEEE), by combining the definition of the solution of interval equations with the mechanical meaning of the structural finite element equilibrium equations (SFEEE), was put forward. The fuzzification of the SFFEEE, which is discussed in this paper, originates from that of materical property, structural boundary conditions and external loading. The computing quantity of this solution is almost equal to that of the general finite element method (GFEM).

Key words finite element equilibrium equations, fuzzy numbers, interval equations