应用数学和力学，第18卷 第4期（1997年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

结构设计中的高阶灵敏度*

李　书[1]　　冯太华[2]　　范绪箕[3]

（郭瑞锋推荐，1995年2月22日收到，1995年6月16日收到修改稿）

摘　　要

本文将静力结构设计问题归结为一类代数特征值反问题．由于灵敏度计算是解决这类问题的重要环节和主要工作，因此在多元函数论的基础上导出了适合于结构设计的高阶灵敏度表达式，该表达式的特点有坚实的数学基础和实用价值．

关键词　结构设计　灵敏度　反问题

一、引　　言

结构设计是航空航天领域最重要的研究内容之一，它的本质是参数型代数特征值反问题．在解决这类问题时，灵敏度（即特征值和特征向量关于设计参数的导数）分析是至关重要的，这是因为灵敏度为设计者提供了重要的信息，可以帮助设计者优化结构设计或使结构的灵敏度最小化。目前国内外研究该问题的文献不少，但由于高阶灵敏度分析比较繁琐，难度较大，基本上集中在一阶灵敏度的研究[1],[2]．实际问题中仅知道一阶灵敏度往往是不够的，还需要更高阶灵敏度的信息．特别是遇到由于参数改变量较大，特征导数需要用Taylor级数逼近时，高阶灵敏度计算就尤为重要．

文[3]研究了含参数矩阵特征导数的解析性以及摄动展开问题，由于是从数学角度考虑的，不能直接利用．而结构设计是一个工程实际问题，所求参数必须有明确的物理意义，本文根据多元函数的一个隐函数定理[4]，得到一个相应的推论，利用该推论导出了适合结构设计的高阶灵敏度表达式，该表达式具有普遍意义．

二、结构设计问题的数学描述

为了叙述方便，首先定义一些数学符号的意义．$R^{m\times n}$表示$m\times n$阶实矩阵，$R^n=R^{n\times 1}$表示实n维列向量，$SR^{n\times n}$表示$n\times n$阶实对称矩阵，$\det(A)$表示矩阵A的行列式，I_m为单位阵，$N(B)$表示B点的某个邻域．

---

* 航空科学青年基金资助项目

1 河海大学土木学院工程力学系，南京 210098

2 南京航空航天大学104教研室，南京 210016

3 上海交通大学，上海 200030

结构设计问题的数学本质是确定一个满足给定条件的刚度矩阵问题，我们将其归纳为如下的特征值问题：

对于

$$K(p)x_i(p)=\lambda_i(p)x_i(p)\qquad(i=1,\ \cdots,\ n)\tag{2.1}$$

其中$p=(p_1,\ \cdots,\ p_N)\in R^N$，$K(p)$是刚度矩阵，$\lambda_i(p)$是特征值，$x_i(p)$为相应的特征向量，如果给定$\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$，并且

$$x_i^Tx_j=\delta_{ij}\tag{2.2}$$

求设计参数p，使得

$$\lambda_i(p)=\lambda_i,\ x_i(p)=x_i\qquad(i=1,\ \cdots,\ n)\tag{2.3}$$

三、数学基础

现在我们给出一个隐函数定理，其证明过程可参见[4].

定理　如果实值函数$f_i(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_m,\ \eta_1,\ \cdots,\ \eta_h)$，$(i=1,\ \cdots,\ m)$ 在 R^{m+h} 的原点的某个邻域内是$m+h$个实变量的实解析函数，并且

$$f_i(0,\ \cdots,\ 0)=0\qquad(i=1,\ \cdots,\ m)$$

$$\det\frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(\xi_1,\cdots,\xi_m)}\bigg|_{\substack{\xi_i=0\ \ (i=1,\cdots,m)\\ \eta_j=0\ \ (j=1,\cdots,h)}}\neq 0$$

则方程$f_i(\xi_1,\cdots,\xi_m,\ \eta_1,\cdots,\eta_h)=0\,(i=1,\cdots,m)$有唯一解$\xi_i=g_i(\eta_1,\cdots,\eta_h)\ (i=1,\cdots,m)$，并且当$\eta_1=\cdots=\eta_h=0$时，$\xi_1=\cdots=\xi_m=0$，$\xi_i=g_i(\eta_1,\cdots,\eta_h)\,(i=1,\cdots,m)$在$R^h$的原点的某个邻域内解析.

基于这个定理将导出关于在原点邻域参数的灵敏度，由于我们研究的是实际问题，所求参数要有意义就不能在原点的邻域内. 但我们从上述定理中可以得到下面的推论，证明过程与上述定理相同.

推论　如果实值函数$f_i(\xi_1,\cdots,\xi_m,\ \eta_1,\cdots,\eta_h)\,(i=1,\cdots,m)$在$R^{m+h}$的一点 $A=(\underbrace{0,\cdots,0}_{m},\ \eta_1^*,\cdots,\eta_h^*)$的某个邻域内是$m+h$ 个实变量的实解析函数，并且

$$f_i(\underbrace{0,\cdots,0}_{m},\ \eta_1^*,\ \cdots\eta_h^*)=0\qquad(i=1,\cdots,m)$$

$$\det\frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(\xi_1,\cdots,\xi_m)}\bigg|_{\substack{\xi_i=0\ \ (i=1,\cdots,m)\\ \eta_j=\eta_j^*\ \ (j=1,\cdots,h)}}\neq 0$$

则方程 $f_i(\xi_1,\cdots,\xi_m,\ \eta_1,\cdots,\eta_h)=0\ \ (i=1,\cdots,m)$有唯一解$\xi_i=g_i(\eta_1,\cdots,\eta_h)\ \ (i=1,\cdots,m)$，并且当$\eta_j=\eta_j^*\ \ (j=1,\cdots,h)$时，$\xi_1=\cdots=\xi_m=0$，$\xi_i=g_i(\eta_1,\cdots,\eta_h)\ \ (i=1,\cdots,m)$在$R^h$的一个点$B=(\eta_1^*,\cdots,\eta_h^*)$的某个邻域内解析.

根据本文第二节的数学描述，令

$$X=[x_1,\cdots,x_n],\ X_2=[x_2,\cdots,x_n]\tag{3.1}$$

如果$p=p^*=(p_1^*,\cdots,p_N^*)\in R^N$为所求，则由(2.1)，(2.2)和(2.3)式，有

$$X^TK(p^*)X=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \Lambda_2\end{bmatrix},\ \Lambda_2=\begin{bmatrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix},\qquad \lambda_1\notin\lambda(\Lambda_2)\tag{3.2}$$

令

$$\tilde{K}(p)=X^TK(p)X=\begin{bmatrix}\tilde{k}_{11}(p) & \tilde{k}_{21}^T(p)\\ \tilde{k}_{21}(p) & \tilde{k}_{22}(p)\end{bmatrix}\quad \tilde{k}_{11}(p)\in R^1,\ \tilde{k}_{21}(p)\in R^{n-1} \tag{3.3}$$

$$(f_1(z,p),\cdots,f_{n-1}(z,p))^T=\tilde{k}_{21}(p)+[\tilde{k}_{22}(p)-\tilde{k}_{11}(p)I]z-z\tilde{k}_{21}^T(p)z$$

$$p\in R^N,\ z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1})^T\in R^{n-1} \tag{3.4}$$

由式(3.4)可见，对$z\in R^{n-1}$和$p\in N(p^*)$，

$$(f_1(z,p),\cdots,f_{n-1}(z,p))^T$$

是解析的，并且$f_i(0,p^*)=0$ $(i=1,\cdots,n-1)$，$K(p^*)$是对称正定阵，因此

$$\det\frac{\partial(f_1,\cdots,f_{n-1})}{\partial(\zeta_1,\cdots,\zeta_{n-1})}\bigg|_{z=0,p=p^*}=\det(\Lambda_2-\lambda_1I)\neq 0$$

由推论知，方程

$$f_i(z,\ p)=0\qquad (i=1,\cdots,\ n-1) \tag{3.5}$$

在点$p^*=(p_1^*,\cdots,p_N^*)$的某个邻域$N(p^*)$内有唯一解析解$z=z(p)$，并且$z(p^*)=0$。

由(3.3)～(3.5)式可见，$z(p)$满足

$$\tilde{K}(p)\begin{bmatrix}1\\ z(p)\end{bmatrix}=(\tilde{k}_{11}(p)+\tilde{k}_{21}^T(p)z(p))\begin{bmatrix}1\\ z(p)\end{bmatrix},\qquad p\in N(p^*) \tag{3.6}$$

令

$$\lambda_1(p)=\tilde{k}_{11}(p)+\tilde{k}_{21}^T(p)z(p),\ x_1(p)=x_1+X_2z(p) \tag{3.7}$$

由(3.3)、(3.6)和(3.7)式，有

$$K(p)x_1(p)=\lambda_1(p)x_1(p),\qquad p\in N(p^*) \tag{3.8}$$

由(3.7)式可见，$\lambda_1(p)$和$x_1(p)$在$N(p^*)$内解析，并且

$$\lambda_1(p^*)=\lambda_1,\ x_1(p^*)=x_1 \tag{3.9}$$

四、高阶灵敏度的推导

将式(3.8)两边乘以$x_1^T(p)$，并稍做变化得到

$$\lambda_1(p)=\frac{x_1^T(p)K(p)x_1(p)}{x_1^T(p)x_1(p)},\qquad p\in N(p^*) \tag{4.1}$$

对(4.1)式两边求导后，利用(3.8)式加以整理得

$$\frac{\partial\lambda_1(p)}{\partial p_i}=\left[x_1^T(p)\frac{\partial K(p)}{\partial p_i}x_1(p)\right]\Big/x_1^T(p)x_1(p),\qquad p\in N(p^*),\ i=1,\cdots,N \tag{4.2}$$

由(3.9)式，得

$$\left(\frac{\partial\lambda_1(p)}{\partial p_i}\right)_{p=p^*}=x_1^T\left(\frac{\partial K(p)}{\partial p_i}\right)_{p=p^*}\cdot x_1,\qquad (i=1,\cdots,N) \tag{4.3}$$

对式(3.8)两边求导，并通过移项，得

$$[\lambda_1(p)I-K(p)]\frac{\partial x_1(p)}{\partial p_i}=\left[\frac{\partial K(p)}{\partial p_i}-\frac{\partial\lambda_1(p)}{\partial p_i}I\right]x_1(p),\qquad p\in N(p^*)\qquad (i=1,\ \cdots,\ N) \tag{4.4}$$

并且由式(3.2)、(3.7)及$z(p^*)=0$，(4.4)式左端可写成

$$[\lambda_1(p)I-K(p^*)]\left(\frac{\partial x_1(p)}{\partial p_i}\right)_{p=p^*}=X\begin{bmatrix}0&0\\0&\lambda_1 I-\Lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\(\partial z(p)/\partial p_i)_{p=p^*}\end{bmatrix}\tag{4.5}$$

由式(2.2)、(3.1)可知

$$X^TX=I\tag{4.6}$$

又因为$\lambda_1\notin\lambda(\Lambda_2)$，则由式(4.4)和(4.5)，有

$$\begin{bmatrix}0\\(\partial z(p)/\partial p_i)_{p=p^*}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&(\lambda_1 I-\Lambda_2)^{-1}\end{bmatrix}X^T\left[\left(\frac{\partial K(p)}{\partial p_i}\right)_{p=p^*}-\left(\frac{\partial\lambda_i(p)}{\partial p_i}\right)_{p=p^*}\cdot I\right]x_1$$

由(3.7)式，有

$$\left(\frac{\partial x_1(p)}{\partial p_i}\right)_{p=p^*}=[x_1,\ X_2]\begin{bmatrix}0\\(\partial z(p)/\partial p_i)_{p=p^*}\end{bmatrix}$$

$$=X_2(\lambda_1 I-\Lambda_2)^{-1}X_2^T\left(\frac{\partial K(p)}{\partial p_i}\right)_{p=p^*}\cdot x_1\tag{4.7}$$

与(4.3)和(4.7)式推导过程相同，由(4.2)和(4.4)式可分别导出下面两式

$$\left(\frac{\partial^s\lambda_1(p)}{\partial p_{i_1}\cdots\partial p_{i_s}}\right)_{p=p^*}=x_1^T\left(\frac{\partial^s K(p)}{\partial p_{i_1}\cdots\partial p_{i_s}}\right)_{p=p^*}x_1$$
$$+\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{r=0}^{s-l}\sum_{(t_1,\cdots,t_{s-1})_{l-1,r}}\left(\frac{\partial^r x_1(p)}{\partial p_{t_l}\cdots\partial p_{t_{l+r-1}}}\right)^T_{p=p^*}$$
$$\cdot\left[\frac{\partial^{l-1}}{\partial p_{t_1}\cdots\partial p_{t_{l-1}}}\left(\frac{\partial K(p)}{\partial p_{i_1}}\right)\right]_{p=p^*}\left[\frac{\partial^{s-l-r}x_1(p)}{\partial p_{t_{l+r}}\cdots\partial p_{t_{s-1}}}\right]_{p=p^*}\tag{4.8}$$

$$\left(\frac{\partial^s x_1(p)}{\partial p_{i_1}\cdots\partial p_{i_s}}\right)_{p=p^*}=X_2[\lambda_1 I-\Lambda_2]^{-1}X_2^T\left\{\left(\frac{\partial^s K(p)}{\partial p_{i_1}\cdots\partial p_{i_s}}\right)_{p=p^*}\cdot x_1\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{s-1}\sum_{(t_1,\cdots,t_s)_l}\left(\frac{\partial^l}{\partial p_{t_1}\cdots\partial p_{t_l}}[K(p)-\lambda_1(p)I]\right)_{p=p^*}\left(\frac{\partial^{s-l}x_1(p)}{\partial p_{t_{l+1}}\cdots\partial p_{t_s}}\right)_{p=p^*}\right\}\tag{4.9}$$

上面二式中，$s=2,3\cdots$和自然数$i_1,\cdots,i_s\in\{1,\cdots,N\}$（$i_1,\cdots,i_s$中可以有一些相同）。符号$\sum\limits_{(t_1,\cdots,t_{s-1})_{l-1,r}}$的意思是$i_2,\cdots i_s$作为$s-1$个足标，从$\{i_2,\cdots,i_s\}$中任取$l-1\,(1\leqslant l\leqslant s-1)$个足标$t_1,\cdots,t_{l-1}$，从$\{i_2,\cdots,i_s\}\backslash\{t_1,\cdots,t_{l-1}\}$中任取$r\,(r\leqslant s-l)$个足标$t_l,\cdots,t_{l+r-1}$，$\{i_2,\cdots,i_s\}$中余下的足标作为$t_{l+r},\cdots,t_{s-1}$，则和符号$\sum\limits_{(t_1,\cdots,t_{s-1})_{l-1,r}}$是对$i_2,\cdots,i_s$的所有这样的组合求和。符号$\sum\limits_{(t_1,\cdots,t_s)_l}$是把$i_1,\cdots,i_s$作为$s$个足标，从$\{i_1,\cdots,i_s\}$中任取$l\,(1\leqslant l\leqslant s-1)$个足标$t_1,\cdots,t_l$，$(i_1,\cdots,i_s)$中余下的足标记为$t_{l+1},\cdots,t_s$，和符号$\sum\limits_{(t_1,\cdots,t_s)_l}$是对$i_1,\cdots,i_s$的所有这样的组合求和。

在以上推导过程中，λ_1是任意一个给定特征值，x_1为与λ_1相应的特征向量，显然我们推导得到的(4.3)、(4.7)、(4.8)和(4.9)式可以用来计算任何特征值和特征向量关于参数的灵

敏度.

为了表示清楚和使用方便，设λ_h是$K(p^*)$的任一特征值，x_h为相应的特征向量，对问题(2.1)有$\lambda_h(p^*)=\lambda_h$，$x_h(p^*)=x_h$ $(h=1,\cdots,n)$，令

$$\hat{X}_h=[x_1,\cdots,x_{h-1},x_{h+1},\cdots,x_n],\quad \hat{\Lambda}_h=\mathrm{diag}[\lambda_1,\cdots,\lambda_{h-1},\lambda_{h+1},\cdots,\lambda_n] \tag{4.10}$$

则由(4.3)、(4.7)、(4.8)和(4.9)式，得下面几个关于灵敏度的表达式

$$\left(\frac{\partial\lambda_h(p)}{\partial p_i}\right)_{p=p^*}=x_h^T\left(\frac{\partial K(p)}{\partial p_i}\right)_{p=p^*}\cdot x_h \qquad (i=1,\cdots,N) \tag{4.11}$$

$$\left(\frac{\partial x_h(p)}{\partial p_i}\right)_{p=p^*}=\hat{X}_h(\lambda_h I-\hat{\Lambda}_h)^{-1}\hat{X}_h^T\left(\frac{\partial K(p)}{\partial p_i}\right)_{p=p^*}\cdot x_h \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^s\lambda_h(p)}{\partial p_{i_1}\cdots\partial p_{i_s}}\right)_{p=p^*}&=x_h^T\left(\frac{\partial^s K(p)}{\partial p_{i_1}\cdots\partial p_{i_s}}\right)_{p=p^*}\cdot x_h\\&+\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{r=0}^{s-l}\sum_{(t_1,\cdots,t_{s-1})_{l-1,r}}\left(\frac{\partial^r x_h(p)}{\partial p_{t_l}\cdots\partial p_{t_{l+r-1}}}\right)_{p=p^*}^T\\&\cdot\left[\frac{\partial^{l-1}}{\partial p_{t_1}\cdots\partial p_{t_{l-1}}}\left(\frac{\partial K(p)}{\partial p_{i_h}}\right)\right]_{p=p^*}\left[\frac{\partial^{s-l-r}x_h(p)}{\partial p_{t_{l+r}}\cdots\partial p_{t_{s-1}}}\right]_{p=p^*}\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^s x_h(p)}{\partial p_{i_1}\cdots\partial p_{i_s}}\right)_{p=p^*}&=\hat{X}_h[\lambda_h I-\hat{\Lambda}_h]^{-1}\hat{X}_h^T\left\{\left(\frac{\partial^s K(p)}{\partial p_{i_1}\cdots\partial p_{i_s}}\right)_{p=p^*}\cdot x_h\right.\\&\left.+\sum_{l=1}^{s-1}\sum_{(t_1,\cdots,t_s)_l}\left[\frac{\partial^l}{\partial p_{t_1}\cdots\partial p_{t_l}}[K(p)-\lambda_h(p)I]\right]_{p=p^*}\left(\frac{\partial^{s-l}x_h(p)}{\partial p_{t_{l+1}}\cdots\partial p_{t_s}}\right)_{p=p^*}\right\}\end{aligned} \tag{4.14}$$

利用(4.11)～(4.14)式，可以对结构设计问题进行灵敏度分析和计算，但要求已知全部特征值和特征向量.

五、数 值 算 例

该例题是一个结构设计问题. 对于一个含参数的刚度矩阵$K(p)$

$$K(p)=\begin{bmatrix}p_1^2 & 2p_1p_2 & p_2p_3\\ 2p_1p_2 & p_2^2 & p_1p_3\\ p_2p_3 & p_1p_3 & p_3^2\end{bmatrix}$$

求出p，使得刚度阵$K(p)$具有给定的特征值λ_i.

如果$\lambda=(0.39,\ 1.00,\ 40.60)$，$p^*=(1,\ 1,\ 2)$，此时特征值关于参数 p 的一阶和二阶灵敏度分别列入表1和表2中.

表1　一阶特征值灵敏度

i	1	2	3
$\partial\lambda_1/\partial p_i$	0.3685	−1.0000	2.6315
$\partial\lambda_2/\partial p_i$	0.3685	−1.0000	2.6315
$\partial\lambda_3/\partial p_i$	0.2592	0.0000	3.7408

表2　二阶特征值灵敏度

i	1	2	3
$\partial^2\lambda_1/\partial p_i^2$	0.5870	1.0000	0.4130
$\partial^2\lambda_2/\partial p_i^2$	0.5870	−1.0000	0.4130
$\partial^2\lambda_3/\partial p_i^2$	−0.6963	0.0000	0.6963

参 考 文 献

[1] H. M. Adelman and R. T. Haftka, Sensitivity analysis of discrete structural systems, *AIAA J.*, 24(5) (1986), 823—832.

[2] R. B. Nelson, Simplified calculation of eigenvector derivatives, *AIAA J.*, 14(9) (1976), 1201—1205.

[3] Sun Jiguang, Eigenvalues and eigenvectors of a matrix dependent on several parameters, *J. Comp. Math.*, 3(4) (1985), 351—364.

[4] S. Bochner and W. T. Martin, *Several Complex Variables*, Princeton (1948).

Higher Order Sensitivities in Structural Static Design

Li Shu

(Department of Engineering Mechanics, Institute of Civil Engineering, Hehai University, Nanjing 210098, *P. R. China)*

Feng Taihua

(Department of Aircraft Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, *P. R. China)*

Fan Xuqi

(Department of Dynamics Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, *P. R. China)*

Abstract

In this paper, structural static design is considered as a kind of inverse algebraic eigenvalue problem. It is the most important task for the inverse problem to compute the sensitivities of eigenvalues and eigenvectors. Therefore, a complete set of higher order sensitivity expressions has been presented based on the complex variables theory. These expressions have solid mathematical foundation and practical significance.

Key words structural design, sensitivity analysis, inverse problem