应用数学和力学，第18卷 第4期（1997年4月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于图的(g,f)-因子分解

马润年[1]　　高行山[2]

（张汝清推荐，1995年7月10收到，1996年4月22日收到修改稿）

摘　要

设G是一个图，g和f是定义在图G的顶点集$V(G)$上的两个非负整数值函数且$g\leqslant f$.图G的一个(g,f)-因子是G的一个支撑子图F，使对所有的$x\in V(G)$有$g(x)\leqslant d_F(x)\leqslant f(x)$. 若$G$本身是一个$(g,f)$-因子，则称$G$是一个$(g,f)$-图.若$G$的边能分解成一些边不交的$(g,f)$-因子，则称$G$是$(g,f)$-因子可分解的.本文给出图$G$是$(g,f)$-因子可分解的一个充分条件.

关键词　图　因子　因子分解

一、引　言

设G是一个有限图（没有loop），$V(G)$和$E(G)$分别是G的顶点集和边集. 对每个$x\in V(G)$，用$d_G(x)$表示x在G中的次数. 设g,f是定义在$V(G)$上的两个非负整数值函数且$g\leqslant f$'表示为$g, f:V(G)\to Z^+$，其中Z^+表示非负整数集. 图G的一个(g,f)-因子是G的一个支撑子图F，使对所有的$x\in V(G)$有$g(x)\leqslant d_F(x)\leqslant f(x)$，称$F$是$G$的一个$(g,f)$-因子. 若$G$本身是一个$(g,f)$-因子，则说$G$是一个$(g,f)$-图. 若对任意的$x\in V(G)$有$g(x)=a$，$f(x)=b$，则称$G$的一个$(g,f)$-因子为$G$的一个$[a,b]$-因子. 若$a=b$，则称$[a,b]$-因子为$a$-因子. 类似地，若$G$本身是一个$[a,b]$-因子或$a$-因子，则说$G$是一个$[a,b]$-图或$a$-图.若$G$的边能分解成$m$个边不交的$(g,f)$-因子$F_1$，$F_2\cdots$，$F_m$，则称$F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_m$为$G$的一个$(g,f)$-因子分解，并称$G$是$(g,f)$-因子可分解的.

文[1]给出了许多r-因子分解和$[a,b]$-因子分解的结果. 文[2]主要研究了$[a,b]$-因子分解. 文[3]和文[4]给出了图的(g,f)-因子分解的概念并给出了一些结果（例如对任意的$x\in V(G)$ $f(x)\equiv g(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$）. 文[5]和文[6]主要研究了$(g,f)$-因子分解，并给出$(g,f)$-因子可分解的一些充分条件. 本文是文[5]和[6]的一个扩展. 参考文献中许多关于因子分解的结论都可作为本文的直接推论.

二、主要结果

定理　设G是一个图，$g,f:V(G)\to Z^+$，若对所有的$x\in V(G)$满足条件

$$mg(x)+m_1(x)\leqslant d_G(x)\leqslant mf(x)-m_2(x)$$

1 空军电讯工程学院数学室，西安 710077
2 西北工业大学，西安 710072

其中

$$m_1(x)=\begin{cases}0, & 若g(x)\equiv 0(\bmod 2)\\ m-1, & 若g(x)\equiv 1(\bmod 2)\end{cases}$$

$$m_2(x)=\begin{cases}0, & 若f(x)\equiv 0(\bmod 2)\\ m-1, & 若f(x)\equiv 1(\bmod 2)\end{cases}$$

则G能分解成m个(g,f)-因子（其中m是一个正整数），即G是(g,f)-因子可分解的.

为了证明本定理给出下面的引理。

引理[2] 设G是一个n-边-连通图（$n\geqslant 1$），θ是一个实数使$0\leqslant\theta\leqslant 1$，且$g$，$f:V(G)\to Z^+$. 若下列三个条件成立，则$G$有一个（$g,f$）-因子.

(1) 对所有$x\in V(G)$，$g(x)\leqslant\theta d_G(x)\leqslant f(x)$.

(2) G至少有一顶点u使$g(u)<f(u)$；或对所有$x\in V(G)$，$g(x)=f(x)$，且$\sum\limits_{x\in V(G)}f(x)$是偶数.

(3) 集合$\{d_G(x)\mid g(x)=f(x),x\in V(G)\}$和集合$\{f(x)\mid g(x)=f(x),x\in V(G)\}$由偶数组成.

定理之证明 对m用归纳法. 若$m=1$，结论显然成立. 下面考虑$m>1$. 不失一般性，我们假设G是连通的.

设

$$V_1=\{x\in V(G)\mid g(x)\equiv 0(\bmod 2),\ d_G(x)=mg(x)\}$$

$$V_2=\{x\in V(G)\backslash V_1\mid f(x)\equiv 0(\bmod 2),\ d_G(x)=mf(x)\}$$

$$V_3=V(G)\backslash(V_1\cup V_2),\ \theta=1/m$$

且定义$V(G)$上的两个函数q和p如下

$$q(x)=\begin{cases}g(x), & 若x\in V_1\\ f(x), & 若x\in V_2\\ [(1/m)d_G(x)], & 若x\in V_3\end{cases}\qquad p(x)=\begin{cases}g(x), & 若x\in V_1\\ f(x), & 若x\in V_2\\ [(1/m)d_G(x)]+1, & 若x\in V_3\end{cases}$$

其中$[(1/m)d_G(x)]$表示$(1/m)d_G(x)$的最大整数部分. 很显然对任意的$x\in V(G)$有$q(x)\leqslant p(x)$，且q，p，$\theta=1/m$满足引理的三个条件. 因此G有一个(q,p)-因子F，且可证对任意的$x\in V(G)$有

$$g(x)\leqslant q(x)\leqslant(1/m)d_G(x)\leqslant p(x)\leqslant f(x)$$

事实上，对每个$x\in V_1$，

$$q(x)=p(x)=g(x)=(1/m)d_G(x)\leqslant(1/m)(mf(x)-m_2(x))\leqslant f(x)$$

对每个$x\in V_2$，

$$q(x)=p(x)=f(x)=(1/m)d_G(x)\geqslant(1/m)(mg(x)+m_1(x))\geqslant g(x)$$

对每个$x\in V_3$，

$$q(x)=[(1/m)d_G(x)]\geqslant[(1/m)(mg(x)+m_1(x))]=g(x)$$

若$x\in V_3$，且$f(x)\equiv 0(\bmod 2)$，则

$$p(x)=[(1/m)d_G(x)]+1\leqslant(1/m)d_G(x)+1<(1/m)(mf(x))+1=f(x)+1$$

即$p(x)<f(x)+1$，因不等式的两端是整数，因此$p(x)\leqslant f(x)$. 若$x\in V_3$，且$f(x)\equiv 1(\bmod 2)$，则

$$\begin{aligned}p(x)&=[(1/m)d_G(x)]+1\leqslant[(1/m)(mf(x)-m_2(x))]+1\\&=[(1/m)(mf(x)-m+1)]+1=f(x)\end{aligned}$$

因此，对任何$x\in V(G)$，

$$g(x)\leqslant q(x)\leqslant(1/m)d_G(x)\leqslant p(x)\leqslant f(x)$$

即F还是G的一个(g,f)-因子．

令$\bar{G}=G-E(F)$，则对一切$x\in V(G)$，$d_{\bar{G}}(x)=d_G(x)-d_F(x)$．对每个$x\in V_1$，

$$\begin{aligned}d_{\bar{G}}(x)&=d_G(x)-d_F(x)=mg(x)-g(x)=(m-1)g(x)\\&=(m-1)d_G(x)/m\leqslant((m-1)/m)(mf(x)-m_2(x))\\&\leqslant\begin{cases}(m-1)f(x), & \text{若}f(x)\equiv0(\bmod 2)\\(m-1)f(x)-(m-2). & \text{若}f(x)\equiv1(\bmod 2)\end{cases}\end{aligned}$$

对每个$x\in V_2$，

$$\begin{aligned}d_{\bar{G}}(x)&=d_G(x)-d_F(x)=mf(x)-f(x)=(m-1)f(x)\\&=(m-1)d_G(x)/m\geqslant((m-1)/m)(mg(x)+m_1(x))\\&\geqslant\begin{cases}(m-1)g(x), & \text{若}g(x)\equiv0(\bmod 2)\\(m-1)g(x)+(m-2), & \text{若}g(x)\equiv1(\bmod 2)\end{cases}\end{aligned}$$

对每个$x\in V_3$，

$$\begin{aligned}d_{\bar{G}}(x)&=d_G(x)-d_F(x)\geqslant d_G(x)-p(x)=d_G(x)-[(1/m)d_G(x)]-1\\&\geqslant d_G(x)-\frac{1}{m}d_G(x)-1=\frac{m-1}{m}d_G(x)-1\end{aligned}$$

$$\begin{cases}>\dfrac{m-1}{m}mg(x)-1=(m-1)g(x)-1, & \text{若}g(x)\equiv0(\bmod 2)\\\geqslant\dfrac{m-1}{m}(mg(x)+m-1)-1=(m-1)g(x)+(m-2)-\dfrac{m-1}{m}, & \text{若}g(x)\equiv1(\bmod 2)\end{cases}$$

因此，对所有$x\in V_3$，

$$d_{\bar{G}}(x)\geqslant\begin{cases}(m-1)g(x), & \text{若}g(x)\equiv0(\bmod 2)\\(m-1)g(x)+(m-2), & \text{若}g(x)\equiv1(\bmod 2)\end{cases}$$

另一方面，对每个$x\in V_3$，

$$\begin{aligned}d_{\bar{G}}(x)&\leqslant d_G(x)-q(x)=d_G(x)-[(1/m)d_G(x)]\\&\leqslant d_G(x)-\frac{1}{m}d_G(x)+1=\frac{m-1}{m}d_G(x)+1\end{aligned}$$

$$\begin{cases}<\dfrac{m-1}{m}mf(x)+1=(m-1)f(x)+1, & \text{若}f(x)\equiv0(\bmod 2)\\\leqslant\dfrac{m-1}{m}(mf(x)-m+1)+1=(m-1)f(x)-(m-2)+\dfrac{m-1}{m}, & \text{若}f(x)\equiv1(\bmod 2)\end{cases}$$

因此，对所有$x\in V_3$，

$$d_{\bar{G}}(x)\leqslant\begin{cases}(m-1)f(x), & \text{若}f(x)\equiv0(\bmod 2)\\(m-1)f(x)-(m-2), & \text{若}f(x)\equiv1(\bmod 2)\end{cases}$$

所以，对一切$x\in V(G)$，我们有

$$(m-1)g(x)+(m-1)_1(x)\leqslant d_{\bar{G}}(x)\leqslant(m-1)f(x)-(m-1)_2(x)$$

其中

$$(m-1)_1(x)=\begin{cases}0, & \text{若}g(x)\equiv0(\bmod 2)\\m-2, & \text{若}g(x)\equiv1(\bmod 2)\end{cases}$$

$$(m-1)_2(x)=\begin{cases}0, & \text{若} f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}2)\\ m-2, & \text{若} f(x)\equiv 1(\mathrm{mod}2)\end{cases}$$

由归纳法假设知$\bar{G}$能分解成$m-1$个$(g,\ f)$-因子，故G能分解成m个$(g,\ f)$-因子，即G是$(g,\ f)$-因子可分解的。

参 考 文 献

[1] J. Akiyama and M. Kano, Factors and factorizations of graphs——a survey, *Journal of Graph Theory*, **9** (1985), 1—42.

[2] M. Kano, [a, b]-Factorization of a graph, *Journal of Graph Theory*, **9** (1985), 129—146.

[3] M. C. Cai, On some factor theorems of graphs, *Discrete Mathematics*, **98** (1991), 225—229.

[4] 马润年、白国强，图的$(g,\ f)$-因子分解，内蒙古大学学报（自然科学版），22 (1991)，296—299.

[5] 马润年，图的$(g,\ f)$-因子和$(g,\ f)$-因子分解，空军电讯工程学院学报，14 (1992)，71—76.

[6] 刘桂真，图的$(g,\ f)$-因子和因子分解，数学学报，37 (1994)，130—137.

On (g, f)-Factorizations of Graphs

Ma Runnian

(Air Force Telecommunication Engineering Institute, Xi'an 710077, *P. R. China)*

Gao Hangshan

(Northwesten Polytechnical University, Xi'an 710072, *P. R. China)*

Abstract

Let G be a graph and g, f be two nonnegative-valued functions defined on the vertices set $V(G)$ of G and $g\leqslant f$. $A(g,f)$-factor of a graph G is a spanning subgraph F of G such that $g(x)\leqslant d_F(x)\leqslant f(x)$ for all $x\in V(G)$. If G itself is a (g,f)-factor, then it is said that G is a (g,f)-graph. If the edges of G can be decomposed into some edge disjoint (g,f)-factors, then it is called that G is (g,f)-factorable. In this paper, one sufficient condition for a graph to be (g,f)-factorable is given.

Key words graph, factor, factorization