应用数学和力学，第18卷 第3期（1997年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Hamilton体系与辛正交系的完备性*

张鸿庆[1]　阿拉坦仓[1]　钟万勰[1]

（1995年9月6日收到，1996年9月20日收到修改稿）

摘　要

本文定义了一个Banach空间ZH，并证明了一类Hamilton体系的本征函数系（辛正交系）在ZH空间中具有完备性。还证明了如下结论ZH空间能连续嵌入到$L_2[0,1]\times L_2[0,1]$但$ZH\neq L_2[0,1]\times L_2[0,1]$。

关键词　Hamilton体系　完备性　辛正交系

一、引　言

分离变量法是求解数学物理问题的重要方法，但是许多数学物理问题不能分离变量，从而限制了分离变量法的使用范围，钟万勰在文［1］中将通常认为不能分离变量的问题化成Hamilton体系，从而形式上变成可以分离变量的问题，同时得到辛正交系以及按辛正交系展开的广义解析解。为用分离变量法求解开辟出一条新路，拓广了Sturm-Liouville问题及其按本征函数系展开的解法。可是解法的理论基础依赖于辛正交系的完备性。辛正交系的完备性有利于求解一类尚未获解的偏微分方程。辛结构不能象内积一样定义范数，从而以往的证明正交系的完备性方法都不适用于证明辛正交系的完备性。本文定义了两个空间ZH_a和ZH_b，并证明了辛正交系在ZH_a和ZH_b中完备。还证明了ZH_b能连续嵌入到$V\times V$。其中V是Hilbert空间。如果取$V\times V$为$L_2[0,1]\times L_2[0,1]$则还有$ZH_a\neq L_2[0,1]\times L_2[0,1]$。

二、Hamilton体系及其本征函数系

线性Hamilton体系为

$$\dot{V}=HV \tag{2.1}$$

其中

$$H=\begin{bmatrix} F & G \\ Q & -F^* \end{bmatrix}$$

G，Q是自共轭算子，F^*是算子F的共轭算子，具有如上形式的算子H称为无穷维

* 国家自然科学基金资助项目。

1 大连理工大学，大连　116023

Hamilton算子（有人也称为无穷小辛算子）．由 Vainberg定理知(2.1)等价于下列无穷维Hamilton体系

$$\dot{V}=J^{-1}\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta V}$$

其中 $J=\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$，$I_n$是$n$阶单位矩阵．

引理1 算子

$$H=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

（a,b,c,d也是算子）是无穷维Hamilton算子的充要条件是$JHJ=H^*$

引理2 设λ，μ分别为Hamilton算子H的两个本征值且 $\lambda+\mu\neq 0$，则λ的任意本征函数$u_1\in V\times V$必与μ的任意本征函数$u_2\in V\times V$辛正交即

$$[u_1,u_2]\equiv(Ju_1,u_2)=0$$

其中$(\cdot,\cdot)$是$V\times V$的内积．

引理1的证明是简单的从略，引理2参考[1]．

设H是Hamilton算子，并且有可数个本征函数y_k，$y_{-k}(k=1,2,\cdots)$使得

$$[y_k,y_{-k}]=1,\ [y_i,y_j]=0 \qquad (i+j\neq 0)$$

即$\{y_k,y_{-k}\}_1^\infty$是标准辛正交系．这样的Hamilton算子是存在的，如参见[2]．

因此$\forall f\in V\times V$可以形式上展开为辛Fourier级数和

$$f\sim\sum_{k=1}^{\infty}[a_k(f)y_k+a_{-k}(f)y_{-k}] \tag{2.2}$$

其中 $a_k(f)=[f,y_{-k}]$，$a_{-k}(f)=-[f,y_k]$

展开式(2.2) 在什么意义下收敛？在什么条件下收敛到 f 本身？下节将回答如上问题即证明$\{y_k,y_{-k}\}_1^\infty$是某一个空间的完备辛正交系从而是辛正交基，还证明嵌入定理．

三、辛正交系的完备性

首先引进如下空间：

$$ZH_a=\left\{f\,|\,f\in V\times V\text{且}\sum_{k=1}^{\infty}[|a_k(f)|+|a_{-k}(f)|]<+\infty\right\}$$

显然$\{y_k,y_{-k}\}_1^\infty\subset ZH_a$，因此$ZH_a$是$V\times V$的非空子集．

定义1 $f_1,f_2\in ZH_a$称f_1和f_2相等，如果

$$a_k(f_1)=a_k(f_2),\ a_{-k}(f_1)=a_{-k}(f_2) \qquad (k=1,2,\cdots).$$

显然ZH_a是线性空间（加法与数乘如同$V\times V$）．

在ZH_a空间中引入如下范数

$$|f|_a=\sum_{k=1}^{\infty}[|a_k(f)|+|a_{-k}(f)|]$$

易证$|\cdot|_a$满足范数公理．从而ZH_a是赋范空间．

定理1（完备性） $\{y_k,y_{-k}\}_1^\infty$是ZH_a的辛正交基.

证明 因为$|y_k|_a=|y_{-k}|=1(k=1,2,\cdots)$，所以$\{y_k,y_{-k}\}_1^\infty\subset ZH_a$，由 $\{y_k,y_{-k}\}_1^\infty$的辛正交性可知$\{y_k,y_{-k}\}_1^\infty$是线性无关的. $\forall f\in ZH_a$ $\forall n$有

$$|g_n|_a=\left|f-\sum_{k=1}^{n}[a_k(f)y_k+a_{-k}(f)y_{-k}]\right|_a=\sum_{k=1}^{\infty}[|a_k(g_n)|+|a_{-k}(g_n)|]$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}[|a_k(g_n)|+|a_{-k}(g_n)|]=\sum_{k=n+1}^{\infty}[|a_k(f)|+|a_{-k}(f)|]$$

而$f\in ZH_a$有$\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}[|a_k(f)|+|a_{-k}(f)|]=0$

从而

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}[a_k(f)y_k+a_{-k}(f)y_{-k}] \tag{3.1}$$

(3.1)式中的等式是按$|\cdot|_a$范数意义下成立. 如果还有

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}[b_ky_k+b_{-k}y_{-k}] \qquad (\text{等式意义同上})$$

则$\forall\varepsilon>0$有$|b_k-a_k(f)|<\varepsilon$，$|b_{-k}-a_k(f)|<\varepsilon$从而可得$a_k(f)=b_k,a_{-k}(f)=b_{-k}$ $(k=1,2,\cdots)$故表达式是唯一的，所以$\{y_k,y_{-k}\}_1^\infty$是ZH_a的辛正交基. 证毕.

为了(3.1)式在原 Hilbert 空间$V\times V$的范数意义下成立，即为了得到嵌入定理再引入如下空间.

$$ZH_b=\left\{f\,|\,f\in V\times V,\ \sum_{k=1}^{\infty}[|a_k(f)|b_b+|a_{-k}(f)|b_{-k}]<+\infty\right\}$$

其中 $b_k=\|y_k\|$，$b_{-k}=\|y_{-k}\|$，$\|\cdot\|$是$V\times V$的范数. $\{y_k,y_{-k}\}_1^\infty\subset ZH_b$，因此 ZH_b 是$V\times V$的非空子集. ZH_b的元素相等的定义如同定义1. 在ZH_b中引入如下范数:

$$|f|_b=\sum_{k=1}^{\infty}[|a_k(f)|b_k+|a_{-k}(f)|b_{-k}]$$

易证$|\cdot|_b$满足范数公理. 从而ZH_b是赋范空间.

定理2 $\{y_k,y_{-k}\}_1^\infty$是ZH_b空间的辛正交基.

定理2的证明与证明定理1相似. 从略.

定理3 （嵌入定理）ZH_b能连续嵌入到$V\times V$.

证明 $\forall f\in ZH_b$有$f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}[a_k(f)y_k+a_{-k}(f)y_{-k}]$（按范数$|\cdot|_b$意义下）而

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p}[a_k(f)y_k+a_{-k}(f)y_{-k}]\right\|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}[|a_k(f)|b_k+|a_{-k}(f)|b_{-k}]$$

又由于$f\in ZH_b$所以 $\sum_{k=1}^{\infty}[|a_k(f)|b_k+|a_{-k}(f)|b_{-k}]<+\infty$ 故$\sum_{k=1}^{n}[a_k(f)y_k+a_{-k}(f)y_{-k}]=S_n$是$V\times V$中的Cauchy列，而$V\times V$是完备空间．因此存在$g\in V\times V$使得

$$g=\sum_{k=1}^{\infty}[a_k(f)y_k+a_{-k}(f)y_{-k}]$$

等式按空间$V\times V$的范数成立．因此定义一个算子 I：$ZH_b\to V\times V$如下

$$If=g$$

显然I有意义，即$\forall f\in ZH_b$存在唯一的g与f对应且I是线性算子，而且还有

$$\|g\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}[a_k(f)y_k+a_{-k}(f)y_{-k}\right\|\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[|a_k(f)|b_k+|a_{-k}(f)|b_{-k}]=|f|_b$$

即ZH_b能连续嵌入到$V\times V$中．证毕．

四、应　　用

文章[2]中把问题

$$\left.\begin{aligned}&2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0\\&u(x,0)=u(x,1)=0\\&u(0,y)=\varphi(y),\ u(1,y)=\psi(y)\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

化成Hamilton体系，因而得到Hamilton方程的本征函数系

$$y_k=\frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{15}}{2}\pi|k|}}\left(\exp\left[-\frac{k\pi y}{\sqrt{15}}\right]\sin(k\pi y),\right.$$

$$\left.-k\pi\exp\left[-\frac{k\pi y}{\sqrt{15}}\right]\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\sin(k\pi y)+\frac{1}{2}\cos(k\pi y)\right)\right)^T$$

“T”表示转置，$k=\pm1,\pm2,\cdots,\{y_k,y_{-k}\}_1^{\infty}$是辛正交系，$V\times V=L_2[0,1]\times L_2[0,1]$形式地得到广义解析解

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}[a_k(u)y_k+a_{-k}(u)y_{-k}]$$

并通过近似计算验证了解答比较好．上述问题有交叉项$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$，因此不能用通常的分离变量法求解．由定理1，2，3可知$\{k_k,y_{-k}\}_1^{\infty}$在$ZH_a$，$ZH_b$中完备，而且$ZH_b$能连续嵌入到$L_2[0,1]\times L_2[0,1]$中，下面的定理4说明$ZH_b\neq L_2[0,1]\times L_2[0,1]$，且$\{y_k,y_{-k}\}_1^{\infty}$不是$L_2[0,1]\times L_2[0,1]$的完备基．

定理4　$(1,0)^T$在$L_2[0,1]\times L_2[0,1]$中按$\{y_k,y_{-k}\}_1^{\infty}$辛级数展开，其展开式发散．

证明大意　设辛级数展开式的前n项和为S_n，经过大量的计算和放大不等式可知，当$m\to+\infty$时，$S_{2m+1}-S_{2m}$按$L_2[0,1]\times L_2[0,1]$范数不趋于零．从而可知S_n不是Cauchy列．由$L_2[0,1]\times L_2[0,1]$的完备性推知S_n不收敛．证毕．

经过计算可知$(1,0)^T \notin ZH_b$，但$(1,0)^T \in L_2[0,1] \times L_2[0,1]$。

对任意$f \in V \times V$是否属于ZH_a或ZH_b是很容易判断的。其实只要用数学分析的级数收敛准则即可。还可以证明ZH_a和ZH_b是Banach空间，而且可以证明许多经典的与正交性有关的定理（如Riesz-Fischer定理）对辛正交系也成立。

参 考 文 献

[1] 钟万勰，分离变量与哈密尔顿体系，计算结构力学及其应用，8(3) (1991), 229—240.

[2] 欧阳华江等，二阶椭圆型方程的广义解析解，大连理工大学学报，33(3) (1993), 276—283.

[3] 钟万勰，互等定理与共轭辛正交关系，力学学报，24(4) (1992), 432—437.

[4] 钟万勰，条形域弹性平面问题与哈密尔顿体系，大连理工大学学报，31(4) (1991), 373—384.

[5] 冯康、秦孟北，Hamilton动力体系的Hamilton算法，自然科学进展——国家重点实验实室通讯，1(2) (1991), 102—112.

[6] 秦孟北，辛几何与计算哈密顿力学，力学与实践，12(6) (1990), 1—20.

[7] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1978).

The Hamiltonian System and Completeness of Symplectic Orthogonal System

Zhang Hongqing Alatancang Zhong Wanxie

(Dalian Univ. of Tech., Dalian 116023, *P. R. China)*

Abstract

In this paper, a new Banach space ZH is difined, and it is proved that there is completeness of eigenfunction system (symplectic orthogonal system) of a class of Hamiltonian system in ZH space. It is also proved that the following results: ZH space can be continuoutly imbedded to $L_2[0,1] \times L_2[0,1]$, but $ZH \neq L_2[0,1] \times L_2[0,1]$.

Key words Hamiltonian system, Completeness, symplectic orthogonal system