应用数学和力学，第18卷 第3期（1997年3月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

一类奇摄动反应扩散系统*

莫 嘉 琪[1]

（汪福汝推荐，1995年10月23日收到，1996年10月5日收到修改稿）

摘 要

本文研究了一类奇摄动反应扩散系统的初始边值问题。在适当的条件下，利用比较定理讨论了问题解的渐近性态。

关键词 反应扩散 奇摄动 比较定理

作者曾在文[3]～[8]中研究了一类奇摄动反应扩散问题。今再考虑如下奇摄动反应扩散方程组初始边值问题：

$$\varepsilon\frac{\partial u_i}{\partial t}-L_iu_i=f_i(x,u_1,u_2,\cdots,u_N,\varepsilon)$$

$$(0<t\leqslant T,\ \ x\in\Omega,\ \ i=1,2\cdots,N) \tag{1}$$

$$B_i[u_i]\equiv[a_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial n}+b_i(x)u_i]=g_i(x,\varepsilon),$$

$$(x\in\partial\Omega,\ \ i=1,2,\cdots,N) \tag{2}$$

$$u_i(0,x,\varepsilon)=h_i(x,\varepsilon)\qquad(i=1,2,\cdots,N) \tag{3}$$

其中

$$L_i=\sum_{j,k=1}^{n}\alpha_{jk}^i(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}+\sum_{j=1}^{n}\beta_j^i(x)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$\sum_{j,k=1}^{n}\alpha_{jk}^i(x)\xi_j\xi_k\geqslant\lambda_i\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2\qquad(\forall\,\xi_j\in R,\ \ \lambda_i>0)$$

ε为正的小参数，$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n)\in\Omega$，$\Omega$为$n$维欧氏空间的有界域，$\partial\Omega$为$\Omega$的光滑边界，$L_i$为$\Omega$上的一致椭圆型算子，$\partial/\partial n$为$\partial\Omega$上外法向导数，$a_i(x)$，$b_i(x)$为非负函数，$b_i(x)b_{i0}>0$。本文是研究奇摄动问题(1)～(3)，构造了相应问题解的渐近展开式，并讨论了其渐近性态。

首先假设：

[H$_1$] L_i的系数及a_i，b_i，f_i，g_i，h_i关于其变元为充分光滑的函数；

[H$_2$] 存在一组正常数k_i，使得

---

* 国家自然科学基金资助项目。

1 安徽师范大学，芜湖 241000。

$$|f_i u_j| \leqslant \left(\frac{1}{N}\right) k_i \qquad (i \neq j);$$

$$f_i u_j(x, u_1, u_2, \cdots u_N, \varepsilon) \leqslant -k_i \qquad (i=1,2,\cdots,N)$$

首先构造问题(1)～(3)解的形式渐近展开式.

原问题的退化情形为

$$-L_i u_i = f_i(x, u_1, u_2, \cdots, u_N, 0)$$
$$(0<t\leqslant T;\ x\in\Omega,\ i=1,2\cdots,N) \tag{4}$$

$$B_i[u_i] = g_i(x,0) \qquad (x\in\partial\Omega;\ i=1,2,\cdots N). \tag{5}$$

[H_3]设稳态问题(4)，(5)存在唯一的光滑解$U_0=(U_{10},\ U_{20},\ \cdots,\ U_{N0})$.

令问题(1)～(3)的外部解$U=(U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_N)$为:

$$U_i \sim \sum_{j=0}^{\infty} U_{ij}\varepsilon^j \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{6}$$

将(6)代入(1)，(2)，把f_i，g_i按ε的幂展开，合并各式ε的同次幂项，令对应项的系数为零，可得:

$$-L_i U_{ij} = \sum_{k=1}^{n} f_i u_k(x,\ U_{10},\ U_{20},\ \cdots,\ U_{NO},\ 0) U_{kj} + F_{il}$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ j=1,\ 2\cdots)$$

$$B[U_{ij}] = g_{ij} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ j=1,\ 2)$$

其中 F_{ij}为$U_r(r\leqslant j-1)$逐次已知的函数，其结构从略. 而

$$g_{ij} = \left[\frac{\partial^j g_i}{\partial\varepsilon^j}\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ j=1,\ 2,\ \cdots)$$

由上述线性问题的解U_{ij}，连同退化问题(4)，(5)的解U_{i0}，代入(6)，便可得到原问题的外部解. 但它未必满足初始条件(3). 故还需构造"初始层校正项"$V=(V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_N)$.

并设原问题的解$u=(u_1,\ u_2\cdots,\ u_N)$为:

$$u_i(t,x,\varepsilon) = U_i(x,\varepsilon) + V_i(\tau,x,\varepsilon) \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{7}$$

其中 $\tau=t/\varepsilon$为伸长变量[1].

将(7)代入(1)～(3):

$$(V_i)_\tau - L_i V_i = f_i(x, U_1+V_1,\ U_2+V_2,\ \cdots,\ U_N+V_N,\ \varepsilon)$$
$$-f_i(x,\ U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_N,\ \varepsilon) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{8}$$

$$B_i[V_i] = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots N) \tag{9}$$

$$V_i|_{\tau=0} = h_i(x,\ \varepsilon) - U_i(x,\ \varepsilon) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{10}$$

令$\varepsilon=0$,

$$(V_i)_\tau - L_i V_i = f_i(x, U_{10}+V_1, U_{20}+V_2\cdots, U_{N0}+V_N, 0)$$
$$-f_i(x, U_{10}, U_{20}, \cdots, U_{N0}, 0) \qquad (i=1,2,\cdots N) \tag{11}$$

$$B_i[V_i] = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{12}$$

$$V_i|_{\tau=0} = g_i(x,0) - U_{i0}(x) \qquad (i=1,2,\cdots N.) \tag{13}$$

[H_4]设问题(11)～(13)有解光滑解$V_0=(V_{10},\ V_{20},\ \cdots,\ V_{N0})$.

再令

$$V_i(\tau,x,\varepsilon)\sim\sum_{j=0}^{\infty}V_{ij}(\tau,x)\varepsilon^j. \tag{14}$$

将(14)代入(8)～(10)，把各项按ε的幂展开，在各式中合并各次幂的系数，可得

$$(V_{ij})_\tau-L_iV_{ij}=\sum_{k=1}^{N}f_{iu_k}(x,U_{10}+V_{10},U_{20}+V_{20},\cdots,U_{N0}+V_{N0},0)V_{kj}+\bar{F}_{ij}$$
$$(i=1,2,\cdots,N;\ j=1,2,\cdots) \tag{15}$$

$$B[V_{ij}]=0\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots N;\ j=1,\ 2,\ \cdots) \tag{16}$$

$$V_{ij}|_{\tau=0}=h_{ij}-U_{ij}(x)\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ j=1,\ 2,\ \cdots) \tag{17}$$

其中$\bar{F}_{ij}$为U_{ir}，$r\leqslant j$和V_{ij}，$r\leqslant j-1$逐次地已知的函数，其结构从略.而

$$h_{ij}=\left[\frac{\partial^j h_i}{\partial\varepsilon^j}\right]\bigg|_{\varepsilon=0}\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ j=1,\ 2,\ \cdots).$$

由线性问题(15)～(17)，可得到的$V_{ij}(\varepsilon,\ \tau)$.

再由(7)，(6)，(14)，便得到反应扩散方程奇摄动问题(1)～(3)解$u=(u_1,u_2,\ \cdots,\ u_N)$的形式渐近展开式:

$$u_i\sim\sum_{j=0}^{\infty}(U_{ij}+V_{ij})\varepsilon^j\qquad(0<\varepsilon<<1;\ i=1,2\cdots,\ N) \tag{18}$$

下面来讨论渐近展开式(18)的一致有效性.

定理 在假设$[H_1]$～$[H_4]$下，反应扩散方程组奇摄动问题(1)～(3)，在$[0,\ T]\times(\Omega+\partial\Omega)$上具有形如(18)关于$\varepsilon$一致有效的渐近解.

证明 作辅助函数α_i，β_i:

$$\alpha_i=Y_{im}-r_i\varepsilon^{m+1}\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{19}$$

$$\beta_i=Y_{im}+r_i\varepsilon^{m+1}\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{20}$$

其中 r_i为适当大的待定正常数，而

$$Y_{im}=\sum_{j=0}^{m}(U_{ij}+V_{ij})\varepsilon^j\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

显然，$\alpha_i\leqslant\beta_i$. 再由假设，不难看出，存在正常数M_{i1}，成立:

$$B_i[\alpha_i]-g_i(x,\ \varepsilon)=B_i[Y_{im}]-B_i[r_i\varepsilon^{m+1}]-g_i(x,\ \varepsilon)$$
$$\leqslant\sum_{j=0}^{m}B_i[U_{ij}+V_{ij}-g_{ij}]\varepsilon^j-r_ib_{i0}\varepsilon^{m+1}+M_{i1}\varepsilon^{m+1}$$
$$\leqslant(M_{i1}-r_ib_{i0})\varepsilon^{m+1}\qquad(x\in\partial\Omega,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

仅需选取$r_i\geqslant M_{i1}/b_{i0}$，就有

$$B_i[\alpha_i]-g_i(x,\ \varepsilon)\leqslant0\qquad(\varepsilon\in\partial\Omega) \tag{21}$$

又，存在正常数M_{i2}，成立:

$$\alpha_i|_{t=0}=Y_{im}|_{t=0}-r_i\varepsilon^{m+1}$$
$$=\sum_{j=0}^{m}[U_{ij}|_{t=0}+V_{ij}|_{\tau=0}]\varepsilon^j-r_i\varepsilon^{m+1}$$
$$\leqslant h_i(x,\ \varepsilon)+(M_{i2}-r_i)\varepsilon^{m+1}\qquad(x\in\Omega,\ i=1,\ 2,\ \cdots N)$$

故再选取$r_i\geqslant M_{i2}$，就有

$$\alpha|_{t=0}\leqslant h_i(x,\ \varepsilon)\qquad (x\in\Omega,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)\tag{22}$$

同理可证：

$$B_i[\beta_i]-g_i(x,\ \varepsilon)\geqslant 0\qquad (x\in\partial\Omega,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)\tag{23}$$

$$\beta_i|_{t=0}\geqslant h_i(x,\ \varepsilon)\qquad (x\in\Omega,\ i=1,\ 2,\ \cdots N),\tag{24}$$

现在再证明不等式：

$$\varepsilon(\alpha_i)_t-L_i\alpha_i-f_i(x,\ \bar u_1,\ \bar u_2,\ \cdots,\ \alpha_i,\ \cdots,\ \bar u_N,\ \varepsilon)\leqslant 0$$
$$(x\in\Omega,\ \bar u\in[\alpha_i,\ \beta_i];\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)\tag{25}$$

$$\varepsilon(\beta_i)_t-L_i\beta_i-f_i(x,\ \bar u_1,\ \bar u_2\cdots,\ \beta_i,\ \cdots,\ \bar u_N,\ \varepsilon)\geqslant 0$$
$$(x\in\Omega,\ \bar u\in[\alpha_i,\ \beta_i];\ i=1,\ 2\cdots,\ N)\tag{26}$$

事实上，由假设，对足够小的$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，存在正常数$M_{i3}$，有：

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(\alpha_i)_t-L_i\alpha_i-f_i(x,\ \bar u_1,\ \bar u_2,\ \cdots,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \bar u_N,\ \varepsilon)\\
&=\varepsilon(Y_{im}-r_i\varepsilon^{m+1})_t-L_i[Y_m-r_i\varepsilon^{m+1}]\\
&\quad-f_i(x,\ \bar u_1,\ \bar u_2,\ \cdots,\ Y_{im}-r_i\varepsilon^{m+1},\ \cdots,\ \bar u_N,\ \varepsilon)\\
&=\varepsilon(Y_{im})_t-L_iY_{im}-f_i(x,\ \bar u_1,\ \bar u_2,\ \cdots,\ Y_{im},\ \cdots,\ \cdots\bar u_N,\ \varepsilon)\\
&\quad+[f_i(x,\ \bar u_1,\ \bar u_2\cdots,\ Y_{im},\ \cdots,\ \bar u_N,\ \varepsilon)\\
&\quad-f_i(x,\ \bar u_1,\ \bar u_2,\ \cdots,\ Y_{im}-r_i\varepsilon^{m+1},\ \cdots,\ \bar u_N,\ \varepsilon)]\\
&\leqslant[-L_iU_{i0}-f_i(x,\ U_{10},\ U_{20},\ \cdots,\ U_{N0},\ 0]\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m}[-L_iU_{ij}-\sum_{k=1}^{N}f_iu_j(x,\ U_{10},\ U_{20},\ \cdots,\ U_{N0},\ 0)U_{kj}-F_{ij}]\varepsilon^j\\
&\quad+[(V_{i0})_\tau-L_{ij}V_{i0}-f_i(x,\ U_{10}+V_{10},\ U_{20}+V_{20},\ \cdots,\ U_{N0}+V_{N0},\ 0)\\
&\quad+f(x,\ U_{10},\ U_{20},\ \cdots,\ {}_NU_{N0},\ 0]\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m}[(V_{ij})_\sigma-L_iV_{ij}\\
&\quad-\sum_{k=1}^{N}f_iu_k(x,\ U_{10}+V_{10},\ U_{20}+V_{20},\ \cdots,\ U_{N0}+V_{N0},\ 0)U_{kj}-\bar F_{ij}]\varepsilon^j\\
&\quad+\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{N}f_iu_j[x,\ \bullet]+f_iu_j[x,\ \bullet]\Big)r_i\varepsilon^{m+1}+M_{i3}\varepsilon^{m+1}\\
&\leqslant[(N-1)k_i/N]-k_i]r_i\varepsilon^{m+1}+M_{i3}\varepsilon^{m+1}\\
&=(M_{i3}-h_ir_i/N)\varepsilon^{m+1},
\end{aligned}$$

其中$[x,\ \cdot]$表示相应的u_i在$[\alpha_i,\ \beta_i]$上取某值．最后，我们选取$r_i\geqslant M_{i3}N/k_i$，不等式(25)成立．

同理可证不等式(26)也成立．

故仅需选择足够大的r_i，关系式(21)～(26)成立．由此得到[2]：

$$\alpha_i(t,\ x,\ \varepsilon)\leqslant u_i(t,\ x,\ \varepsilon)\leqslant\beta_i(t,\ x,\ \varepsilon),$$
$$((t,\ x)\in[0,\ T]\times(\Omega+\partial\Omega),\ 0<\varepsilon<<1)$$

由(19)，(20)得，

$$u_i=\sum_{j=0}^{m}(U_{ij}+V_{ij})\varepsilon^j+O(\varepsilon^{m+1})\qquad(0<\varepsilon<<1)$$

即关系式(18)成立。定理证毕。

参 考 文 献

[1] A. H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons, New York (1981).

[2] C. V Pao, Comparison methods and stability analysis of reaction diffusion systems, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 162 (1994), 277—292.

[3] Mo Jiaqi, Singular perturbation for a class of nonlinear reaction diffusion systems, *Science in China*, 32 (1989), 1306—1315.

[4] Mo Jiaqi, A class of singularly perturbed nonlinear reaction diffusion integral-differential equation, *Proceedings of the International Conference on IEBVP*, World Scientiftc, Singapore (1991), 153—160.

[5] 莫嘉琪，一类反应扩散方程组初值-边值问题的奇摄动，应用数学和力学，12(4) (1991)，375—384.

[6] Mo Jiaqi, Singular perturbation for a reaction diffusion system in bacteria growth, *Acta Math. Sci.*, 12 (1992), 381—388.

[7] 莫嘉琪，非线性时滞反应扩散方程组的奇摄动，数学研究与评论，13 (1993)，541—547.

[8] 莫嘉琪、许玉兴，一类奇摄动非线性反应扩散积分微分方程组，应用数学学报，17 (1994)，278—286.

A Class of Singularly Perturbed Reaction Diffusion Systems

Mo Jiaqi

(*Anhui Normal University, Wuhu* 241000, *P. R. China*)

Abstract

A class of singularly perttrbed reaction diffusion systems are considered. Under suitable conditions, by using the comparison theorem the asymptotic behavior of solution for the initial boundary value problems is studied.

Key words reaction diffusion, singular perturbation, comparison theorem