应用数学和力学，第18卷 第3期（1997年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

湍流边界层中固体小颗粒湍流运动的Lagrangian模型

刘小兵[1]　　程良骏[2]

（蔡树棠推荐，1995年6月9日收到，1996年10月30日收到修改稿）

摘　　要

给出了固体小颗粒在边界层中的 Lagrangian 运动方程，方程中包括受壁面影响的粘性阻力，Saffman升力及Magus升力等．使用频谱法，得到了颗粒响应流体的Lagrangian能谱的表达式，使用这些结果研究了各种响应特性．本文的结果清楚地表明了固体小颗粒在湍流扩散过程中，其湍流扩散是可能大于流体的．

关键词　Lagrangian模型　湍流运动　固体颗粒　湍流边界层

一、引　　言

过流部件表面受固体颗粒磨损问题一直是多相流工程中的重要研究课题．边界层中的颗粒湍流运动特性是研究过流部件表面材质磨损的基础，目前研究者给出了不少湍流模式来研究场中的颗粒运动，实际上，他们的模型往往忽略了大速度梯度下起重要作用的 Saffman 升力[1,2]和Magus升力[3]，而这两种升力在大速度下却表现的尤为突出．尽管Rouhiainen 和 Stachiewicz[4] 在颗粒沉积边壁的研究中，分析了边界层中升力对颗粒运动影响的重要性，但他们的方程仅在法线方向上考虑了升力，并忽略了边壁对颗粒运动阻力的影响．Rizk 和Elghobshi[5]分析了悬浮在遂洞流中的颗粒运动，包括壁面的影响，但他们忽略了 Magus 升力及压强梯度力对颗粒运动的影响．最近我们[6]研究了湍流场中的颗粒运动，但忽略了壁面的影响，也未研究颗粒的湍流扩散特性．本文的主要工作简化了固体小颗粒悬浮在二维不可压缩湍流边界层中的 Lagrangian 运动方程，方程中考虑了两种升力及受壁面影响的粘性阻力的影响等．对所建方程进行 Fourier 变换，得到了颗粒运动方程的求解．使用频谱法，得到了颗粒响应流体的 Lagrangian 能谱的表达式，使用这些结果研究了各种响应特性．本文的结果清楚地表明了固体小颗粒在扩散过程中，其扩散是可能大于流体的．文中忽略了颗粒-壁面作用、平行壁面方向的流体速度梯度($\partial V_y/\partial x$)及颗粒的自旋角速度(ω_p)．

二、固体颗粒运动方程

对于任意流场，刘小兵等人[7,8]修正了BBO颗粒运动方程，所建立的 Lagrangian 颗

1 四川工业学院，成都 611744．
2 华中理工大学，武汉 430014．

粒运动方程的形式为

$$
\begin{aligned}
\frac{dV_{pi}}{dt}=\frac{1}{K_{mi}+S}\Bigg[&\frac{3}{4d}C_D|\boldsymbol{V}_f-\boldsymbol{V}_p|(V_{fi}-V_{pi})\\
&+\frac{3}{2d}K_{Bi}\sqrt{\frac{\nu_f}{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\left(\frac{dV_{fi}}{d\tau}-\frac{dV_{pi}}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\\
&+\frac{6}{\pi d}K_s\left|\nu_f\frac{\partial V_{fi}}{\partial x_i}\right|^{\frac{1}{2}}(V_{fj}-V_{pj})\cdot\mathrm{sign}\left(\frac{\partial V_{fj}}{\partial x_i}\right)\\
&+\frac{3}{4}C_{Mi}\Omega_i\times(V_{fi}-V_{pi})+K_{mi}\frac{dV_{fi}}{dt}+\frac{DV_{fi}}{Dt}-\nu_f\nabla^2V_{fi}\\
&-(1-S)g_i
\end{aligned}\tag{2.1}
$$

式中 V_i为速度分量；$\Omega_i=\omega_p-0.5\nabla\times V_i$；$d$为颗粒直径；$t$，$\tau$表示时间；$S$为颗粒密度$\rho_p$与流体密度$\rho_f$之比值；$g_i$为重力加速度分量；$x_i$为坐标分量；$K_m$，$K_B$，$K_S$和$C_M$分别表示虚拟质量力、Basset力、Saffman升力和Magus升力系数；ν为运动粘性系数；sign为符号函数；颗粒运动阻力系数有表达式

$$
C_D=\begin{cases}24/Re_p & (Re_p=|\boldsymbol{V}_f-\boldsymbol{V}_p|d/\nu_f<1)\\ (24/Re_p)\cdot(1+0.15Re_p^{0.687}) & (1\leqslant Re_p\leqslant 1000)\\ 0.44 & (Re_p>1000)\end{cases}
$$

导数$d(\quad)/dt$和$D(\quad)/Dt$分别定义为

$$
d(\quad)/dt=\partial(\quad)/\partial t+V_{pj}\partial(\quad)/\partial x_j,\quad D(\quad)/Dt=\partial(\quad)/\partial t+V_{fj}\partial(\quad)/\partial x_j
$$

脚标：i和j为张量坐标；f和p分别指流体和颗粒.

对于本文所考虑的颗粒在边界层流场中的运动情况，我们假设颗粒雷诺数 Re_p很小（小于1），因此系数 K_m，K_B，K_S和C_M可分别近似为0.5、6.0、1.615和1.0，导数$d(\quad)/dt\approx D(\quad)/Dt$.

与无约束自由流相比，边界层流动中，由于受壁面的影响，其 Stokes 阻力系数将增大. C_x和C_y是考虑壁面对 Stokes 阻力影响的修正因子，对于平行壁面的x方向，其修正因子C_x采用Faxen[9]的表达式，法向y方向的C_y采用Brenner[10]和Maude[11]的表达式

$$
C_x=(1-9\delta/10+\delta^3/8-45\delta^4/256-\delta^5/16)^{-1},\quad C_y=1+9\delta/8+81\delta^2/64 \tag{2.2}
$$

式中，$\delta=d/(2y)$，y为垂直于壁面的坐标.

可知，求解方程(2.1)的主要困难是升力项的非线性. Hinze[12]讨论过悬浮在湍流场中的固体小颗粒的运动特性，他表明当颗粒直径小于或等于Kolmogorff标尺η[$d/\eta\leqslant 1$，$\eta=(\nu_f^3/\varepsilon)^{1/4}$，$\varepsilon$为能耗率]（也作为目前的研究）时，速度梯度$(\partial V_x/\partial y)$可模化成

$$
\frac{\partial V_x}{\partial y}\approx\frac{\nu_f}{\eta^2} \tag{2.3}
$$

另外∇^2V_{fi}可近似为

$$
\nabla^2V_{fi}\approx -l_i^{-2}V_{fi} \tag{2.4}
$$

式中 l_i为特征长度，可采用最小均方差估计：

$$
l_i^{-2}=-\frac{\langle V_{fi}\nabla^2V_{fi}\rangle}{\langle V_{fi}V_{fi}\rangle}=\left(\left\langle\frac{\partial V_{fi}}{\partial x_j}\frac{\partial V_{fi}}{\partial x_j}\right\rangle-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\langle V_{fi}V_{fi}\rangle}{\partial x_j^2}\right)\Big/\langle V_{fi}V_{fi}\rangle
$$

这里$\langle\quad\rangle$表示综合平均.

联立方程(2.1)～(2.4)，并借助于运动粘性系数ν_f和壁面剪应力速度u_τ($u_\tau=\sqrt{\tau_w/\rho_f}$，

τ_w为壁面剪应力）对各变量进行无因次化，可分别得到二维湍流边界层中x和y方向的瞬时运动方程

$$\frac{dV_{px}^+}{dt^+}=\alpha^+\beta C_x(V_{fx}^+-V_{px}^+)+\beta\sqrt{\frac{3\alpha^+}{\pi}}\int_{-\infty}^{t^+}\left(\frac{dV_{fx}^+}{d\tau^+}-\frac{dV_{px}^+}{d\tau^+}\right)\frac{d\tau^+}{\sqrt{t^+-\tau^+}}$$
$$+\beta\frac{dV_{fx}^+}{dt^+}+\frac{1}{18}\alpha^+\beta\phi_x^2V_{fx}^++\alpha^+\beta\gamma_x(V_{fy}^+-V_{py}^+) \tag{2.5}$$

$$\frac{dV_{py}^+}{dt^+}=\alpha^+\beta C_y(V_{fy}^+-V_{py}^+)+\beta\sqrt{\frac{3\alpha^+}{\pi}}\int_{-\infty}^{t^+}\left(\frac{dV_{fy}^+}{d\tau^+}-\frac{dV_{py}^+}{d\tau^+}\right)\frac{d\tau^+}{\sqrt{t^+-\tau^+}}$$
$$+\beta\frac{dV_{fy}^+}{dt^+}+\frac{1}{18}\alpha^+\beta\phi_y^2V_{fy}^++\alpha^+\beta\gamma_y(V_{fx}^+-V_{px}^+)+(\beta-1)g^+ \tag{2.6}$$

式中，

$$V_i^+=\frac{V_i}{u_\tau},\quad \alpha^+=\frac{12}{d^{+2}},\quad \beta=\frac{1}{1+2s},\quad d^+=d\frac{u_\tau}{\nu_f},\quad t^+=t\frac{u_\tau^2}{\nu_f},\quad \tau^+=\tau\frac{u_\tau^2}{\nu_f},$$

$$g^+=g\frac{\nu_f}{u_\tau^3},\quad \gamma_x=-\frac{1}{48}\theta^2,\quad \gamma_y=\frac{K_s}{3\pi}\theta+\frac{1}{48}\theta^2,\quad \phi_i=\frac{d^+}{l_i^+},\quad \theta=\frac{d^+}{\eta^+}$$

上标+表示无因次量.

方程(2.5)和(2.6)为颗粒线性微分运动方程，这些方程既可表示平均运动方程又可表示脉动运动方程，不过在脉动运动方程中，重力项消失了.

三、频谱分析

1. Fourier变换

定义流体脉动速度$V_f^+(t^+)$和颗粒脉动速度$V_p^+(t^+)$的Fourier变换 $\tilde{V}_f^+(\omega)$和 $\tilde{V}_p^+(\omega)$分别为

$$\left.\begin{aligned}\tilde{V}_f^+(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}V_f^+(t^+)\exp(-i\omega t^+)dt^+\\ \tilde{V}_p^+(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}V_p^+(t^+)\exp(-i\omega t^+)dt^+\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

式中 ω为脉动频率，$i=\sqrt{-1}$.

颗粒相对脉动速度的Fourier变换可表示为

$$\tilde{W}^+(\omega)=\tilde{V}_p^+(\omega)-\tilde{V}_f^+(\omega) \tag{3.2}$$

利用方程(3.1)，对方程(2.5)和(2.6)进行Fourier变换，有

$$A_x\tilde{V}_{px}^+(\omega)=B_x\tilde{V}_{fx}^+(\omega)+\gamma_x[\tilde{V}_{fy}^+(\omega)-\tilde{V}_{py}^+(\omega)] \tag{3.3}$$
$$A_y\tilde{V}_{py}^+(\omega)=B_y\tilde{V}_{fy}^+(\omega)+\gamma_y[\tilde{V}_{fx}^+(\omega)-\tilde{V}_{px}^+(\omega)] \tag{3.4}$$

式中

$$A_x=C_x+M+i[\omega/(\alpha^+\beta)+M\cdot\mathrm{sign}(\omega)],$$
$$B_x=C_x+M+\phi_x/18+i[\omega/a^++M\cdot\mathrm{sign}(\omega)]$$
$$A_y=C_y+M+i[\omega/(\alpha^+\beta)+M\cdot\mathrm{sign}(\omega)],$$
$$B_y=C_y+M+\phi_y/18+i[\omega/a^++M\cdot\mathrm{sign}(\omega)]$$

这里 $M=\sqrt{3|\omega|/(2a^+)}$.

求解方程(3.3)和(3.4)，可得颗粒的Fourier变换速度

$$\tilde{V}^{+}_{px}(\omega)=H_{11}(\omega)\tilde{V}^{+}_{fx}(\omega)+H_{12}(\omega)\tilde{V}^{+}_{fy}(\omega) \tag{3.5}$$

$$\tilde{V}^{+}_{py}(\omega)=H_{21}(\omega)\tilde{V}^{+}_{fx}(\omega)+H_{22}(\omega)\tilde{V}^{+}_{fy}(\omega) \tag{3.6}$$

式中频谱函数$H(\omega)$为

$$H_{11}=\frac{A_yB_x-\gamma_x\gamma_y}{A_xA_y-\gamma_x\gamma_y},\quad H_{12}=\frac{\gamma_x(A_y-B_y)}{A_xA_y-\gamma_x\gamma_y},\quad H_{21}=\frac{\gamma_y(A_x-B_x)}{A_xA_y-\gamma_x\gamma_y},$$

$$H_{22}=\frac{A_xB_y-\gamma_x\gamma_y}{A_xA_y-\gamma_x\gamma_y}$$

联立方程(3.2)，(3.3)和(3.6)，可得

$$\tilde{W}^{+}_{x}(\omega)=[H_{11}(\omega)-1]\tilde{V}^{+}_{fx}(\omega)+H_{12}(\omega)\tilde{V}^{+}_{fy}(\omega) \tag{3.7}$$

$$\tilde{W}^{+}_{y}(\omega)=H_{21}(\omega)\tilde{V}^{+}_{fx}(\omega)+[H_{22}(\omega)-1]\tilde{V}^{+}_{fy}(\omega) \tag{3.8}$$

2. Lagrangian能谱和自相关函数

定义上脚标′为复共轭，则Lagrangian能谱定义为

$$E_{ij}(\omega)=\tilde{V}^{+}_{i}(\omega)\tilde{V}^{+\prime}_{j}(\omega) \tag{3.9}$$

根据方程(3.5)～(3.6)，边界层中颗粒的Kagrangian能谱可表示成

$$\left.\begin{aligned}
E_{pxx}(\omega)&=|H_{11}|^2E_{fxx}(\omega)+H'_{12}H_{11}E_{fxy}(\omega)+H'_{11}H_{12}E_{fyx}(\omega)+|H_{12}|^2E_{fyy}(\omega)\\
E_{pxy}(\omega)&=H_{11}H'_{21}E_{fxx}(\omega)+H_{11}H'_{22}E_{fxy}(\omega)+H_{12}H'_{21}E_{fyx}(\omega)+H_{12}H'_{22}E_{fyy}(\omega)\\
E_{pyx}(\omega)&=H'_{11}H_{21}E_{fxx}(\omega)+H'_{12}H_{21}E_{fxy}(\omega)+H'_{11}H_{22}E_{fyx}(\omega)+H'_{12}H_{22}E_{fyy}(\omega)\\
E_{pyy}(\omega)&=|H_{21}|^2E_{fxx}(\omega)+H_{21}H'_{22}E_{fyy}(\omega)+H'_{21}H_{22}E_{fyx}(\omega)+|H_{22}|^2E_{fyy}(\omega)
\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Lagrangian自相关函数定为

$$R_{ij}(\tau^+)=\overline{V^{+}_{i}(t^+)V^{+}_{j}(t^+ +\tau^+)} \tag{3.11}$$

式中顶线—表示时间平均。

能谱和自相关函数是一对Fourier变换函数，即

$$R_{ij}(\tau^+)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{ij}(\omega)\exp(i\omega\tau^+)d\omega \tag{3.12}$$

$$E_{ij}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{ij}(\tau^+)\exp(-i\omega\tau^+)d\tau^+ \tag{3.13}$$

分别引入$R_{ij}(\tau^+)$和$E_{ij}(\omega)$的对称部分$R^s_{ij}(\tau^+)$和$E^s_{ij}(\omega)$

$$R^s_{ij}(\tau^+)=[R_{ij}(\tau^+)+R_{ij}(\tau^+)]/2 \tag{3.14}$$

$$E^s_{ij}(\omega)=[E_{ij}(\omega)+E_{ji}(\omega)]/2 \tag{3.15}$$

联立方程(3.9)和(3.12)～(3.15)，可得

$$R^s_{ij}(\tau^+)=\int_0^{\infty}E^s_{ij}(\omega)\cos(\omega\tau^+)d\omega \tag{3.16}$$

$$E^s_{ij}(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}R^s_{ij}(\tau^+)\cos(\omega\tau^+)d\tau^+ \tag{3.17}$$

将式(3.15)代入方程(3.10)中，可得

$$\left.\begin{aligned}
E^s_{pxx}(\omega)&=G_{11}E^s_{fxx}(\omega)+G_{12}E^s_{fxy}(\omega)+G_{13}E^s_{fyy}(\omega)\\
E^s_{pxy}(\omega)&=G_{21}E^s_{fxx}(\omega)+G_{22}E^s_{fxy}(\omega)+G_{23}E^s_{fyy}(\omega)\\
E^s_{pyy}(\omega)&=G_{31}E^s_{fxx}(\omega)+G_{32}E^s_{fxy}(\omega)+G_{33}E^s_{fyy}(\omega)
\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

式中 G函数矩阵为

$$[G_{ij}]=\begin{bmatrix} H_{11}H'_{11} & \mathrm{Re}(H_{11}H'_{12}E_{fxy}+H'_{11}H_{12}E_{fyx})/E^s_{fxy} & H_{12}H'_{12} \\ \mathrm{Re}(H_{11}H'_{21}) & \mathrm{Re}(H_{11}H'_{22}E_{fxy}+H'_{21}H_{12}E_{fyx})/E^s_{fxy} & \mathrm{Re}(H_{12}H'_{22}) \\ H_{21}H'_{21} & \mathrm{Re}(H_{21}H'_{22}E_{fxy}+H'_{21}H_{22}E_{fyx})/E^s_{fxy} & H_{22}H'_{22} \end{bmatrix}$$

式中 Re是复函数的实部。

在此，引入流体能谱的密度函数$f_{ij}(\omega)$，则有

$$E^s_{fij}(\omega)=\overline{V^+_{fi}(t^+)V^+_{fj}(t^+)}f_{ij}(\omega)=R^s_{fij}(\theta)f_{ij}(\omega)$$

式中 $f_{ij}(\omega)$定义为

$$\int_0^\infty f_{ij}(\omega)d\omega=1$$

实际上，就目前的研究要从理论上确定湍流场中流体频谱密度函数是很困难的，尤其是在非均匀湍流场。基于统计和局部均匀假设，Frenkic[13] 给出了纵向和横向频谱密度的相互关系

$$f_{yy}(\omega)=\frac{1}{2}f_{xx}(\omega)-\frac{1}{2}\omega\frac{df_{xx}(\omega)}{d\omega} \tag{3.19}$$

在纵向x方向的频谱密度$f_{xx}(\omega)$，Hinze[11]给出了一表达式

$$f_{xx}(\omega)=(2/\pi)T^+_L/(1+\omega^2T^{+2}_L) \tag{3.20}$$

从式(3.19)和(3.20)可得到

$$f_{yy}(\omega)=0.5f_{xx}(\omega)[3-2/(1+\omega^2T^{+2}_L)]=(T^+_L/\pi)(1+3\omega^2T^{+2}_L)/(1+\omega^2T^{+2}_L)^2$$

目前我们还未发现有$f_{xy}(\omega)$的研究，这里我们给出$f_{xy}(\omega)$一近似表达式[8]

$$f_{xy}(\omega)=af_{xx}(\omega)+bf_{yy}(\omega)$$

式中 a和b是常数，且$a+b=1$。

无因次Lagrangian积分时间标尺T^+_L可从下式计算得到

$$T^+_L=C_{TL}K^+(y^+)/\varepsilon^+(y^+) \tag{3.21}$$

式中 $C_{TL}\approx0.2\sim0.48$；K是流体湍动能。

在湍流边界层内，使用Laufer's[14]提供的湍动能和能耗率数据，可得，在$5<y^+\leqslant200$，有

$$T^+_L=e_0+e_1y^++e_2y^{+2}$$

式中，$e_0=7.122$，$e_1=0.5731$，$e_2=-0.00129$。

在临近壁面$(0<y^+\leqslant5)$，T^+_L近似为一常数，即$T^+_L\approx10$。

颗粒的自相关函数与流体的自相关函数的比值有表达式

$$\frac{R^s_{pxx}(\tau^+)}{R^s_{fxx}(\tau^+)}=\int_0^\infty\left[G_{11}f_{xx}+\frac{R^s_{fxy}(0)}{R^s_{fxx}(0)}G_{12}f_{xy}+\frac{R^s_{fyy}(0)}{R^s_{fxx}(0)}G_{13}f_{yy}\right]\cos\omega\tau^+d\omega\cdot\left[\int_0^\infty f_{xx}\cos\omega\tau^+d\omega\right]^{-1}$$

$$\frac{R^s_{pxy}(\tau^+)}{R^s_{fxy}(\tau^+)}=\int_0^\infty\left[\frac{R^s_{fxx}(0)}{R^s_{fxy}(0)}G_{21}f_{xx}+G_{22}f_{xy}+\frac{R^s_{fyy}(0)}{R^s_{fxy}(0)}G_{23}f_{yy}\right]\cos\omega\tau^+d\omega\cdot\left[\int_0^\infty f_{xy}\cos\omega\tau^+d\omega\right]^{-1}$$

$$\frac{R^s_{pyy}(\tau^+)}{R^s_{fyy}(\tau^+)}=\int_0^\infty\left[\frac{R^s_{fxx}(0)}{R^s_{fyy}(0)}G_{31}f_{xx}+\frac{R^s_{fxy}(0)}{R^s_{fyy}(0)}G_{32}f_{xy}+G_{33}f_{yy}\right]\cos\omega\tau^+d\omega$$

$$\cdot\left[\int_0^{\infty} f_{yy}\cos\omega\tau^+ d\omega\right]^{-1}$$

四、颗粒湍流扩散

颗粒的随机运动可由时间相关位移张量$\overline{X_i^+X_j^+}(t^+)$定义

$$\overline{X_i^+X_j^+}(t^+)=\int_0^{t^+}(t^+-\tau^+)[R_{pji}(\tau^+)+R_{pji}(\tau^+)]d\tau^+ \tag{4.1}$$

则将式(3.14)和(3.16)代入方程(4.1)，可得

$$\overline{X_i^+X_j^+}(t^+)=2\int_0^{t^+}(t^+-\tau^+)R_{pij}^s(\tau^+)d\tau^+=2\int_0^{\infty}E_{pij}^s\frac{1-\cos\omega\tau^+}{\omega^2}d\omega$$

定义颗粒扩散张量$D_{pij}(t^+)$为

$$D_{pij}(t^+)=\frac{1}{2}\frac{d}{d^+}\overline{X_i^+X_j^+}(t^+)=\int_0^{\infty}E_{pij}^s\frac{\sin\omega t^+}{\omega}d\omega=\int_0^{t^+}R_{pij}^s(\tau^+)d\tau^+ \tag{4.2}$$

类似地，有

$$D_{fij}(t^+)=\int_0^{\infty}E_{fij}^s\frac{\sin\omega t^+}{\omega}d\omega=\int_0^{t^+}R_{fij}^s(\tau^+)d\tau^+ \tag{4.3}$$

联立方程(3.18)，(4.2)和(4.3)，可得颗粒湍流扩散与流体湍流扩散的比值

$$\frac{D_{pxx}(t^+)}{D_{fxx}(t^+)}=\int_0^{\infty}\left[G_{11}f_{xx}+\frac{R_{fxy}^s(0)}{R_{fxx}^s(0)}G_{12}f_{xy}+\frac{R_{fyy}^s(0)}{R_{fxx}^s(0)}G_{13}f_{yy}\right]\frac{\sin\omega t^+}{\omega}d\omega$$
$$\cdot\left[\int_0^{\infty}f_{xx}\frac{\sin\omega t^+}{\omega}d\omega\right]^{-1}$$

$$\frac{D_{pxy}(t^+)}{D_{fxy}(t^+)}=\int_0^{\infty}\left[\frac{R_{fxx}^s(0)}{R_{fxy}^s(0)}G_{21}f_{xx}+G_{22}f_{xy}+\frac{R_{fyy}^s(0)}{R_{fxy}^s(0)}G_{23}f_{yy}\right]\frac{\sin\omega t^+}{\omega}d\omega$$
$$\cdot\left[\int_0^{\infty}f_{xy}\frac{\sin\omega t^+}{\omega}d\omega\right]^{-1}$$

$$\frac{D_{pyy}(t^+)}{D_{fyy}(t^+)}=\int_0^{\infty}\left[\frac{R_{fxx}^s(0)}{R_{fyy}^s(0)}G_{31}f_{xx}+\frac{R_{fxy}^s(0)}{R_{fyy}^s(0)}G_{32}f_{xy}+G_{33}f_{yy}\right]\frac{\sin\omega t^+}{\omega}d\omega$$
$$\cdot\left[\int_0^{\infty}f_{yy}\frac{\sin\omega t^+}{\omega}d\omega\right]^{-1}$$

当$t^+\to+\infty$联立方程(3.17)，(4.2)和(4.3)可得

$$D_{ij}(+\infty)=\int_0^{\infty}R_{ij}(\tau^+)d\tau^+=\frac{\pi}{2}E_{ij}^s(0)$$

这样，颗粒长时间扩散张量$D_{pij}(\infty)$有表达式

$$\left.\begin{aligned}
D_{pxx}(\infty)=&(1+mC_y\phi_x^2)^2D_{fxx}(\infty)-2m\gamma_x\phi_y^2(1+mC_y\phi_x^2)D_{fxy}(\infty)\\
&+m^2\gamma_x^2\phi_y^4D_{fyy}(\infty)\\
D_{pxy}(\infty)=&-m\gamma_y\phi_x^2(1+mC_y\phi_x^2)D_{fxx}(\infty)+[(1+mC_y\phi_x^2)(1+mC_x\phi_y^2)\\
&+m^2\gamma_x\gamma_y\phi_x^2\phi_y^2]D_{fxy}(\infty)-m\gamma_x\phi_y^2(1+mC_x\phi_y^2)D_{fyy}(\infty)\\
D_{pyy}(\infty)=&m^2\gamma_y^2\phi_x^4D_{fxx}(\infty)-2m\gamma_y\phi_x^2(1+mC_x\phi_y^2)D_{fxy}(\infty)\\
&+(1+mC_x\phi_y^2)^2D_{fyy}(\infty)
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

式中

$$m=\frac{1}{18(C_xC_y-\gamma_x\gamma_y)}=\frac{1}{18}\left[C_xC_y+\frac{1}{144}\theta^3\left(\frac{K_s}{\pi}+\frac{\theta}{16}\right)\right]^{-1}$$

式(4.4)已表明长时间颗粒的湍流扩散是可以超过流体的湍流扩散。

对于均匀湍流场，有

$$D_{fij}(\infty)=D_{f0}\delta_{ij}$$

式中 D_{f0}为流体的湍流扩散，δ_{ij}为Kronecker δ函数。

则$D_{pij}(\infty)$张量可简化成

$$\left.\begin{aligned}
D_{pxx}(\infty)&=[(1+mC_y\phi_x^2)^2+m^2\gamma_x^2\phi_y^4]D_{f0}(\infty)\\
D_{pxy}(\infty)&=-m[\gamma_y\phi_x^2(1+mC_y\phi_x^2)+\gamma_x\phi_y^2(1+mC_x\phi_y^2)]D_{f0}(\infty)\\
D_{pyy}(\infty)&=[m^2\gamma_y^2\phi_x^4+(1+mC_x\phi_y^2)^2]D_{f0}(\infty)
\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

式(4.5)清楚表明，在均匀湍流边界层中，颗粒的湍流扩散量 $D_{pxx}(\infty)$和 $D_{pyy}(\infty)$总是大于流体的。

五、湍流雷诺应力

当$\tau^+=0$，联立方程(3.11)，(3.14)和(3.16)，可得

$$\overline{V_i^+(t^+)V_j^+(t^+)}=R_{ij}^s(0)=\int_0^\infty E_{ij}^s(\omega)d\omega \tag{5.1}$$

联立方程(3.18)和(5.1)，可得$\overline{V_{pi}^+V_{pj}^+}$的表达式

$$\overline{V_{px}^{+2}}=\overline{V_{fx}^{+2}}\int_0^\infty G_{11}f_{xx}d\omega+\overline{V_{fx}^+V_{fy}^+}\int_0^\infty G_{12}f_{xy}d\omega+\overline{V_{fy}^{+2}}\int_0^\infty G_{13}f_{yy}d\omega$$

$$\overline{V_{px}^+V_{py}^+}=\overline{V_{fx}^{+2}}\int_0^\infty G_{21}f_{xx}d\omega+\overline{V_{fx}^+V_{fy}^+}\int_0^\infty G_{22}f_{xy}d\omega+\overline{V_{fy}^{+2}}\int_0^\infty G_{23}f_{yy}d\omega$$

$$\overline{V_{py}^{+2}}=\overline{V_{fx}^{+2}}\int_0^\infty G_{31}f_{xx}d\omega+\overline{V_{fx}^+V_{fy}^+}\int_0^\infty G_{32}f_{xy}d\omega+\overline{V_{fy}^{+2}}\int_0^\infty G_{33}f_{yy}d\omega$$

联立方程(3.7)，(3.8)和(3.18)，可得

$$\overline{W_x^{+2}}=\overline{V_{fx}^{+2}}\int_0^\infty |H_{11}-1|^2f_{xx}d\omega+\overline{V_{fx}^+V_{fy}^+}\int_0^\infty (C_{12}-C_3)f_{xy}d\omega+\overline{V_{fy}^{+2}}\int_0^\infty C_{13}f_{yy}d\omega$$

$$\overline{W_y^{+2}}=\overline{V_{fx}^{+2}}\int_0^\infty G_{31}f_{xx}d\omega+\overline{V_{fx}^+V_{fy}^+}\int_0^\infty (G_{32}-G_4)f_{xy}d\omega+\overline{V_{fn}^{+2}}\int_0^\infty |H_{22}-1|^2f_{yy}d\omega$$

式中 $G_3=\mathrm{Re}(H_{12}'E_{fxy}+H_{12}E_{fyx})/E_{fxy}^s$,

$G_4=\mathrm{Re}(H_{21}E_{fxy}+H_{21}'E_{fyx}))/E_{fxy}^s$ · $\overline{W_i^{+2}}$能表示成

$$\overline{W_i^{+2}}=\overline{(V_{pi}^+-V_{fi}^+)^2}=\overline{V_{pi}^{+2}}-2\overline{V_{pi}^+V_{fi}^+}+\overline{V_{fi}^{+2}}$$

式中 $$\overline{V_{px}^+V_{fx}^+}=\frac{1}{2}[\overline{V_{fx}^{+2}}\int(H_{11}+H_{11}')f_{xx}d\omega+\overline{V_{fx}^+V_{fy}^+}\int_0^\infty G_3f_{xy}d\omega]$$

$$\overline{V_{py}^+V_{fy}^+}=\frac{1}{2}[\overline{V_{fx}^+V_{fy}^+}\int_0^\infty G_4f_{xy}d\omega+\overline{V_{fy}^{+2}}\int_0^\infty(H_{22}+H_{22}')f_{yy}d\omega]$$

六、结　　论

本文的模型可用来估计湍流场颗粒运动的各种湍流特性，包括湍流扩散和湍流雷诺应力。本文的研究，从理论上解释了很多年来一些研究者所发现的“颗粒湍流扩散可能超过流体的湍流扩散”这一论说[15]；同时否认了“颗粒的湍流扩散永不能超过流体的湍流扩散”这一传统论说[16,17,18,19]。

参 考 文 献

[1] P. C. Saffman, The lift on a small sphere in a slow shear flow, *J. Fluid Mech.*, 22 (1965), 385—341.
[2] P. C. Saffman, Corrigendum to The lift on a small sphere in a slow shear flow, *J. Fluid Mech.*, 31 (1968), 624.
[3] S.I. Rubinow and J.B. Keller, The transverse force on a spinning sphere moving in a viscons fluid, *J. Fluid Mech.*, 11 (1961), 447—459.
[4] P.O. Rouhiainen and J.W. Stachiewiz, On the deposition of small particles from turbulent streams, *J. Heat Transfer*, 92 (1970), 19—177.
[5] M.A Rizk and S. E. Elghobashi, The motion of a spherical particle suspended in a turbulent flow near a plane wall, *Phys. Fluids*, 28(3) (1985), 806—811.
[6] 刘小兵等，用 Lagrange 方法分析固体颗粒在湍流场中的运动，华中理工大学学报，22(10) (1994), 1—6.
[7] 刘小兵、程良骏，水涡轮机械中的颗粒运动，华中理工大学学报，22(1) (1994), 10—16.
[8] 刘小兵，水涡轮机械中的固液两相流动及磨损研究，博士学位论文，华中理工大学 (1995).
[9] H. Faxen, *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 17 (1923), 1—6.
[10] H. Brenner, The slow motion of a sphere through a fluid towards a plane surface, *Chem. Engng Sci.*, 16 (1961), 242—251.
[11] A. D. Maude, End effects in a falling-sphere viscometer, *Br. J. Appl. Phys.*, 12 (1961), 293—295.
[12] J. O. Hinze, *Turbulence*, 2nd ED. Mc Graw-Hill, New York (1975).
[13] FN. Frenkiel, *J. Aeronaut. Sci.* 15 (1948), 57—65.
[14] J. Laufer, The structure of turbulence in fully developed pipe flow, *NACA Report*, 1174, 1—18.
[15] V. W. Goldschmit, et al., Turbulent diffusion of small particles suspend in turbulent jets, *Prog. Heat Mass Transfer*, 6 (1972), 487—508.
[16] G. Gouesbet, et al., Dispersion of discrete particle by continuous turbulent motions, *Phys. Fluids*, 27 (1984), 827—837.
[17] A. Picart, et al., Modelling and predicting turbulence field and the disperion of discrete particles transported by turbulent flows, *Int. J. Multiphase Flow*, 12 (1986), 237—261.
[18] P. D.esjonuers, Dispersion of discrete particlesby continuous turbulent motions: New results and discussions, *Phys. Fluids*, 29 (1986), 2147—2151.
[19] H. Ounis and G. Ahmadi, Analysis of dispersion of small spherical particles in a random velocity field, *J. Fluid Eng.*, 112 (1990), 114—120.

Lagrangian Model on the Turbulent Motion of Small Solid Particle in Turbulent Boundary Layer Flows

Liu Xiaobing
(*Sichuan Institute of Technology, Chengdu* 611744, *P. R. China*)
Cheng Liangjun
(*Huazhong University of Science & Technology, Wuhan* 430074, *P. R China*)

Abstract

The Lagrangian equations of motion of small solid particle in turbulent boundary layer flows, taking into account the effects of the drag force caused by the wall presence, the Saffman and the Magus lift forces et al., is studied. Using the spectral method, analytical expressions relating the Lagrangian power spectra of particle velocity to that of the fluid are developed and the results are used to evaluate various response statistics. In this paper, the results clearly show that the turbulent diffusivity of the particle may be larger than that of the fluid for period of long-time.

Key words Lagrangina model, turbulent motion, small solid particle, turbulent boundary layer