应用数学和力学，第18卷 第1期（1997年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

关于PN空间上线性算子的概率范数

肖建中[1]　蒋兴国[2]

（丁协平推荐，1995年3月24日收到，1996年10月20日收到修改稿）

摘　要

本文提出PN空间上线性算子的概率范数的新定义，并用它对算子有界性进行刻划，还讨论了算子空间的完备性．

关键词　PN空间　算子　概率　范数

一、引　　言

文[4]定义了Menger概率赋范线性空间（简称M-PN空间）上线性算子的概率范数，与文[1]、[5]、[6]、[7]的定义比较，主要优点是适用广泛，而且能较好地刻划算子的有界性．本文继文[4]之后，借助单位球$N(1,\ \alpha)$，在较一般的概率赋范线性空间（简称PN空间）上定义线性算子的概率范数，并通过对算子有界性的刻划与算子空间完备性的保持来论述定义的合理性．

文中用$\mathscr{D}$表一切左连续的分布函数的集合，$\mathscr{D}_0=\{f\in\mathscr{D}:\ f^{-1}(1)\neq\phi\}$，$(E,\ \mathscr{F})$表PN空间，其中$\mathscr{F}$为$E$到$\mathscr{D}$或$\mathscr{D}_0$的映象，并记$f_x=\mathscr{F}(x)$，其它有关定义、符号与结果详见文[2]、[3]．

二、PN空间上集合有界性的刻划

定义1　设$(E,\ \mathscr{F})$是PN空间，$\alpha\in[0,\ 1]$，$t\in(0,\ +\infty)$，定义$N(t,\ \alpha)=\{x\in E:\ f_x(t)>1-\alpha\}$，其中$\alpha=0$限于$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$的情形，且约定

$$N(t,\ 0)=\{x\in E:\ f_x(t)=1\}.$$

易知$N(t,\ \alpha)$有下述性质：

引理1　对$\alpha\in[0,\ 1]$，$t\in(0,\ +\infty)$，有

（1）　$tN(1,\ \alpha)=N(t,\ \alpha)$

（2）　$t_1\leqslant t_2\Longrightarrow N(t_1,\ \alpha)\subseteq N(t_2,\ \alpha)$

（3）　$\alpha_1\leqslant\alpha_2\Longrightarrow N(t,\ \alpha_1)\subseteq N(t,\ \alpha_2)$

1　江苏盐城教育学院，盐城　224002．

2　扬州大学农学院，扬州 225009．

定义2 设$(E,\ \mathscr{F})$为PN空间，$x\in E$，$\alpha\in(0,1]$，定义

$$\|x\|_\alpha=\inf\{t>0:\ f_x(t)>1-\alpha\}$$

$$\|x\|=\inf\{t>0:\ f_x(t)=1\}$$

由于$\|\cdot\|_\alpha$含义与文[2]中p_α相同，由文[2]中定理4.1与定理4.2可得：

引理2 (1)若$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$，则$\|\cdot\|$是E上的范数，$(E,\ \|\cdot\|)$为赋范线性空间；

(2) $(E,\ \mathscr{F})$具有条件(PN—5)(文[2])，$\alpha\in(0,\ 1]$，则$\|\cdot\|_\alpha$是E上的半范数，$(E,\ \|\cdot\|_\alpha)$为半范线性空间.

引理3 对每一$\alpha\in(0,\ 1]$

(1) $\{x\in E:\ \|x\|_\alpha<1\}\subseteq N(1,\ \alpha)\subseteq\{x\in E:\ \|x\|_\alpha\leqslant 1\}$

(2) $\{x\in E:\ \|x\|<1\}\subseteq N(1,\ 0)\subseteq\{x\in E:\ \|x\|\leqslant 1\}$

由引理3可知$N(1,\ \alpha)$实际上是PN空间单位球.

以下均设A是$(E,\ \mathscr{F})$中的非空子集，由文[3]中引理2.1、引理2.2、定理1.2及本文引理1～3，可得下列定理1～5：

定理1 设$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$，则A是概率一致有界集的充要条件是：$\exists M>0$，使

$$A\subseteq N(M,\ 0)$$

定理2 设$(E,\ \mathscr{F})$具有(PN—5)，则A是概率有界集的充要条件是：对$\forall\alpha\in(0,\ 1]$，$\exists M=M(\alpha)>0$，使$A\subseteq N(M,\ \alpha)$.

定理3 设$(E,\ \mathscr{F})$具有(PN—5)，则A是概率半有界集的充要条件是：$\exists\alpha_0\in(0,\ 1)$，$\forall\alpha\in(\alpha_0,\ 1)$，$\exists M=M(\alpha)>0$，使$A\subseteq N(M,\ \alpha)$；$\forall\alpha\in(0,\ \alpha_0)$，$\forall M>0$，集合差$A-N(M,\ \alpha)\neq\phi$.

定理4 设$(E,\ \mathscr{F})$具有(PN—5)，则A是概率无界集的充要条件是$\forall\alpha\in(0,\ 1]$，$\forall M>0$，集合差$A-N(M,\ \alpha)\neq\phi$.

定理5 设$t\in(0,\ +\infty)$，则

(1) 若$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$，则$N(t,\ 0)$为$(E,\ \mathscr{F})$的概率一致有界集；

(2) 若$(E,\ \mathscr{F})$具有(PN—5)，则$N(t,\ \alpha)$(其中$\alpha\in(0,\ 1]$)为$(E,\ \mathscr{F})$的非概率无界集.

三、线性算子的概率范数

定义3 设T是PN空间$(E_1,\ \mathscr{F}_1)$到$(E_2,\ \mathscr{F}_2)$的线性算子，定义

$$H_T(t)=\begin{cases}\sup\limits_{s<t}\ \sup\limits_{\alpha\in(0,1]}\ \inf\limits_{x\in N(1,\alpha)} f_{Tx}(s) & (t>0)\\ 0 & (t\leqslant 0)\end{cases}$$

为T的概率范数. 又若$\mathscr{F}_1$取值于$\mathscr{D}_0$，还可定义

$$H_T^0(t)=\begin{cases}\sup\limits_{s<t}\ \inf\limits_{x\in N(1,0)} f_{TX}(s) & (t>0)\\ 0 & (t\leqslant 0)\end{cases}$$

为T的概率范数.

显然$H_T(t)$，$H_T^0(t)$非负、单调增、左连续.

引理4 $H_T(t)\leqslant H_T^0(t)$.

定理6 设T是PN空间$(E_1,\ \mathscr{F}_1)$到$(E_2,\mathscr{F}_2)$的线性算子，若$(E_1,\mathscr{F}_1)$具有(PN—5)，

则T有界（文[3]）的充分必要条件是$\lim\limits_{t\to+\infty}H_T(t)=1$

证明 充分性：因$\lim\limits_{t\to+\infty}H_T(t)=1$，$\forall\lambda\in(0,1]$，$\exists M_0>0$，$\forall t\geqslant M_0$，$H_T(t)\geqslant H_T(M_0)>1-\lambda$，则$\sup\limits_{\alpha\in(0,1]}\inf\limits_{x\in N(1,\alpha)}f_{Tx}(M_0)>1-\lambda$，故$\exists\alpha_0\in(0,1]$，

使
$$\inf_{x\in N(1,\alpha_0)}f_{Tx}(M_0)>1-\lambda \tag{3.1}$$

设A是$(E_1,\mathscr{F}_1)$中任一概率有界集，由于$(E_1,\mathscr{F}_1)$具有(PN—5)，由定理2，对上述α_0，$\exists M_1>0$，使$A\subseteq N(M_1,\alpha_0)$，由引理1，
$$\frac{1}{M_1}A\subseteq N(1,\alpha_0) \tag{3.2}$$

令 $M=M_0M_1$，对$\forall x\in A$，由（3.1）及（3.2）得 $f_{Tx}(M)=f_{T\left(\frac{x}{M_1}\right)}(M_0)>1-\lambda$，即$TA\subseteq N(M,\lambda)$。由定理2，$T$有界。

必要性(反证法)：若$\lim\limits_{t\to+\infty}H_T(t)\neq1$，则$\exists\lambda_0\in(0,1)$，对$\forall t>0$，$H_T(t)<1-\lambda_0$，即

$\forall t>0$，$\sup\limits_{\alpha\in(0,1]}\inf\limits_{x\in N(1,\alpha)}f_{Tx}(t)<1-\lambda_0$

$\forall$自然数n，$\inf\limits_{x\in N(1,\frac{1}{n})}f_{Tx}(n)<1-\lambda_0$

故$\exists x_n\in N\left(1,\dfrac{1}{n}\right)$，使
$$fTx_n(n)<1-\lambda_0 \tag{3.3}$$

则$\{x_n\}$必为概率有界集。

事实上，对$\forall\alpha\in(0,1]$，$\exists n_0$，$\forall n>n_0$，$\frac{1}{n}<\alpha$，$x_n\in N(1,\frac{1}{n})\subseteq(1,\alpha)$。又设$n\leqslant n_0$时$f_{x_n}(t_n)>1-\alpha$，令$M_0=\max\{1,t_1,t_2,\cdots,t_{n_0}\}$，则$\{x_n\}\subseteq N(M_0,\alpha)$。

但T有界，$\{Tx_n\}$为概率有界集，由定理2，$\exists M=M(\lambda_0)>0$，使$\{Tx_n\}\subseteq N(M,\lambda_0)$，即$fTx_n(M)>1-\lambda_0$，$\forall n>M$必有$fTx_n(n)>1-\lambda_0$，与(3.3)矛盾。

定理7 设T是$(E_1,\mathscr{F}_1)$到$(E_2,\mathscr{F}_2)$的线性算子，$\mathscr{F}_1$取值于$\mathscr{D}_0$，则T将概率一致有界集映为概率一致有界集的充要条件是：$\exists M>0$，$H_T^0(M)=1$。

证明 充分性：由题设$H_T^0(M)=1$，因此$\inf\limits_{x\in N(1,0)}f_{Tx}(M)=1$亦即
$$\forall x\in N(1,0),\ f_{Tx}(M)=1 \tag{3.4}$$

现设A为概率一致有界集，由定理1及引理1，$\exists M_1>0$，$\dfrac{1}{M_1}A\subseteq N(1,0)$ (3.5)

令$M_0=M_1M$，$\forall x\in A$，由(3.4)与(3.5)，$f_{Tx}(M_0)=f_{T\left(\frac{x}{M_1}\right)}(M)=1$，即$TA\subseteq N(M_0,0)$

必要性：由定理5，$N(1,0)$为概率一致有界集，由题设，$\exists M_0>0$，$TN(1,0)\subseteq N(M_0,0)$即$\forall x\in N(1,0)$，$f_{Tx}(M_0)=1$，取$M=M_0H$，则$H_T^0(M)=1$。

四、算子空间的性态

定理8 设PN空间$(E_1,\mathscr{F}_1)$，$(E_1,\mathscr{F}_2)$具有（PN—5），$B(E_1,E_2)$为$(E_1,\mathscr{F}_1)$到$(E_2,\mathscr{F}_2)$的有界算子集，定义线性运算$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x$，$(bT)x=b(Tx)$，则

(1) $(B(E_1, E_2), \mathscr{H})$为概率半范线性空间；

(2) 若$\mathscr{F}_1$取值于$\mathscr{D}_0$，则$(B(E_1, E_2), \mathscr{H})$为PN空间；

(3) 若$\mathscr{F}_1$取值于$\mathscr{D}_0$，则$(B(E_1, E_2), \mathscr{H}^0)$为PN空间。

证明 由文[3]中定理 2.4，有界性与连续性等价，易知 $B(E_1, E_2)$ 为线性空间。当$T\in B(E_1, E_2)$时，由定理6，$\lim\limits_{t\to+\infty} H_T(t)=1$，由引理4，$\lim\limits_{t\to+\infty} H_T^0(t)=1$，$H_T(t)$与$H_T^0(t)$为$T$在$\mathscr{D}$中的映象，$H_T\in\mathscr{H}$，$H_T^0\in\mathscr{H}^0$，且(PN—2)成立：$H_T(0)=H_T^0(0)=0$。

(1) (PN—1)充分性显然。即

$$T=0,\ H_0(t)=H(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ 0 & (t\leqslant 0)\end{cases}$$

(PN—3)：$\forall$实数$b\neq 0$，由$(bT)x=b(Tx)$，

$$H_{bT}(t)=\sup_{s<t}\ \sup_{\alpha\in(0,1]}\ \inf_{x\in N(1,\alpha)} f_{b(Tx)}(s)$$

$$=\sup_{s<t}\ \sup_{\alpha\in(0,1]}\ \inf_{x\in N(1,\alpha)} f_{Tx}\left(\frac{s}{|b|}\right)$$

$$=\sup_{s<\frac{t}{|b|}}\ \sup_{\alpha\in(0,1]}\ \inf_{x\in N(1,\alpha)} f_{Tx}(s)=H_T\left(\frac{t}{|b|}\right)$$

(PN—4) $\forall T_1,\ T_2\in B(E_1, E_2)$，$\forall$实数$t_1,\ t_2>0$，当$H_{T_1}(t_1)=1$，$H_{T_2}(t_2)=1$时，有：$\forall\lambda\in(0,1]$，$\exists s_1<t_1$，$s_2<t_2$，$\alpha_0\in(0,1]$，使$\forall x\in N(1,\alpha_0)$，$f_{T_1x}(s_1)>1-\lambda$，$f_{T_2x}(s_2)>1-\lambda$。由$(E_2, \mathscr{F}_2)$具有(PN—5)，$f_{(T_1+T_2)x}(s_1+s_2)>1-\lambda$。$H_{T_1+T^2}(t_1+t_2)\geqslant \inf\limits_{x\in N(1,\alpha_0)} f_{(T_1+T_2)x}(s_1+s_2)\geqslant 1-\lambda$由$\lambda$的任意性知$H_{T_1+T_2}(t_1+t_2)=1$。

(2) (PN—1)必要性：设$T\neq 0$，则$\exists x_0\in E_1$，使$Tx_0\neq 0$，故 $\exists t_0>0$，使

$$f_{Tx_0}(t_0)<1 \tag{4.1}$$

由$\mathscr{F}_1$取值于$\mathscr{D}_0$知，$\exists M_0>0$，$f_{x_0}(M_0)=1$；

$\forall\alpha\in(0,1]$，$\frac{x_0}{M_0}\in N(1,\alpha)$，$\inf\limits_{x\in N(1,\alpha)} f_{Tx}(s)\leqslant f_{T(\frac{x_0}{M_0})}(s)$

故

$$\sup_{\alpha\in(0,1)}\ \inf_{x\in N(1,\alpha)} f_{Tx}(s)\leqslant f_{Tx_0}(sM_0) \tag{4.2}$$

由(4.1)与(4.2)，$H_T\left(\frac{t_0}{M_0}\right)\leqslant \sup\limits_{s<\frac{t_0}{M_0}} f_{Tx_0}(sM_0)\leqslant f_{Tx_0}(t_0)<1$ $H_T(t)\neq H(t)$。

(3) (PN—1)必要性：设$T\neq 0$，必得(4.1)；由于$\mathscr{F}_1$取值于$\mathscr{D}_0$，$\exists M_0>0$，$f_{x_0}(M_0)=1$，$\frac{x_0}{M_0}\in N(1,0)$，

$$\inf_{x\in N(1,0)} f_{Tx}(s)\leqslant f_{T(\frac{x_0}{M_0})}(s)=f_{Tx_0}(sM_0) \tag{4.3}$$

由(4.1)及(4.3)，$H_T^0\left(\frac{t_1}{M_0}\right)\leqslant \sup\limits_{s<\frac{t_0}{M_0}} f_{Tx_0}(sM_0)\leqslant f_{Tx_0}(t_0)<1$，$H_T^0(t)\neq H(t)$。

(PN—4)：$\forall T_1,\ T_2\in B(E_1, E_2)$，$\forall t_1,\ t_2>0$，当$H_{T_1}^0(t_1)=1$，$H_{T_2}^0(t_2)=1$时，有：$\forall\lambda\in(0,1]$，$\exists s_1<t_1$，$s_2<t_2$，$\forall x\in N(1,0)$，$f_{T_1x}(s_1)>1-\lambda$，$f_{T_2x}(s_2)>1-\lambda$，由$(E_2,\mathscr{F}_2)$具有(PN—5)，得$f_{(T_1+T_2)x}(s_1+s_2)>1-\lambda$ $H_{T_1+T_2}^0(t_1+t_2)\geqslant \inf\limits_{x\in N(1,0)} f_{(T_1+T_2)x}(s_1+s_2)\geqslant$

$1-\lambda$，由λ的任意性知$H^0_{T_1+T_2}(t_1+t_2)=1$，其余同(1)。

引理5　设PN空间$(E_1,\mathscr{F}_1)$与$(E_2,\mathscr{F}_2)$均具有(PN—5)，则$(B(E^1,E_2),\mathscr{H})$也具有(PN—5)。

证明　设$H_{T_1}(t_1)>1-\lambda$，$H_{T_2}(t_2)>1-\lambda$　则$\exists\eta$使$H_{T_1}(t_1)>\eta>1-\lambda$，$H_{T_2}(t_2)>\eta>1-\lambda$　从而$\exists s_1<t_1$，$s_2<t_2$，$\exists\alpha_0\in(0,1]$，$\forall x\in N(1,\alpha)$，其中$\alpha\in(0,\alpha_0]$，有$f_{T_1x}(s_1)>\eta$，$f_{T_2x}(s_2)>\eta$　由于$(E_2,\mathscr{F}_2)$具有(PN—5)，$f_{(T_1+T_2)x}(s_1+s_2)>\eta$ 故$H_{T_1+T_2}(t_1+t_2)=\sup\limits_{s<t_1+t_2}\sup\limits_{\alpha\in(0,\alpha_0]}\inf\limits_{x\in N(1,\alpha)}f_{(T_1+T_2)x}(s)\geqslant\eta>1-\lambda$。

引理6　设PN空间$(E,\mathscr{F})$具有(PN—5)，$\lim\limits_{n\to\infty}f_{x_n-x}(t)=H(t)$，$f_x(t)$在$t_0$连续，则$f_x(t_0)\geqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}f_{x_n}(t_0)$。

证明　设$b=\varlimsup\limits_{n\to\infty}f_{x_n}(t_0)$，$b=0$结论显然成立，设$0<b\leqslant1$，$\forall\eta\in(0,b)$，$\forall\varepsilon>0$，令$\lambda=1-(b-\eta)>0$　$\exists$自然数N，$n>N$有$f_{x-x_n}(\varepsilon)>1-\lambda$，$f_{x_n}(t_0)>b-\eta=1-\lambda$由于$(E,\mathscr{F})$具有(PN—5)，$f_x(t_0+\varepsilon)=f_{(x-x_n)+x_n}(\varepsilon+t_0)>b-\eta$　令$\eta\to0$，$f_x(t_0+\varepsilon)\geqslant b$，因$f_x(t)$在$t_0$连续，令$\varepsilon\to0$即得。

定理9　设PN空间$(E_1,\mathscr{F}_1)$，$(E_2,\mathscr{F}_2)$具有(PN—5)，$\mathscr{F}_1$取值于$\mathscr{D}_0$，$(E_2,\mathscr{F}_2)$完备，则$(B(E_1,E_2),\mathscr{H})$完备。

证明　设$\{T_k\}$为$(B(E_1,E_2),\mathscr{H})$中任一Cauchy列，$\forall\varepsilon>0$，$\forall\lambda\in(0,1]$，$\exists$自然数K，$\forall n$，$k\geqslant K$有$H_{T_n-T_k}(\varepsilon)>1-\lambda$　故

$$\sup_{\alpha\in(0,1]}\inf_{x\in N(1,\alpha)}f_{(T_n-T_k)x}(\varepsilon)>1-\lambda \tag{4.4}$$

$\forall x_0\in E_1$，由$\mathscr{F}_1$取值于$\mathscr{D}_0$，$\exists M_0>0$，使$f_{x_0}(M_0)=1$；对$\forall\alpha\in(0,1]$，$\dfrac{x_0}{M_0}\in N(1,\alpha)$有

$$f_{(T_n-T_k)\frac{x_0}{M_0}}(\varepsilon)\geqslant\inf_{x\in N(1,\alpha)}f_{(T_n-T_k)x}(\varepsilon) \tag{4.5}$$

由(4.4)与(4.5)，$f_{(T_n-T_k)x_0}(M_0\varepsilon)>1-\lambda$，$\{T_kx_0\}$是$(E_2,\mathscr{F}_2)$的Cauchy列，由$(E_2,\mathscr{F}_2)$完备知$\{T_kx_0\}$收敛。

现由$\lim\limits_{k\to\infty}f_{(T_k-T)x_0}(t)=H(t)$定义$T$，由$(E_2,\mathscr{F}_2)$具有(PN—5)，易知$T$是线性算子。

由(4.4)，$\forall n$，$k\geqslant K$时，$\exists\alpha_0\in(0,1]$，当$\alpha\in(0,\alpha_0]$时，$\inf\limits_{x\in N(1,\alpha)}f_{(T_n-T_k)x}(\varepsilon)>1-\lambda$故$\forall x\in N(1,\alpha)$，其中

$$\alpha\in(0,\alpha_0],\ \forall\beta\in(\varepsilon,2\varepsilon),\ f_{(T_n-T_k)x}(\beta)>1-\lambda \tag{4.6}$$

由于$f_{(T_n-T_k)x}(t)$在$(-\infty,+\infty)$单调增，$f_{(T_n-T)x}(t)$在$(-\infty,+\infty)$上几乎处处连续，$\exists\beta_0\in(\varepsilon,2\varepsilon)$，$f_{(T_n-T)x}(t)$在$\beta_0$连续，$\lim\limits_{k\to\infty}f_{[(T_n-T)-(T_n-T_k)]x}(t)=\lim\limits_{k\to\infty}f_{(T_k-T)x}(t)=H(t)$，由引理6及(4.6)，　$f_{(T_n-T)x}(\beta_0)\geqslant\varlimsup\limits_{k\to\infty}f_{(T_n-T_k)x}(\beta_0)\geqslant1-\lambda$，于是$n\geqslant K$时，$H_{T_n-T}(2\varepsilon)=\sup\limits_{s<2\varepsilon}\sup\limits_{\alpha\in(0,\alpha_0]}\inf\limits_{x\in N(1,\alpha)}f_{(T_n-T)x}(s)\geqslant1-\lambda$，即

$$\lim_{n\to\infty}H_{T_n-T}(t)=H(t) \tag{4.7}$$

最后证T有界．由于$\forall\varepsilon>0$，$\forall\lambda\in(0,1]$，$\exists N$，$\forall n\geqslant N$时$H_{T_n-T}(\varepsilon)>1-\lambda$；$T_n$有界，由定理6，$\exists M>\varepsilon$，　$\forall t>M-\varepsilon$时　$H_{T_n}(t)>1-\lambda$，　于是当$t>M$时，　由引理5，

$$H_T(t)=H_{[(T-T_n)+T_n]}(\varepsilon+t-\varepsilon)>1-\lambda,$$

由 λ 的任意性，$\lim\limits_{t\to\infty} H_T(t)=1$，由定理 6，$T\in B(E_1, E_2)$。综上，$(B(E_1, E_2), \mathscr{H})$ 完备。

参 考 文 献

[1] V. Radu, On a random nord and continuity of linear operators on random normed spaces, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 280 (1975), 80—89.

[2] 张石生，概率度量空间的基本理论及应用(Ⅰ)，应用数学和力学，9(2) (1988), 117—126.

[3] 张石生，概率度量空间的基本理论及应用(Ⅱ)，应用数学和力学，9(3) (1988), 193—204.

[4] 肖建中，M-PN 空间上线性算子的概率范数及有界性刻划，数学研究与评论，13(4) (1993), 631—632.

[5] 林 熙，概率赋范空间上的线性算子，工程数学学报，4(2) (1987), 43—48.

[6] 苏永福，PN空间上的一类线性泛函的Hahn-Banach定理及应用，内蒙古师大学报（自然），2 (1990), 16—17.

[7] 王元夔等、米献炜，Menger-PN 空间 λ_0-有界线性算子的概率范数，河北师大学报（自然），4 (1991), 1—2.

[8] 龚怀云，概率赋范空间上的线性算子，数学研究与评论，10(2) (1990), 239—242.

Probabilistic Norm of Linear Operators on PN Space

Xiao Jianzhong

(*Jiangsu Yancheng Educational Institute, Yancheng, Jiangsu* 224002, *P. R. China*)

Jiang Xingguo

(*Agricultural College of Yangzhou University, Yangzhou* 225009, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, the new definition of probabilistic norm of the linear operators on the PN space is introduced. In virtue of this, the boundedness of the operators is described and the completeness of the PN space of the linear operators is given.

Key words PN space, operator, probability, norm