

# 一种预测界面裂纹形成的新方法

胡互让<sup>1</sup> 吴承平<sup>2</sup>

(1995年6月9日收到)

## 摘 要

本文提出了一种预测界面裂纹形成的新方法,称为“ $\beta=0$ 法”。这是一种变换方法,通过调整有关材料弹性常数,把振荡应力场变换为非振荡应力场。界面韧性曲线将随调整后新的材料性质而改变。本文方法预测的临界荷载与界面断裂力学预测的临界荷载严格一致。最后通过几个实例说明了保持能量释放率不变的情况下,怎样实施 $\beta=0$ 法。

**关键词** 界面裂纹 裂纹形成  $\beta=0$ 法 临界荷载

## 一、前 言

不同弹性固体材料间的界面裂纹尖端附近应力场是两种奇异的应力场的线性组合,即一个耦合的振荡场和一个非振荡场的组合。这一振荡场用复变量  $K$  度量 ( $K=K_1+iK_2$  称为界面应力强度因子),而非振荡场用实变量  $K_0$  度量<sup>[1]</sup>。振荡场的奇异性用距裂纹尖端  $r$  处的  $r^{-1/2+i\varepsilon}$  表征,  $\varepsilon$  为双材料常数,通常称为振荡指数。对振荡奇异性来说,1型和2型是相互内在耦合的,并且  $K$  的单位变得具有材料依赖性。对这种问题的处理,传统的断裂力学已经发展了一些新的概念和方法,例如,复应力强度因子、混合模型、小范围接触区域等。另一种处理界面裂纹的方法是简单地令  $\varepsilon=0$ <sup>[2,3]</sup>。通过消除振荡指数,来得到一个奇异的负二次根,从而使传统的断裂力学完全可以处理这类问题。本文方法基于如下事实:在多数有实际意义的界面中, $\varepsilon$ 都非常小。本文方法的精度取决于 $\varepsilon$ 的大小和就混合模型而论的界面韧性  $G_c$  的变化。如果 $\varepsilon$ 并不小,或  $G_c$  的形状并不那样平直的话,其误差是不容忽视的。

本文提出了一种用于预测界面裂纹形成的新方法,称为“ $\beta=0$ 法”(其中  $\beta$  为广义 Dundurs 常数之一)。在断裂预测的意义上,通过调整有关材料的弹性常数将实际的振荡应力场变换为非振荡应力场,从而就可用传统的断裂力学方法来预测界面裂纹形成。本文方法既简便又精确。

## 二、振荡指数的消除

“ $\beta=0$ 法”是一种变换法,通过直接调整界面上和/或界面下材料的某些弹性常数使  $\beta=$

1 美国西拉库斯大学机械、航空和创造工程系, NY13244.

2 重庆交通学院123信箱,重庆 630074.

0, 从而把振荡应力场转化为非振荡应力场。界面韧度轨迹（即韧度与混合模型之间的依赖关系）也随着材料的新性质而改变。进行界面裂纹预测所要求的临界荷载是基于变化后的材料性质及相应的新的韧度轨迹的。

在修正材料弹性常数时，有两个条件必须满足，即：

(a) 使  $\beta=0$  ( $\varepsilon=0$ )。这一必要条件将能消除裂纹尖端应力场的振荡奇异性，重新得到  $r^{-1/2}$  奇异性。

(b) 在相同荷载下，保持  $G$  不变作为实际振荡界面。这一条件能保证采用本文方法时，韧度轨迹将只有相位的变化。

### 三、裂纹形成预测

我们将着重讨论不同各向同性材料和正交异性材料间的界面裂纹问题。图 1 示出了一个界面裂纹及其参考坐标系。设裂纹位于  $x_3$  为某常数的  $x_1x_2$  平面上。裂纹平面以上为材料 1，以下为材料 2。对正交异性材料的不同界面裂纹，能量释放率和复应力强度因子  $K$  的关系由下述方程确定（本文中略去了 3 型分量）

$$G = H_{11} |K|^2 / 4 \cosh^2(\pi \varepsilon) \quad (3.1)$$

其中

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad (3.2)$$

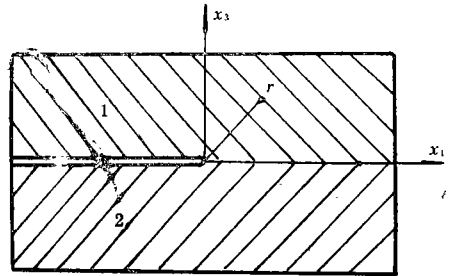


图1 界面裂纹及参考坐标系

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{H_{11}H_{33}}} ([\sqrt{S_{11}S_{33}} + S_{13}]_2 - [\sqrt{S_{11}S_{33}} + S_{13}]_1) \quad (3.3)$$

$$H_{11} = \sqrt{2} \{ [S_{11}\lambda^{-1/4} \sqrt{1+\rho}]_2 + [S_{11}\lambda^{-1/4} \sqrt{1+\rho}]_1 \} \quad (3.4)$$

$$H_{33} = \sqrt{2} \{ [S_{11}\lambda^{-3/4} \sqrt{1+\rho}]_2 + [S_{11}\lambda^{-3/4} \sqrt{1+\rho}]_1 \} \quad (3.5)$$

方括号外的角标“1”和“2”分别表示材料 1 和材料 2。 $\lambda$  和  $\rho$  为两个无量纲弹性参数，它们是正交异性固体材料各向异性的度量，定义如下：

$$\lambda = S_{11}/S_{33}, \quad \rho = (2S_{13} + S_{55}) / 2\sqrt{S_{11}S_{33}} \quad (3.6)$$

(3.3)、(3.6) 中的材料柔度  $S_{ij}$  按通常意义定义，则每一材料的应力应变关系具有如下形式：

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (3.7)$$

并具有如下对应关系：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= \{ \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{31} \quad 2\varepsilon_{12} \}^T \\ \sigma_i &= \{ \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31} \quad \sigma_{12} \}^T \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

利用 (3.7) 中  $S_{ij}$  的定义，可给出平面应力（相对于  $x_2$  轴）的结果，对于平面应变问题， $S_{ij}$  又换成  $(S_{ij} - S_{i2}S_{j2}/S_{22})$ 。

一般界面的复应力强度因子取为如下形式：

$$K = YT \sqrt{L} L^{-i\alpha} \exp[i\Psi] \quad (3.9)$$

其中  $T$  为典型的负载结构应力幅值， $L$  为裂纹特征长度， $Y$  是无量纲正实数， $\Psi$  为  $KL^{i\alpha}$  的

相角,  $\Psi$  也归诸混合模型.  $Y$  和  $\Psi$  都取决于结构的几何和荷载状况. 通常, 韧度轨迹为:

$$G_e = G_e(\Psi) \quad (3.10)$$

$$\text{其中 } \tan \hat{\Psi} = \text{Im}(K\hat{L}^{i\epsilon}) / \text{Re}(K\hat{L}^{i\epsilon}) \quad (3.11)$$

这里  $\hat{L}$  可以是任意长度值, 但其值必须明确给出.  $\Psi$  和  $\hat{\Psi}$  的关系为

$$\Psi = \hat{\Psi} + \epsilon \ln(L/\hat{L}) \quad (3.12)$$

因此, 当韧度轨迹是  $\Psi$  的函数而不是  $\hat{\Psi}$  的函数时, 只须将  $G_e(\hat{\Psi})$  平移一个  $\epsilon \ln(L/\hat{L})$  的角度即可. 采用新的长度参数  $L$ , 利用新的韧度轨迹预测的裂纹形成与采用原长度参数  $\hat{L}$ , 利用原韧度轨迹预测的裂纹形成并无不同.

现在考虑  $\beta=0$  法. 令  $\beta=0$ ,  $G$  最好不变. 由 (3.1) 及 (3.9) 式, 在相同外载下要求

$$Y^2 H_{11} / \cosh^2(\pi\epsilon) = \hat{Y}^2 \hat{H}_{11} \quad (3.13)$$

其中  $\hat{Y}$  和  $\hat{H}_{11}$  为  $H_{11}$  和  $Y$  在  $\beta=0$  时对应的量. 此时复应力强度因子  $K$  变为

$$\hat{K} = \hat{Y} T \sqrt{L} \exp[i\hat{\Psi}_0] \quad (3.14)$$

其中  $\hat{K} = \hat{K}_1 + i\hat{K}_2$ ,  $\hat{\Psi}_0$  为  $\hat{K}$  的相角, 定义如下:

$$\tan \hat{\Psi}_0 = \hat{K}_2 / \hat{K}_1 \quad (3.15)$$

虽然现在  $\epsilon=0$ , 但  $\hat{K}_1$  和  $\hat{K}_2$  并不是传统的 I 型和 II 型应力强度因子  $K_I$  和  $K_{II}$ . 它们之间有如下关系

$$\hat{K}_I = \hat{K}_1 \sqrt{\hat{H}_{11} / \hat{H}_{33}}, \quad \hat{K}_{II} = \hat{K}_2 \quad (3.16)$$

其中  $\hat{K}_{33}$  为  $\beta=0$  条件下  $H_{33}$  的对应量. 我们定义  $\hat{\beta}$  为

$$\hat{\beta} = \hat{\Psi}_0 - \hat{\Psi} \quad (3.17)$$

显然,  $\hat{\beta}$  为  $\epsilon=0$  界面和规范了长度参数  $\hat{L}$  的原界面的相角差.  $\hat{\beta}$  角的值取决于界面几何特性和振荡指数  $\epsilon$ , 但与外荷载无关. 对于一已知界面,  $\beta=0$  时的刚度曲线为  $\hat{G}_e(\hat{\Psi}_0)$ , 它是  $G_e(\hat{\Psi})$  角移  $\hat{\beta}$  的结果, 即

$$\hat{G}_e(\hat{\Psi}_0) = G_e(\hat{\Psi} + \hat{\beta}) = G_e(\hat{\Psi}) \quad (3.18)$$

$\hat{G}_e(\hat{\Psi}_0)$  和  $G_e(\hat{\Psi})$  的关系示于图 2. 注意到对一给定界面断裂问题, 一旦利用  $\beta=0$  法求得应力强度因子的解, 则  $\hat{\Psi}_0$  就可知道了, 从而  $\hat{\beta}$  也可知道了. 在附录中列出了采用  $\beta=0$  法, 利用新的韧度轨迹  $\hat{G}_e(\hat{\Psi}_0)$  预测临界荷载. 该临界荷载与利用完全振荡场得到的临界荷载严格一致.

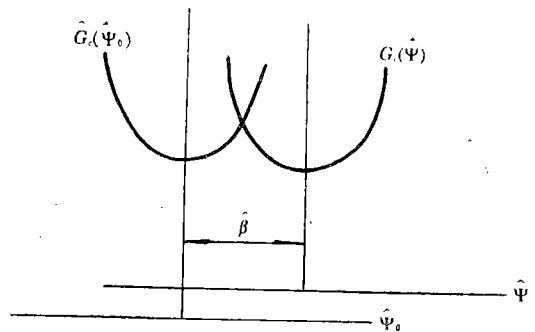


图 2 韧度轨迹  $\hat{G}_e(\hat{\Psi}_0)$  和  $G_e(\hat{\Psi})$  的关系

#### 四、 $\beta=0$ 法的实施步骤

正如第二节所讨论的,  $\beta=0$  法要求, 当令  $\beta=0$  时, 在相同的荷载下  $G$  必须保持不变. 在本节中, 将介绍一种具体的方法, 通过调整材料的弹性常数在某种意义上使  $\beta=0$  同时又使总的能量释放率不受影响. 为了更详细地说明, 下面分别讨论各向同性和正交异性界面.

##### 4.1 各向同性界面

引入一个刚度比  $\Sigma$  的定义

$$\Sigma = [E]_1/[E]_2 \quad (4.1)$$

则Dundurs参数 $\alpha$ 和 $\beta$ <sup>[4]</sup>可以写为

$$\alpha = (\Sigma - 1)/(\Sigma + 1) \quad (4.2)$$

$$\text{及} \quad \beta = (\Sigma[1-\nu]_2 + [1-\nu]_1)/2(1+\Sigma) \quad (4.3)$$

方程(4.1)和(4.3)为平面应力情况,对平面应变须分别将 $E$ 和 $\nu$ 写为 $E/(1-\nu^2)$ 和 $\nu/(1-\nu)$ .

由(4.3),为使 $\beta=0$ ,一般可调整任一种材料或两种材料的 $E$ 和 $\nu$ .不过,对平面应力变形,因为 $0 \leq \nu \leq 0.5$ ,只可能对界面令 $\beta=0$ ,这里 $0.5 \leq \Sigma \leq 2$ .

我们发现,在裂纹弯折时,弯折角及其相关的能量释放率仅与 $\beta$ 略微有关,而非常依赖于 $\alpha$ <sup>[2]</sup>.一般说来,就 $\alpha$ 和 $\beta$ 而言,在断裂过程中, $\alpha$ 比 $\beta$ 起的作用更大.因此,当“令”(forcing) $\beta=0$ 时,最好保持 $\alpha$ 不变.由于(3.9)式中 $K$ 的展开式对不同的问题是不相同的,因此保持 $G$ 不变而使 $\beta=0$ 的方法也将会不相同.下面给出几个实例.

### 1. 无限板中的内裂纹

考虑两不同材料半平面间长度为 $2a$ 的裂纹,在无限远处的应力状态为 $(\sigma_{yy}^\infty, \sigma_{yz}^\infty)$ <sup>[5]</sup>.在右边裂纹尖端处的应力强度因子为

$$K = (\sigma_{yy}^\infty + i\sigma_{yz}^\infty)(1+2i\varepsilon)(2a)^{-1/2}\sqrt{\pi a} \quad (4.4)$$

能量释放率为

$$G = \frac{(1+4\varepsilon^2)\pi a}{[E]_1(1-\alpha)\cosh^2(\pi\varepsilon)}((\sigma_{yy}^\infty)^2 + (\sigma_{yz}^\infty)^2) \quad (4.5)$$

为使 $G$ 保持不变,可选择使 $\alpha$ 和 $(1+4\varepsilon^2)/\cosh^2(\pi\varepsilon)/[E]_1$ 保持不变.若用 $[\bar{E}]_1$ 和 $[\bar{E}]_2$ 表示材料1和材料2的新模量,从而使振荡指数消失而 $G$ 不受影响,那末 $G$ 保持不变的条件可表示为:

$$[\bar{E}]_1 = \frac{[E]_1 \cosh^2(\pi\varepsilon)}{1+4\varepsilon^2}, [\bar{E}]_2 = \frac{[E]_2 \cosh^2(\pi\varepsilon)}{1+4\varepsilon^2} \quad (4.6)$$

### 2. 具有残余张力的薄膜(Hutchinson, 1990)<sup>[3]</sup>

具有残余张应力 $\sigma$ 的薄膜材料1,随着在弹性基层材料2上.当薄膜厚度 $h$ 较基层厚度小得很多时,沿裂纹的应力强度因子由下式给出

$$K = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2(1-\beta^2)}} \sigma h^{1/2-1\varepsilon} \exp[i\omega(\alpha, \beta)] \quad (4.7)$$

其中 $\omega(\alpha, \beta)$ 为相角.将(4.7)代入(3.1)得:

$$G = \sigma^2 h/2[E]_1 \quad (4.8)$$

保持 $G$ 不变的条件变为

$$[\bar{E}]_1 = [E]_1 \quad (4.9)$$

### 3. 夹层结构试件(Hutchinson, 1990)<sup>[3]</sup>

材料2薄层夹在材料1的两个平面体之间,界面裂纹位于薄层和上面一块材料之间.如果夹层厚度 $h$ 较其他方向的尺寸小得很多,则复应力强度因子可表示为

$$K = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1-\beta^2}} (K_I + iK_{II}) h^{-1\varepsilon} \exp[i\omega(\alpha, \beta)] \quad (4.10)$$

其中 $K_I, K_{II}$ 为没有中间夹层(即 $h=0$ )时均匀物体材料1传统的应力强度因子.可将它们看作作用荷载的度量. $\omega(\alpha, \beta)$ 为 $K h^{1\varepsilon}$ 对传统应力强度因子的相角移动 $G$ 由下式给出:

$$G = (K_I^2 + K_{II}^2)/[E]_1 \quad (4.11)$$

$G$ 保持不变的条件同(4.9)式.

4. 裂纹尖端单元(Schapery & Davidson, 1990)<sup>[6]</sup>

裂纹尖端单元为包含一边裂纹的平板单元。裂纹平面以上部分的高度为  $t_1$ ，以下部分的高度为  $t_2$ 。面内力  $N_1, N_2$  和弯矩  $M_1, M_2$  作用在板的一边，其余边完全固定。设  $t_1$  和  $t_2$  较裂纹长度和板的未裂部分长度小得很多，这时经典板理论仍然适用。对各向同性双材料偶，求得能量释放率为

$$G = 0.5(C_1 N_o^2 + C_2 M_o^2 + 2\sqrt{C_1 C_2} N_o M_o \sin \Gamma) \quad (4.12)$$

其中  $N_o$  和  $M_o$  分别为集中在裂纹尖端的力和弯矩，是外荷载  $N_1, N_2, M_1$  和  $M_2$  的线性组合<sup>[6]</sup>， $C_1, C_2$  和  $\Gamma$  由下式给出

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{4}{[E]_1 t_1^3} (1 + \Sigma/\eta) \\ C_2 &= \frac{12}{[E]_1 t_1^3} (1 + \Sigma/\eta^3) \\ \sin \Gamma &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Sigma - \eta^2}{\sqrt{(\Sigma + \eta)(\Sigma + \eta^3)}} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

上式中  $\eta = t_2/t_1$  为厚度比。这说明，对各向同性双材料偶， $M_o$  和  $N_o$  取决于  $\Sigma, \eta$  和外荷载。由(4.12)和(4.13)可看出，如果  $\Sigma$  (或  $\alpha$ ) 和  $[E]_1$  保持不变，则  $G$  也不会变。这一条件可表示为

$$[\bar{E}]_1 = [E]_1, [\bar{E}]_2 = [E]_2 \quad (4.14)$$

此结论概括于表1中。注意到  $G$  保持不变的条件可能取决于问题的具体情况，示于表1的结论是在上文讨论的多数实例基础上概括出来的。

表 1 各向同性材料界面  $\beta=0$  的条件

	平 面 应 变	平 面 应 力
$\beta=0$	$\left[ \frac{1-\nu-2\nu^2}{E} \right]_1 = \left[ \frac{1-\nu-2\nu^2}{E} \right]_2$	$\left[ \frac{1-\nu}{E} \right]_1 = \left[ \frac{1-\nu}{E} \right]_2$
$\alpha=\text{const}$	$\left[ \frac{E}{1-\nu^2} \right]_2 / \left[ \frac{E}{1-\nu^2} \right]_1 = \text{const}$	$\frac{[E]_2}{[E]_1} = \text{const}$
$G=\text{const}$	$\left[ \frac{E}{1-\nu^2} \right]_1 = \text{const}$ $\left[ \frac{E}{1-\nu^2} \right]_2 = \text{const}$	$[E]_1 = \text{const}$ $[E]_2 = \text{const}$
按 $\beta=0$ 的结论	可以调整的参数 $[E]_1, [E]_2, [\nu]_1, [\nu]_2$	当 $1/2 \leq [E]_1/[E]_2 \leq 2$ , 可 仅调整 $[\nu]_1, [\nu]_2$ , 其余情况不行

## 4.2 正交异性界面

对正交异性界面， $\beta=0$  的条件可用材料模量表示为<sup>[7]</sup>

$$\left[ \frac{1}{E_{11}} \left( \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} - \nu_{13} \right) \right]_1 = \left[ \frac{1}{E_{11}} \left( \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} - \nu_{13} \right) \right]_2 \quad (4.15)$$

同时正交异性材料的广义 Dundurs 参数  $\alpha$  为<sup>[11]</sup>

$$\alpha = \left( \frac{[E_{11}E_{33}]_1}{[E_{11}E_{33}]_2} - 1 \right) / \left( \frac{[E_{11}E_{33}]_1}{[E_{11}E_{33}]_2} + 1 \right) \quad (4.16)$$

方程(4.15)和(4.16)为平面应力情况；对平面应变情况， $E_{ii}(i=1,3)$  和  $\nu_{13}$  须分别改为

$E_{ii}/(1-\nu_{i2}\nu_{2i}) (i=1,3)$ 和 $(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23})/(1-\nu_{12}\nu_{21})$ 。

由方程(4.5), 为使 $\beta=0$ , 可调整任一种材料或两种材料的 $E_{11}$ ,  $E_{33}$ 和 $\nu_{13}$ 。在调整材料性质使 $\beta=0$ 时, 要求保持 $\alpha$ 不变。为此 $[E_{11}E_{33}]_1/[E_{11}E_{33}]_2$ 必须保持不变。至于保持 $G$ 不受影响的条件, 将视具体问题而定。下面考察裂纹尖端单元, 其他问题也可用类似的方法考察。

前面讨论了各向同性材料, 现在我们考虑裂纹平面上、下的材料为匀质正交异性的情况, 发现方程(4.12)和(4.13)仍可通过如下代换导出<sup>[7]</sup>:

$$[E_{11}]_1 \rightarrow [E]_1, [E_{11}]_1/[E_{11}]_2 \rightarrow \Sigma \quad (4.17)$$

类似于各向同性双材料偶, 正交异性双材料偶的 $M_0$ 和 $N_0$ 也取决于 $[E_{11}]_1/[E_{11}]_2$ ,  $\eta$ 和外荷载。因此保持 $G$ 不变的条件可表示为

$$[\bar{E}_{11}]_1 = [E_{11}]_1, [\bar{E}_{11}]_2 = [E_{11}]_2 \quad (4.18)$$

上述讨论结果归纳于表2中。

表 2 正交异性双材料偶 $\beta=0$ 的条件

	平 面 应 变	平 面 应 力
$\beta=0$	$\left[ \frac{1}{E_{11}} \left( \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} (1-\nu_{12}\nu_{21})(1-\nu_{23}\nu_{32}) - \nu_{13} - \nu_{12}\nu_{13} \right) \right]_1$ = $\left[ \quad \right]_2$	$\left[ \frac{1}{E_{11}} \left( \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} - \nu_{13} \right) \right]_1$ = $\left[ \quad \right]_2$
$\alpha=\text{const}$	$\left[ \frac{E_{11}E_{33}}{(1-\nu_{12}\nu_{21})(1-\nu_{23}\nu_{32})} \right]_2 = \text{const}$ $\left[ \frac{E_{11}E_{33}}{(1-\nu_{12}\nu_{21})(1-\nu_{23}\nu_{32})} \right]_1$	$\frac{[E_{11}E_{33}]_2}{[E_{11}E_{33}]_1} = \text{const}$
$G=\text{const}$	$[E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21})] = \text{const}$ $[E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21})]_2 = \text{const}$	$[E_{11}]_1 = \text{const}$ $[E_{11}]_2 = \text{const}$
使 $\beta=0$ 的结论	调整: $[E_{33}]_1, [E_{33}]_2, [\nu_{13}]_1,$ $[\nu_{13}]_2, [\nu_{23}]_1, [\nu_{23}]_2$	调整: $[E_{33}]_1, [E_{33}]_2$ $[\nu_{13}]_1, [\nu_{13}]_2$

$\beta=0$  是一个局部条件。对带裂纹层合板, 只须调整紧靠裂纹平面的上和/或下层的材料的性质即可。

## 五、讨论和结论

$\beta=0$ 法并不是简单地忽略 $\epsilon$ 的影响, 而是一种变换方法。通过改变材料特性使 $\beta=0$ , 实际上改变了物理问题。因此, 在相同的荷载条件下, 问题的应力场和应变场可能产生显著地改变。然而在使 $\beta=0$ 的过程中, 只要 $G$ 保持不变,  $\beta=0$ 法总是可以用来预测与界面断裂力学中预测的同样精确的临界荷载。

$\beta=0$ 法是求解界面断裂问题的有效方法。通过消除振荡指数, 将振荡奇异性问题转化为传统的线弹性断裂问题。因此, 所有线弹性断裂力学方法都可用来求解界面断裂问题。例如, 可以采用虚拟裂纹封闭技术<sup>[8]</sup>求得 $G, G_I, G_{II}$ , 进而求得 $K_I$ 和 $K_{II}$ 。从应用的角度来说, 如果刚度曲线(3.10)已知, 可直接把 $G_0(\hat{\psi})$ 当作 $\hat{G}_0(\hat{\psi}_0)$ , 并利用 $\beta=0$ 法预测裂纹形成。

## 附 录

对一已知界面裂纹试件, 设其 $K$ 的表达式具有(3.9)式的形式。对一已知荷载相角 $\psi_0$ , 我们希望求出断裂破坏荷载 $T_0$ 的幅值。由(3.1)和(3.9)式得

$$\frac{H_{11}}{4\cosh(\pi\varepsilon)} Y^2 T_0^2 L = G_c(\psi_0) \quad (\text{A.1})$$

其中 $G_c(\psi_0)$ 为荷载相角为 $\psi_0$ 时的界面裂纹的韧度。另一方面, 用 $\beta=0$ 法预测时, 临界荷载 $\hat{T}_0$ 可通过将(3.14)代入(3.1)令 $\varepsilon=0$ 求得, 即

$$\frac{\hat{H}_{11}}{4} \hat{Y}^2 \hat{T}_0^2 L = \hat{G}_c(\hat{\psi}_0) \quad (\text{A.2})$$

这里 $\hat{G}_c(\hat{\psi}_0)$ 是调整材料性质后的新的韧度轨迹, 它是原韧度轨迹的平移变换。利用(3.13)和(3.18)我们有

$$T_0 = \hat{T}_0 \quad (\text{A.3})$$

由于(A.3)适用于任意荷载相, 说明 $\beta=0$ 法将总是可以用来预测与界面断裂力学方法中预测的同样精确的临界荷载。

## 参 考 文 献

- [1] Z. Suo, Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media, *Proc. R. Soc. Lond.*, A427 (1990), 331—358.
- [2] M-Y He and J. W. Hutchinson, Kinking of crack out of an interface, *J. Appl. Mech.*, 56 (1989), 270—278.
- [3] J. W. Hutchinson, Mixed mode fracture mechanics of interface, in *Metal-Ceramic Interfaces*, ed. by M. Ruhle, A. G. Evans, M. F. Ashby and J. P. Hirth, Pergamon Press, New York (1990).
- [4] J. Dundurs, in *Mathematical Theory of Dislocations*, ASME (1969), 70—115.
- [5] J. R. Rice, Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks, *J. Appl. Mech.*, 55 (1988), 98—103.
- [6] R. A. Schapery and B. D. Davidson, Prediction of energy release rate for mixed-mode delamination using classical plate theory, *Appl. Mech. Review*, 43 (Part2) (1990), S281—S287.
- [7] B. D. Davidson, H. Hu and R. A. Schapery, An analytical crack tip element for layered elastic structures, *J. Appl. Mech.* (in Press)
- [8] E. F. Rybicki and M. F. Kanninen, A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral, *Eng. Fract. Mech.*, 9 (1977), 931—938.
- [9] Z. Suo and J. W. Hutchinson, Interface crack between two elastic layers, *Int. J. Fracture*, 43 (1990), 1—18.

# A New Approach to Predicting Interfacial Crack Growth

Hu Hurang

*(Department of Mechanical, Aerospace and Manufacturing Engineering,  
Syracuse University, Syracuse, NY 13244, U.S.A.)*

Wu Chengping

*(Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing 630074, P.R.China)*

## Abstract

A new approach, called " $\beta=0$  approach" is presented for use in the prediction of interfacial crack growth. This approach is a kind of transformation. It transforms an oscillatory stress field to a nonoscillatory case by adjusting the elastic constants of the materials involved. The interface toughness locus is also changed according to the new material properties. It is shown that this approach will predict the exact same critical load as interfacial fracture mechanics does. Finally, several examples were presented to show how to enforce  $\beta=0$  while keep the energy release rate unchanged.

**Key words** interfacial crack, crack growth,  $\beta=0$  approach, critical load