应用数学和力学，第18卷 第1期（1997年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于非局部场论的几个新观点及其在断裂力学中的应用（Ⅰ）——基本理论部分

黄再兴[1]　樊蔚勋[1]　黄维扬[1]

（1995年3月23日收到）

摘　　要

在线性非局部弹性理论中，具有均匀常应力边界的裂纹混合边界值问题的解是不存在的。本文从非局部场论的基本理论出发针对这一问题进行了研究。内容包括：对非局部能量守恒定律的客观性的考察，非局部热弹性体本构方程的推导，非局部体力的确定以及线性化理论，得到了一些新结果。其中，在线性化理论中所推出的应力边界条件不仅解决了本摘要开头所提到的问题，而且自然地包括了Barenblatt裂纹尖端的分子内聚力模型。

关键词　非局部场论　本构方程　应力边界条件　裂纹混合边界值问题

一、引　　言

线性非局部弹性理论由于考虑了微观粒子间的长程相互作用，因此有可能架起沟通材料微观结构与其宏观力学性能之间的桥梁。自它建立以来，在断裂问题、位错理论以及 Rayleigh 波的传播等方面的研究中已经起得了一系列的成果[1~8]，但是，另一方面，该理论本身却还存在着一些急待解决的基本问题，其中之一便是应力边界条件的确定。在文献[9,10]中，Atkinson证明了在裂纹混合边界值问题中按

$$t_{ij}n_j=p_i \tag{a}$$

给出的常应力边界条件所确定的线性非局部弹性理论的场方程的解是不存在的。显然，这一结论有悖于物理事实，它对理论本身形成了尖锐的挑战，表明理论尚待完善。此后，人们从不同方面对这一问题进行了研究。这些研究总的可以分为两种意见，其中一种认为，为了获得正确的解，应该修改由(a)所表达的应力边界条件[7, 8]，如将应力边界条件修改成极限形式[8]

$$\lim_{\varepsilon\to 1}t_{ij}n_j=p_i \tag{b}$$

这种形式的提出是基于线性非局部弹性理论在忽略微观粒子间的长程相互作用（或微观粒子间的相互作用的力程趋于零）时应回归到经典线弹性理论的这一基本要求；而另一种意见则认为，需要修正的本构方程中的非局部弹性模量的数学表达式[10,11]。这两种意见都没有从

1　南京航空航天大学，南京 210016．

根本上解决问题.

总而言之，如何给定应力边界条件是线性非局部弹性理论尚待解决的一个重要的基本问题. 本文对这一问题进行了研究，认为文献[9，10]中所证明的解的不存在性的结论，其根源在于非局部场论本身，尤其是在做线性化处理时忽略了非局部体力的影响. 基于此，文中第二节对非局部场论的守恒方程重新进行了讨论，得到了非局部残余力引起反对称应力，并且反对称应力的转动功率与局部化残余力的功率相等的新结果. 第三节则根据本构公理严格推导了非局部热弹性体的本构方程. 在第四节，我们基于对微观粒子长程相互作用的特性的分析，给出了非局弹体力的一般表达式，并讨论了其性质. 在第五节则系统推得了均匀的，各向同性的非局部弹性体的线性理论，其中所导出的应力边界条件说明了由于非局部体力的影响，在边界上不存在均匀的常应力，从而不仅完全解决了Atkinson所提出的问题，而且从中可导出 Barenblatt关于裂纹尖端的分子内聚力模型. 此外，还得到了裂纹尖端位移场存在转动效应的推论，这与文献[13]的试验结果相一致.

二、非局部场的基本理论

在经典热力学的范畴内，非局部场守恒定律的积分形式和局部场的完全一样，但由于放弃了局部化假设[12]，两者守恒定律的微分形式彼此却不相同. 假定质量是闭的，并不考虑偶应力，则它们可表述为[3]：

$$\dot{\rho}+\rho v_{i,i}=0 \tag{2.1}$$

$$t_{ji,j}+\rho f_i+\widehat{F}_i-\rho \dot{v}_i=0 \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{ijk}(t_{jk}-r_j\widehat{F}_k)=0 \tag{2.3}$$

$$-\rho\dot{E}+t_{ji}v_{i,j}-q_{k,k}+\rho Q-\widehat{F}_i v_i+\widehat{E}=0 \tag{2.4}$$

$$\rho\dot{s}-\frac{\rho Q}{\theta}+\frac{1}{\theta}\left(q_{k,k}-\frac{q_k\theta_k}{\theta}\right)-\widehat{S}\geqslant 0 \tag{2.5}$$

方程(2.1)、(2.2)、(2.3)和(2.4)分别是质量、动量、动量矩和能量守恒定律，不等式(2.5)是熵不等式，它们和局部场的守恒定律的微分方程的差别主要在于前者引入了非局部体力$\widehat{F}_1$，能量$\widehat{E}$，熵$\widehat{S}$，它们有时被统称为局部化残余并满足：

$$\int_\Omega(\widehat{F}_i,\ \widehat{E},\ \widehat{S})dV=0 \tag{2.6}$$

局部化残余是定义在整个物体所占体积Ω上的零平均函数. 在物理上它们是由微观粒子间的长程相互作用引起的.

从动量矩守恒定律的微分形式可以看出，若局部化残余力

$$\widehat{F}_i=0$$

则必有

$$\varepsilon_{ijk}t_{jk}=0 \qquad 即 \qquad t_{jk}=t_{kj}$$

这说明在忽略微观粒子间的长程相互作用的情况下，应力t_{ji}是对称的. 反之，应力必非对称，例如裂纹的尖端，这一点已经为试验[13]所证实. 将t_{ii}和$u_{i,j}$做和分解：

$$t_{ji}=t_{ji}^{(S)}+t_{ji}^{(A)},\quad v_{i,j}=d_{ij}+\Omega_{ij}$$

式中

$$t_{ji}^{(S)}=\frac{1}{2}(t_{ji}+t_{ij}),\quad t_{ji}^{(A)}=\frac{1}{2}(t_{ji}-t_{ij})$$

$$d_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i}),\quad \Omega_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}-v_{j,i})$$

把和分解式代入到(2.2)～(2.4)式中，则动量、动量矩以及能量守恒定律的微分形式可进一步写成动量守恒

$$t_{j,ji}^{(S)}+t_{j,ji}^{(A)}+\rho f_i+\widehat{F}_i-\rho\dot{v}_i=0 \tag{2.2$'$}$$

动量矩守恒

$$\varepsilon_{ijk}(t_{jk}^{(A)}-r_j\widehat{F}_k)=0 \tag{2.3$'$}$$

能量守恒

$$-\rho\dot{E}+t_{ji}^{(S)}d_{ij}-q_{k,k}+\rho Q+t_{ji}^{(A)}\Omega_{ij}-\widehat{F}_iv_i+\widehat{E}=0$$

容易看出在上式里 面$t_{ij}^{(A)}\Omega_{ij}-\widehat{F}_iv_i$是非客观的．我们知道，在经典局部场论中，能量守恒定律具有客观性[14]，同样，在非局部场论中，它仍然要保持这个性质，于是必有：

$$t_{ji}^{(A)}\Omega_{ij}-\widehat{F}_iv_i=0 \tag{2.7}$$

这样，能量守恒定律的微分形式最终可写成

$$-\rho\dot{E}+t_{ji}^{(S)}d_{ij}-q_{k,k}+\rho Q+\widehat{E}=0 \tag{2.4$'$}$$

在上面我们假定局部化残余$\widehat{F}_i$，$\widehat{E}$，$\widehat{S}$是客观量，因为，它们反映了物体内部微观粒子间的长程相互作用，不会因物体的刚性运动而改变．

从式(2.3)′和(2.7)可看出，反对称应力$t_{ij}^{(A)}$是由局部化残余体力$\widehat{F}_i$引起的，且$t_{ji}^{(A)}$的转动功率与$\widehat{F}_i$的功率相等，因此，$\widehat{F}_i$是造成应力非对称性的原因．

三、本构方程的推导

本节我们按照理性力学的本构公理系统[15]严格地推导非局部热弹性体的本构方程和局部化残余的表示式．

利用自由能U，Piola-Kirchhoff应力张量T_{IJ}以及Green应变张量C_{IJ}，则可从(2.5)式中导出Clausius-Duhem不等式的普遍形式．

$$-\rho J(\dot{U}+\dot{\theta}S)+\frac{1}{2}T_{IJ}^{(S)}\dot{C}_{IJ}-\frac{Q_K\theta_{,K}}{\theta}+J(\widehat{E}-\theta\widehat{S})\geqslant 0 \tag{3.1}$$

按照因果性公理，取物体中所有物质点的运动史和温度史

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}'(X',t'),\quad \theta'=\theta'(X',t')$$

作为独立的本构变量．由决定性公理和等存在公理知，守恒方程和C-D不等式中所有其余的相关本构变量U（或E），S，T_{IJ}，Q_K及$\widehat{F}_I$，$\widehat{E}$，$\widehat{S}$都可表示成$\boldsymbol{x}'$，θ'的同一形式的泛函，以自由能为例可写成

$$U(X,t)=U[\boldsymbol{x}'(X',t'),\theta'(X',t'),X,t]$$

根据客观性公理，本构泛函在标架的刚性变换下是不变的，即

$$U[\bar{\boldsymbol{x}}'(X',\bar{t}'),\theta'(X',\bar{t}),X,\bar{t}]=U[\boldsymbol{x}'(X',t'),\theta'(X',t'),X,t] \tag{3.2}$$

式中

$$\bar{\boldsymbol{x}}'(X',\bar{t}')=Q(t')\boldsymbol{x}'(X',t')+\boldsymbol{b}(t'),\quad \bar{t}'=t'-a \tag{3.3}$$

这里Q满足：

$$QQ^T=Q^TQ=I,\ \det Q=1$$

考虑三种特殊变换

1) $Q(t')=I$，$\boldsymbol{b}(t')=-\boldsymbol{x}'(X,\ t')$，$a=0$

2) $Q(t')=I$，$\boldsymbol{b}(t')=0$，$a=0$

3) $Q(t')$是任意的，$\boldsymbol{b}(t')=0$，$a=0$

将这三种变换依次代入到(3.2)式可以推出

$$U(X,\ t)=U[\boldsymbol{\eta}(X',\ X,\ t-\tau),\ \theta'(X',\ t-\tau),\ X](0\leqslant\tau\leqslant\infty) \tag{3.4}$$

且上式满足

$$\begin{aligned}&U[\boldsymbol{\eta}(X',\ X,\ t-\tau),\ \theta'(X',\ t-\tau),\ X]\\&=U[Q(t-\tau)\circ\boldsymbol{\eta}(X',\ X,\ t-\tau),\ \theta'(X',\ t-\tau),\ X]\end{aligned} \tag{3.5}$$

这里

$$\boldsymbol{\eta}(X',\ X,\ t)=\boldsymbol{x}'(X',\ t-\tau)-\boldsymbol{x}(X,\ t-\tau)$$

由于只考虑物体的弹性响应，故可认为本构泛函是无记忆的，则(3.4)式可进一步写成

$$U(X,\ t)=U[\boldsymbol{\eta}(X',\ X,\ t),\ \theta'(X',\ t),\ X] \tag{c}$$

满足(3.5)式意味着U是空间各向同性的，根据Cauchy基本表示定理[16]，它必能表示成$\boldsymbol{\eta}$与$\boldsymbol{\eta}$之间点积的泛函，即

$$U(X,\ t)=U[\boldsymbol{\eta}(X',\ X,\ t)\cdot\boldsymbol{\eta}(X',\ X,\ t),\ \theta'(X',\ t),\ X]$$

在变形过程中，任意两点之间微距离的变化都可用Green变形张量来刻化，因此，关于$\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\eta}$的任意泛函也可用Green变形张量$C'_{IJ}(X')$的泛函来等价表示。这样，(c)式可改写成

$$U(X,\ t)=U[C'_{IJ}(X',\ t),\ \theta'(X',\ t),\ C_{IJ}(X,\ t),\ \theta(X,\ t),\ X] \tag{3.6}$$

在上式中，X'表示除X点以外的所有物质点，根据等存在公理，其它相关本构变量亦可表达成同样的形式，它们构成了非局部热弹性体最一般的本构泛函方程。

下面根据相容性公理考察C-D不等式对本构泛函的限制，首先，我们基于物理上的要求（如要求具有有限的能量），引入Hilbert空间$H(\Omega)$

$$H(\Omega)=\{f:\ f\in L^2(\Omega)\}$$

$L^2(\Omega)$代表Lebesgue平方可积空间，且在$H(\Omega)$中的内积被定义为

$$\langle f_1,\ f_2\rangle_H=\int_\Omega f_1(X')f_2(X')dV(X')\qquad(\forall f_1,\ f_2\in H(\Omega))$$

假定C'_{IJ}，$\theta'\in H(\Omega)$，并且$H(\Omega)$上的泛函$U[C'_{IJ},\ \theta',\ X',\ C_{IJ},\ \theta,\ X]$是Frechet可微的，具有有界的Frechet导数，则按照Frechet-Riesz表示定理有[17]

$$\delta U(f\|h)=\left(\frac{\delta U}{\delta f},\ h\right)=\int_\Omega\frac{\delta U(f,\ X')}{\delta f}h(X')dV(X')$$

于是可计算：

$$\begin{aligned}U(X,\ t)=\Sigma+\Theta&+\left[\frac{\partial U}{\partial C_{IJ}}+\int_\Omega\left(\frac{\partial U}{\partial C'_{IJ}}\right)^*dV(X')\right]\dot{C}_{IJ}\\&+\left[\frac{\partial U}{\partial\theta}+\int_\Omega\left(\frac{\partial U}{\partial\theta'}\right)^*dV(X')\right]\dot{\theta}\end{aligned} \tag{3.7}$$

这里

$$\Sigma=\int_\Omega\left[\frac{\partial U}{\partial C'_{IJ}}\dot{C}'_{IJ}-\left(\frac{\partial U}{\partial C'_{IJ}}\right)^*\dot{C}_{IJ}\right]dV(X')$$

$$\Theta=\int_{\Omega}\left[\frac{\partial U}{\partial\theta'}\dot{\theta}'-\left(\frac{\partial U}{\partial\theta'}\right)^{*}\dot{\theta}\right]dV(X')$$

上面诸式中加星号*的项表示它是从不带星号的项中通过变换X'和X而得到的，例如

$$[F(X',\ X)]^{*}=F(X,\ X') \tag{3.8}$$

令

$$\hat{U}=\hat{E}-\theta\hat{S} \tag{3.9}$$

将(3.7)及(3.9)式代入到(2.8)式中就得到

$$-\rho J\left[S-\frac{\partial U}{\partial\theta}+\int_{\Omega}\left(\frac{\partial U}{\partial\theta'}\right)^{*}dV(X')\right]\dot{\theta}-\frac{Q_K\theta_{,K}}{\theta}$$
$$+\left\{\frac{1}{2}T_{IJ}^{(S)}-\rho J\left[\frac{\partial U}{\partial C'_{IJ}}+\int_{\Omega}\left(\frac{\partial U}{\partial C'_{IJ}}\right)^{*}dV(X')\right]\right\}\dot{C}_{IJ}$$
$$+J\hat{U}-\rho J\Sigma-\rho J\Theta\geqslant 0$$

上述不等式对所有独立的热力学过程都必须成立，则必有

$$T_{IJ}^{(S)}=2\rho J\left[\frac{\partial U}{\partial C'_{IJ}}+\int_{\Omega}\left(\frac{\partial U}{\partial C'_{IJ}}\right)^{*}dV(X')\right] \tag{3.10a}$$

$$S=-\left[\frac{\partial U}{\partial\theta}+\int_{\Omega}\left(\frac{\partial U}{\partial\theta'}\right)^{*}dV(X')\right] \tag{3.10b}$$

$$\hat{U}=\rho(\Sigma-\Theta) \tag{3.10c}$$

与不等式

$$\frac{Q_K\theta_{,K}}{\theta}\leqslant 0 \tag{3.10d}$$

成立．不等式(3.10d)意味着热流矢量Q_K的流动方向与温度下降的方向一致．利用自由能的公式，我们还可以得到

$$E=U-\theta\left[\frac{\partial U}{\partial\theta}+\int_{\Omega}\left(\frac{\partial U}{\partial\theta'}\right)^{*}dV(X')\right] \tag{3.10e}$$

注意到(3.8)式，然后交换积分变量的次序，容易证明

$$\int_{\Omega}\hat{U}dV(X)=\int_{\Omega}(\hat{E}-\theta\hat{S})dV(X)=0 \tag{3.11}$$

于是就有下面的定理：

定理 非局部热弹性体的相关本构变量$T_{IJ}^{(S)}$，$S,E,\hat{U}$可以从一个势函数U（自由能）得到，并且热流矢量Q_K与非局部自由能$\hat{U}$分别满足不等式(3.10d)与等式(3.11)的限制．

除了非局部体力$\hat{F}_i$和非局部熵$\hat{S}$外，我们已经得到了其它相关本构变量的本构关系．然而，需要指出的是，由于非局部场论是以考虑了物质微观结构的长程相互作用为特征的，因此，从这一特征出发，$\hat{F}_i$及$\hat{S}$需要根据微观物理的知识才能得以确定．对$\hat{S}$而言，在绝热过程的特殊条件下我们可以直接得到它，此时，由于$\dot{S}=0$，故有$\hat{S}=0$．

四、非局部体力的确定

令$N_i(X_k、X'_k)$表示由X'_k处的微观粒子作用于在X_k处的微观粒子上的长程力，它是各向同性的[18]，故r_i的一般形式可写成

$$N_i(x_k,\ x_k')=g(\theta,\ \|d\|)\frac{(x_i'-x_i)}{\|d\|} \tag{4.1}$$

这里θ仍表示绝对温度，但是一个独立变量，并且

$$\|d\|=\|x_k'-x_k\|=\sqrt{(x_1'-x_1)^2+(x_2'-x_2)^2+(x_3'-x_3)^2}$$

设N表示每单位质量的分子数目，于是，作用在x_k处粒子上的长程力的合力由下式给出

$$R_i(x_k)=N\int_\Omega \rho(x_k')g(\theta,\ \|d\|)\frac{(x_i'-x_i)}{\|d\|}dV(x_k') \tag{d}$$

因此，局部化残余的一般形式可表达为

$$\hat{F}_i=\rho R_i=N\rho(x_k)\int_\Omega \rho(x_k')g(\theta,\ \|d\|)\frac{(x_i'-x_i)}{\|d\|}dV(x_k') \tag{4.2}$$

交换变量x_k'与x_k易证明

$$\int_\Omega \hat{F}_i dV(x_k)=-\int_\Omega \hat{F}_i dV(x_k)$$

故得到

$$\int_\Omega \hat{F}_i dV(x_k)=0$$

即$\hat{F}_i$满足约束条件(2.6)。

根据微观粒子的实际结构，采用(4.2)式时，我们限定$\|d\|\geqslant\tau$，τ为材料内部的特征长度（如晶体点阵参数，微观粒子几何半径等）；而当$\|d\|\leqslant\tau$时，$\hat{F}_i=0$，这意味着微观粒子的长程力不能作用于它本身。此外，一个重要的物理事实是，当$\tau\to0$时，必有$\hat{F}_i=0$。因为$\tau\to0$说明材料的内部不存在微观结构，所以也就不存在微观结构的相互作用。

五、线性理论

在绝热或者等温的条件下，假定势函数U可以表示成 Lagrange 应变张量的二次多项式，据此可得到描述无初始应力的、均匀的、各向同性的线性非局部弹性体在小变形时的本构关系：

$$t_{ij}^{(S)}=\int_\Omega \alpha(\|x_k'-x_k\|,\ \varepsilon)\sigma_{ij}(x_k')dV(x_k') \tag{e}$$

式中

$$\sigma_{ij}=\lambda e_{rr}\delta_{ij}+2\mu e_{ij},\quad e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{f}$$

从(e)式到(f)式的详细推导可参考文献[3，5]。在(f)式中，积分核$\alpha(\|x_k'-x_k\|,\ \varepsilon)$称之为非局部弹性模量，它可以表达成多种不同的形式[3~5]，典型的如

$$\alpha(\|x_k'-x_k\|,\varepsilon)=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\ \frac{\exp(-\|x_k'-x_k\|/\varepsilon)}{\|x_k'-x_k\|} \tag{5.1}$$

式中$\varepsilon=e_0\tau/l$，τ是内部特征长度（如晶体点阵参数，微观粒子几何半径等），l是外部特征长度（如载荷的波长），e_0是材料常数，它需要根据与点阵动力学的结果拟合而得到。非局部弹性模量刻划了微观结构长程相互作用的衰减过程，并满足下面的性质

$$\int_\Omega \alpha(\|x_k'-x_k\|,\ \varepsilon)dV(x_k')=1 \tag{5.2a}$$

$$\lim_{\tau\to0}\alpha(\|x_k'-x_k\|,\ \varepsilon)=\delta(\|x_k'-x_k\|) \tag{5.2b}$$

$\delta(\|x'_k-x_k\|)$是 Dirac 函数，故性质二表明，当材料内部特征长度$\tau\to 0$时，本构方程返回到经典线弹性的Hooke定律.

在本节，我们只考虑静力学的情况，因而，在前述的前提条件下，线性非局部弹性理论的平衡方程及局部化残余可写成

$$t^{(S)}_{ji,j}+t^{(A)}_{ji,j}+\rho f_i+\widehat{F}_i=0 \tag{g}$$

$$\varepsilon_{ijk}(t^{(A)}_{jk}-r_j\widehat{F}_k)=0 \tag{h}$$

$$\widehat{F}_i=N\rho(x_k)\int_\Omega\rho(x'_k)g(\theta,\ \|d\|)\frac{(x'_i-x_i)}{\|d\|}dV(x'_k) \tag{i}$$

并且边界条件可表达为：

位移边界条件

$$u_i|_{\partial\Omega 1}=u^0_i \tag{j}$$

应力边界条件

$$t_{ji}n_j|_{\partial\Omega 2}=(t^{(S)}_{ji}+t^{(A)}_{ji})n_j|_{\partial\Omega 2}=p_i \tag{k}$$

这里 $\partial\Omega_1+\partial\Omega_2=\partial\Omega$，表示非局部弹性体的边界面.

一般而言，微观粒子的长程作用随作用距离的增大而衰减，因此，存在一个有效的作用范围，在这个范围之外，它便不再产生影响，即有

$$g(\theta,\ \|d\|)=0 \qquad (\text{当}\|d\|\geqslant\Gamma\text{时}) \tag{l}$$

Γ为微观粒子长程作用有效范围的最大半径．设B是Ω的一个子体，并且B中任意一点到Ω的边界点的距离都大于Γ，注意到(2.1)式，然后利用(i)式在球坐标中可计算 B 中任意一点的非局部体力，得到

$$\begin{aligned}\widehat{F}_i&=N\rho^2\int_0^\Gamma\int_0^\pi\int_0^{2\pi}g(\theta,\ \|d\|)(\sin\Phi\sin\theta\boldsymbol{i}+\sin\Phi\cos\theta\boldsymbol{j}+\cos\Phi\boldsymbol{k})r^2\sin\Phi d\theta d\Phi d\tau\\&=0\end{aligned}$$

这说明对于均匀的、各向同性的非局部弹性体，非局部体力$\widehat{F}_i$只出现在厚度为Γ的边界表层内，而在距边界大于Γ的内部为零．由于Γ极小，它大约相当于这个固体原子直径的十多倍[19]，因此，在宏观上可以认为$\widehat{F}_i$只作用在边界$\partial\Omega$上，而在Ω内部为零．这样根据(h)式可得

$$t^{(A)}_{ji}=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内部}) \tag{m}$$

$$t^{(A)}_{ji}=\frac{1}{2}(r_i\widehat{F}_j-r_j\widehat{F}_i) \qquad (\text{在边界}\partial\Omega\text{上}) \tag{n}$$

由(m)可化简(g)式，化简后的结果与(e)、(f)式构成了均匀的、各向同性的线性非局部弹性理论的基本方程，其表达式如下：

平衡方程

$$t^{(S)}_{ij,j}+\rho f_i=0 \tag{5.3a}$$

几何方程

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{5.3b}$$

本构方程

$$t_{ij}^{(s)}=\int_{\Omega}\alpha(\|x_k'-x_k\|,\ \varepsilon)\sigma_{ij}(x_k')dV(x_k') \tag{5.3c}$$

$$\sigma_{ij}=\lambda e_{rr}\delta_{ij}+2\mu e_{ij} \tag{5.3d}$$

再根据(n)式，边界条件(j)，(k)亦可改写成

位移边界条件

$$u_i|_{\partial\Omega1}=u_i^0 \tag{5.4a}$$

应力边界条件

$$t_{ji}^{(s)}n_j|_{\partial\Omega2}=p_i-\left[\frac{1}{2}(r_i\widehat{F}_j-r_j\widehat{F}_i)\right]n_j|_{\partial\Omega2} \tag{5.4b}$$

注意到(5.2b)及局部化残余$\widehat{F}_i$的性质，显然，在不考虑物质内部的微观结构或长程作用(即$\tau\to0$)时，则本构方程变成Hooke定律，局部化残余$\widehat{F}_i=0$，于是返回到经典线弹性理论。

至此，我们完全解决了本文引言中所提到的 Atkinson 诘难，因为除了应力边界条件(5.4b)外，(5.4a)及(5.3)诸式同以往文献中的均匀的、各向同性的线性非局部弹性理论的方程都相同；而(5.4b)式右边的第二项则说明，即使作用在裂纹面上的外力p_i是均匀的常数，但由于$\widehat{F}_i$的影响，裂纹面上总的合力也不会是均匀的，故不存在所谓的常应力边界，从而使Atkinson在文献[9, 10]所提出的问题得到了回答。

在断裂力学中，人们依据物理直观假设在裂纹尖端附近的表面存在着分子内聚力的作用，它们使得裂纹面呈闭合趋势，从而消除了物理上不可能的应力场的奇异性，这就是著名的Barenblatt摸型。另一方面，在裂纹尖端的附近，由于相对的两裂纹面都处在彼此微观粒子长程作用力的范围内，故(5.4b)式右边的第二项会使得两表面相互产生耦合作用；而在远离裂尖的两裂纹面上，由于它们的距离超出了微观粒子长程作用的范围，彼此便不会再有关联，这样，无须另做额外的假设，(5.4b)式即可自然地导出Barenblatt模型。此外，由于(5.4b)式中右边第二项的反对称性，它必然会引起裂纹尖端位移场的转动效应，文献[13]的试验结果为这个推论提供了依据。

参考文献

[1] A. C. Eringen, C. G. Speziale and B. S. Kim, Crack tip problem in nonlocal elasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, 25(5) (1977), 339.

[2] A. C. Eringen, Line crack subject to shear, *Int. J. Fracture*, 14(4) (1978), 367.

[3] A. C. Eringen, Nonlocal continuum mechanics and some applications, In: Nonlinear equations of physics and mathematics, Edited by A. O. Barut, Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland (1978), 271.

[4] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surfuace waves, *J. Appl. Phys.*, (D), 54(9)(1983), 4703.

[5] A. C. Eringen, Theory of nonlocal elasticity and some applications, *Res. Mech.*, 27(4) (1987), 313.

[6] 虞吉林、郑哲敏，一种非局部弹塑性理论连续体模型与裂纹尖端附近的应力分布，力学学报，16(5) (1984), 485.

[7] 王锐，非局部弹性中的裂纹问题，中国科学(A), 34(10) (1989), 1056.

[8] 程品三，脆性断裂的非局部理论，力学学报，24(3) (1992)，329.

[9] C. Atkinson, On some recent crack tip stress calculations in nonlocal elasticity, *Arch. Mech.*, 32(2) (1980), 317.

[10] C. Atkinson, Crack problems in nonlocal elasticity, *Arch. Mech.*, 32(4) (1980), 597.

[11] N. Ari and A. C. Eringen, Nonlocal stress field at Griffith crack, *Crst. Lattice Defect Amorph. Mat.*, 10(1) (1983), 33.

[12] D. G. B. Edelen, Nonlocal field Theories, In: *Continuum Physics* (Ⅳ), Edited by A. C. Eringen, Academic Press (1976), 75.

[13] Wang Chong and Chen Zhida, Microrotation effects in material fracture and damage, *Eng. Fract. Mech.*, 38(2/3) (1991), 147.

[14] C. Truesdell and R. A. Toupin, The classical field field theories, *Handbuch der Physik*, Bd. Ⅲ/1, Springer (1960).

[15] A. C. Eringen,《连续统力学》(程昌钧等译)，科学出版社 (1991)，150.

[16] 郭仲衡，《非线性弹性理论》，科学出版社 (1980)，43.

[17] R. A. Tapia, The differentiation and integration of nonlinear operators, In: *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, Ed. by L. B. Rall, Academic Press, New York(1971)

[18] M. Born and K. Huang, *Dynamical theory of Crystal Lattices*, Oxford (1954).

[19] T. Bak, *Phonons and Phonon Interactions*, Benjamin, New York (1964).

New Points of View on the Nonlocal Field Theory and Their Applications to the Fracture Mechanics (I) ——Fundamental Theory

Huang Zaixin Fan Weixun Huang Weiyang

(*Nanjing University of Aeronautics and Astronatutics, Nanjing* 210016, *P.R.China*)

Abstract

In this linear nonlocal elasticity theory, the solution to the boundary-value problem of the crack with a constant stress boundary condition does not exist. This problem has been studied in this paper. The contents studied contain examining objectivity of the energy balance, deducing the constitutive equations of nonlocal thermoelastic bodies and determining nonlocal force and the linear nonlocal elasticity theory. Some new results are obtained. Among them, the stress boundary condition derived from the linear theory not only solves the problem mentioned at the begininng, but also contains the model of molecular cohesive stress on the sharp crack tip advanced by Barenblatt.

Key words nonlocal field theory, localization residuals, constitutive equations, stress boundary conditions