应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

粘塑性动力学问题的最优控制变分原理与有限元分析

马景槐[1]

（张汝清推荐，1995年9月6日收到）

摘　要

本文运用最优控制变分理论，对Perzyna 型粘塑性体，提出了粘塑性动力问题的参数变分原理，并给出了相应的动力有限元方程和参数二次解法.

关键词　粘塑性动力学　最优控制　变分原理　有限元

一、粘塑性动态本构关系

结构材料在动态高应变率条件下，往往会同时出现弹性、粘性和塑性性质. 目前在实验基础上已建立了过应力模型、粘塑性模型、拟线性本构关系理论以及基于位错动力学或非平衡过程热力学的内变量理论等来描述材料的动态弹塑本构关系. 其中 Perzyna 型粘塑性模型是常用的主要形式之一[1].

Perzyna 粘塑性动态模型为

$$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl}-d\varepsilon_{kl}^{vp}) \tag{1.1}$$

$$d\varepsilon_{ij}^{vp}=\gamma\cdot\langle\varphi(f)\rangle\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}\cdot dt \tag{1.2}$$

其中

$$\langle\varphi(f)\rangle=\begin{cases}0 & (\text{当}f\leqslant 0\text{时})\\ \varphi(f) & (\text{当}f>0\text{时})\end{cases} \tag{1.3}$$

式中　$d\varepsilon_{ij}$ 为全应变增量，$d\varepsilon_{ij}^{vp}$ 为粘塑性应变增量，γ 为粘性系数，f 为材料的屈服函数，若$f=0$为静态屈服函数，$f>0$表明动态屈服函数超过静态屈服函数. $g(\sigma_{ij},\ \varepsilon_{ij}^{vp})$ 为材料的动态塑性势函数. $\varphi(f)$ 一般为 f 的非负非线性函数，其具体形式由材料的动力实验曲线确定. Perzyna 给出下列形式的$\varphi(f)$ 函数的近似表达式：

$$\varphi(f)=\sum_{\alpha=1}^{n}A_\alpha(\exp f^\alpha-1) \tag{1.4}$$

1　新疆石油学院，乌鲁木齐 830000.

和 $$\varphi(f)=\sum_{a=1}^{n}B_a f^a \tag{1.5}$$

从以上可以看出，Perzyna 方程具有过应力模型的性质，可同时考虑强化效应和应变率效应，还具有塑性位势理论的性质。

二、粘塑性问题的动力学基本方程

在粘塑性动力学问题中，外力、应力、应变和位移均是空间坐标x_i和时间t的函数。同时在粘塑性域中，应变分量不仅取决于应力状态，还与加载历史有关。应使用增量形式来描述各类变量之间的关系。在这里，采用 Euler 描述法，假设在某一瞬时，物体保持动力学平衡，设应力状态和加载历史是已知的，各增量都很小，且为小变形问题。于是各类变量在域Ω中应满足下列方程：

1) 动力增量平衡方程：

$$d\sigma_{ij,j}-cd\dot{u}_i-\rho d\ddot{u}_i=0 \tag{2.1}$$

式中 $-cd\dot{u}_i$为粘性阻尼力增量，$-\rho d\ddot{u}_i$为惯性力增量。

2) 应变位移关系：

$$2\varepsilon_{ij}=du_{i,j}+du_{j,i} \tag{2.2}$$

3) 动态本构关系：由(1.1)～(1.3)式表示。

4) 边界条件：

$$d\sigma_{ij}n_j=d\bar{p}_i \qquad (\text{在}S_p\text{上}) \tag{2.3}$$

$$du_i=d\bar{u}_i \qquad (\text{在}S_u\text{上}) \tag{2.4}$$

这里 总边界面$S=S_p\cup S_u$。还应指出，现在的$d\bar{u}_i$和$d\bar{p}_i$一般都是与时间有关的函数。

5) 初始条件：

设$t=0$时： $$u_i=u_i^0,\quad \dot{u}_i=\dot{u}_i^0 \tag{2.5}$$

三、粘塑性动力学问题的最优控制变分原理

最优控制变分原理是根据最优控制理论发展起来用于处理与时间相关的动态演化力学问题的数值结构分析方法[2]。下面讨论建立粘塑性动力学问题的最优控制变分原理。

1) 系统自变量的选取：本文讨论基于势能的变分原理，选取du_i，$d\varepsilon_{ij}$作为系统的自变量。自变量的约束条件为几何方程(2.2)和几何边界条件(2.4)式。

2) 系统的状态控制方程：先推导本构关系的统一表达式，从而给出系统的状态控制方程。

将屈服函数f作一阶泰勒展开。并将(1.2)与(1.3)式代入f中，有

$$f=f_0+df=f_0+D_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\varepsilon_{kl}+\left[\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{ij}^{vp}}\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}\right.$$

$$\left.-D_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial g}{\partial\sigma_{kl}}\right]\cdot\gamma\cdot\langle\varphi(f)\rangle dt \tag{3.1}$$

式中 f_0为增量前状态的屈服函数。

设$\lambda=\langle\varphi(f)\rangle$，并令$f^*=f-\varphi^{-1}(\lambda)$。其中$\varphi^{-1}(\lambda)$是$\varphi(f)$的反函数。则 $f^*(d\varepsilon_{ij},\ dt,\ \lambda)$的一阶展开式为

$$f^*=f_0-\varphi^{-1}(\lambda_0)+D_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\varepsilon_{kl}+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{ij}^{vp}}\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}-D_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial g}{\partial\sigma_{kl}}\right)\cdot\gamma\cdot dt-\frac{d\varphi^{-1}(\lambda)}{d\lambda}\right]\cdot\lambda \tag{3.2}$$

于是(1.2)、(1.3)式可写为：

$$d\varepsilon_{ij}^{vp}=\gamma\cdot\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}\cdot dt \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda=0 & (\text{当}f^*<0\text{，对应于弹性加载或卸载})\\ \lambda>0 & (\text{当}f^*=0\text{，对应于粘塑性动力加载})\end{array}\right\} \tag{3.4}$$

在f^*中引入一补偿因子ν，(3.4)式可写为：

$$\left.\begin{array}{l}f^*(d\varepsilon_{ij},\ dt,\ \lambda)+\nu=0\\ \nu\cdot\lambda=0,\ \lambda\geqslant0,\ \nu\geqslant0\end{array}\right\} \tag{3.5}$$

(3.5)式就是反映粘塑性动态本构关系的系统状态控制方程。

3) 系统的性能指标与参数变分原理：定义在时间$[t,\ t+\Delta t]$内系统的瞬时泛函$\Pi_{dp}(du_i,\ t)$为系统的性能指标。

$$\Pi_{dp}=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}D_{ijkl}d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{kl}-\gamma\cdot\lambda\cdot D_{ijkl}\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}dtd\varepsilon_{kl}\right)d\Omega+\left[\int_\Omega(cd\dot{u}_i+\rho d\ddot{u}_i)du_id\Omega-\int_{S_p}d\bar{p}_idu_idS\right] \tag{3.6}$$

由最优控制理论，在整个时间过程$[t_0,\ t_n]$中，真实解应使以下性能指标函数取最小值。

$$J(u_i)=\int_{t_0}^{t_n}\Pi_{dp}(du_i,\ t)dt \tag{3.7}$$

在粘塑性动力学问题中，由于问题的复杂性，很难求解出表述整个时间区间$[t_0,\ t_n]$的解析解。只能就每个小的时间区间段$[t,\ t+\Delta t]$内求出数值结果，然后得到整个时间区间的数值解。

将时间过程$[t_0,\ t_n]$离散化：$t_0=0,\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$。当离散时间段$\Delta t$足够小时，由Bellman动态规划原理，可将问题转化为在时间区间$[t,\ t+\Delta t]$内，在状态控制方程和初始条件的控制下，求解满足几何方程和几何边界条件的解du_i，使得

$$\Delta J^*=\frac{1}{2}\min\{\Pi_{dp}(du_i,t)\cdot\Delta t\} \tag{3.8}$$

然后再将各时间子区间的解相加，最后得到整个时间过程$[t_0,\ t_n]$的数值解。

对每一时间子区间$[t_i,\ t_{i+1}]$内的求解，可由在时间t_i的瞬时参数变分原理来实现。

瞬时参数变分原理 对于任一时间t_i，就时间增量dt的范围内，在所有满足应变位移关系(2.2)式及位移边界条件(2.4)式的可能增量场中，真实解使得瞬时泛函(3.6)式在状态控制方程(3.5)式及初始条件(2.5)式的控制下取最小。其中du_i（或$d\varepsilon_{ij}$）是自变量函数，λ是状态控制变量，不参加变分，其物理意义是粘塑性流动因子。

证明 现在对瞬时泛函Π_{dp}取变分。并注意到，由于是瞬时变分，在任一时间t_i，有$\delta\dot{u}_i=0$，$\delta\ddot{u}_i=0$[3]。故亦有$\delta(d\dot{u}_i)=0$，$\delta(d\ddot{u}_i)=0$。在$[t,\ t+dt]$内，泛函(3.6)始终依赖于du_i（或$d\varepsilon_{ij}$）。有

$$\delta\Pi_{dp}=\int_{\Omega}\left\{D_{ijkl}d\varepsilon_{ij}\delta(d\varepsilon_{kl})-\gamma\cdot\lambda\cdot D_{ijkl}\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}dt\cdot\delta(d\varepsilon_{kl})\right\}d\Omega$$

$$+\left[\int_{\Omega}(cd\dot{u}_i+\rho d\ddot{u}_i)\delta(du_i)d\Omega-\int_{S_p}d\bar{p}_i\delta(du_i)dS\right] \tag{3.9}$$

将本构关系代入上式的第一项积分中，有

$$\int_{\Omega}D_{ijkl}d\varepsilon_{ij}\delta(d\varepsilon_{kl})d\Omega=\int_{\Omega}\left[d\sigma_{kl}+\gamma\cdot\lambda\cdot D_{ijkl}\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}dt\right]\delta(d\varepsilon_{kl})d\Omega \tag{3.10}$$

再将此式代入(3.9)式中可得

$$\delta\Pi_{dp}=\int_{\Omega}d\sigma_{ij}\delta(d\varepsilon_{ij})d\Omega+\int_{\Omega}(cd\dot{u}_i+\rho d\ddot{u}_i)\delta(du_i)d\Omega$$

$$-\int_{S_p}d\bar{p}_i\delta(du_i)dS \tag{3.11}$$

注意到$d\varepsilon_{ij}$对i，j是对称的，利用分部积分和格林公式，并考虑到在S_u上$\delta u_i=\delta\bar{u}_i=0$，则(3.11)式的第一项积分可化为

$$\int_{\Omega}d\sigma_{ij}\delta(d\varepsilon_{ij})d\Omega=\int_{S_p}d\sigma_{ij}\delta(du_i)\cdot n_j dS-\int_{\Omega}d\sigma_{ij,j}\delta(du_i)d\Omega \tag{3.12}$$

代入泛函变分$\delta\Pi_{dp}$中，可得

$$\delta\Pi_{dp}=-\int_{\Omega}[d\sigma_{ij,j}-cd\dot{u}_i-\rho d\ddot{u}_i]\delta(du_i)d\Omega$$

$$+\int_{S_p}[d\sigma_{ij}\cdot n_j-d\bar{p}_i]\delta(du_i)dS \tag{3.13}$$

由变分极值条件$\delta\Pi_{dp}=0$，由于$\delta(du_i)$在Ω中和在S_p上都是任意的独立微量，所以可得下列方程：

$$d\sigma_{ij,j}-cd\dot{u}_i-\rho d\ddot{u}_i=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{3.14}$$

$$d\sigma_{ij}\cdot n_j-d\bar{p}_i=0 \qquad (\text{在}S_p\text{上}) \tag{3.15}$$

这就是动力增量平衡方程和应力边界条件，进一步有$\delta^2\Pi_{dp}>0$，所以由$\delta\Pi_{dp}=0$导出的系统变量du_i（或$d\varepsilon_{ij}$）使Π_{dp}取极小值。

4） 将各时间子区间的增量解相加，便得到粘塑性动力问题的数值解。

上述原理可处理粘塑性动态关联流动问题（当$f=g$时）和粘塑性动态非关联流动问题（当$f\neq g$时）。

四、有限元离散及参数二次规划解法

将连续体Ω作有限元离散，设共分为n个单元（粘塑性单元为n_1，力边界单元为n_2）。引入有限元插值函数

$$du=N\delta,\quad d\varepsilon=B\delta \tag{4.1}$$

$$d\dot{u}=N\dot{\delta},\quad d\ddot{u}=N\ddot{\delta} \tag{4.2}$$

通过单元的组合装配，可将在时间$[t,\ t+\Delta t]$内系统的泛函(3.6)式及状态控制方程(3.5)式写为

$$\Pi_{dp}=\frac{1}{2}\delta^TK\delta+\delta^Tc\dot{\delta}+\delta^TM\ddot{\delta}-\delta^T(\lambda\cdot\gamma\cdot\Phi\cdot\Delta t+q) \tag{4.3}$$

及 $$H\delta-(U\cdot\gamma\cdot\Delta t+W)\cdot\lambda-d+\nu=0 \tag{4.4}$$

$$\nu^T\cdot\lambda=0,\ \lambda\geqslant 0,\ \nu\geqslant 0 \tag{4.5}$$

式中 $$K=\sum_{e=1}^{n}\int_{\Omega^e}(B^TDB)d\Omega \tag{4.6}$$

$$C=-\sum_{e=1}^{n}\int_{\Omega^e}(N^TCN)d\Omega \tag{4.7}$$

$$M=-\sum_{e=1}^{n}\int_{\Omega^e}(N^T\rho N)d\Omega \tag{4.8}$$

$$q=\sum_{e=1}^{n_2}\int_{S_p^e}(N^TdP)dS \tag{4.9}$$

$$H=\sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)^TDB\right)^Td\Omega \tag{4.10}$$

$$\Phi=\sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right)^TDB\right)^Td\Omega \tag{4.11}$$

$$U=\sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)^TD\left(\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{vp}}\right)^T\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right)\right]d\Omega \tag{4.12}$$

$$W=\sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}\left(\frac{d\varphi^{-1}(\lambda)}{d\lambda}\right)d\Omega \tag{4.13}$$

$$d=-\sum_{e=1}^{n_1}\int_{\Omega^e}[f_0-\varphi^{-1}(\lambda_0)]d\Omega \tag{4.14}$$

由变分原理$\partial\Pi_{dp}/\partial\delta=0$，注意到由于是瞬时变分，有$\partial\dot{\delta}=0$，$\partial\ddot{\delta}=0$，则有

$$K\delta+C\dot{\delta}+M\ddot{\delta}-(\Phi\cdot\gamma\cdot\lambda\cdot\Delta t+q)=0 \tag{4.15}$$

粘塑性动力学问题便化为在状态控制方程(4.4)，(4.5)式的控制下求解动力有限元方程(4.15)式。这可由逐步积分法和参数二次规划法联合解之。

在时间区间$[t,\ t+\Delta t]$，运用 Newmark 法[4]，便可将动力方程(4.15)变为

$$\overline{K}\delta-(\Phi\cdot\gamma\cdot\Delta t\cdot\lambda+\overline{q})=0 \tag{4.16}$$

其中 $$\overline{K}=K+a_0M+a_1C \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}\overline{q}=q_{t+\Delta t}-K\delta_t+M(a_2\dot{\delta}_t+a_3\ddot{\delta}_t)\\ +C(a_4\dot{\delta}_t+a_5\ddot{\delta}_t)\end{aligned} \tag{4.18}$$

式中 $$\begin{aligned}&a_0=1/(\beta\Delta t^2),\ a_1=\gamma_1/(\beta\cdot\Delta t),\ a_2=1/(\beta\cdot\Delta t)\\ &a_3=1/(2\beta)-1,\ a_4=\gamma_1/\beta-1,\ a_5=(\gamma_1/(2\beta)-1)\cdot\Delta t\end{aligned} \tag{4.19}$$

这里 $0\leqslant\gamma_1\leqslant 1,\ 0\leqslant 2\beta\leqslant 1$.

从(4.16)式解出

$$\delta=\overline{K}^{-1}(\Phi\gamma\cdot\Delta t\cdot\lambda+\overline{q}) \tag{4.20}$$

代入控制方程：有

$$\nu-(U\cdot\gamma\cdot\Delta t+W-H\cdot\bar{K}^{-1}\Phi\gamma\cdot\Delta t)\cdot\lambda=-H\bar{K}^{-1}\bar{q}+d \tag{4.21}$$

$$\nu^T\cdot\lambda=0 \qquad (\lambda\geqslant 0,\ \nu\geqslant 0) \tag{4.22}$$

这是一个关于λ，ν的非负互补问题，非线性计算仅表现在(4.22)式中的互补项上，可利用参数二次规划法求解[5]。

五、实 施 过 程

1) 将连续体Ω进行有限元离散；

2) 在得到插值函数N，B的表达式后，分别计算K，C，M，Φ，H，U，W，d；

3) 将初始条件$u_{t=0}=u^0$，$\dot{u}_{t=0}=\dot{u}^0$代入方程(4.15)中，计算出初始加速度$\ddot{u}^0$；

4) 将时间过程$[t_0,\ t_n]$进行离散，$t_0=0$，t_1，t_2，……，$t_n\to\Delta t_1$，Δt_2，……，Δt_n。结构的载荷也相应地离散为$d\bar{p}_1$，$d\bar{p}_2$，……，$d\bar{p}_n$。对每一Δt_i分别施加外载$d\bar{p}_i$，计算q；

5) 对每一时间区间Δt，可使用参数二次两步计算法计算(4.20)～(4.22)式，得到λ与δ，再计算出应力、应变增量$d\sigma$，$d\varepsilon$，$d\varepsilon^{vp}$；

6) 累加计算：$u=u^0+\delta$，$\sigma=\sigma^0+d\sigma$，$\varepsilon=\varepsilon^0+d\varepsilon$，$\varepsilon^{vp}=(\varepsilon^{vp})^0+d\varepsilon^{vp}$；

7) 计算下一时间增量步$\Delta t_{i+1}=t_{i+2}-t_{i+1}$和对应的外载增量$d\bar{p}_{i+1}$；

8) 重复5)，最后得到粘塑性动力学问题的数值解。

六、结 语

1) 本文根据最优控制变分理论，建立了粘塑性动力学问题全耦合分析的最优控制变分原理。将粘塑性动力学问题化为在每一时间区间上求解带约束条件的参数二次规划问题。

2) 给出了相应的动力有限元构式，运用逐步积分法和参数二次规划法可求解复杂的粘塑性动力学问题。

参 考 文 献

[1] 杨桂通、熊祝华，《塑性动力学》，清华大学出版社，北京（1984）.

[2] 曾攀，《材料的概率疲劳损伤特性及结构分析原理》，科学技术文献出版社，北京（1993）.

[3] 张汝清，非线性弹性体动力学问题的变分原理，应用数学与力学，13(1)（1992），1—9.

[4] 徐兴、郭乙木、沈永兴，《非线性有限元及程序设计》，浙江大学出版社，杭州（1993）.

[5] 张柔雷、钟万勰，参度量最小势能原理的有限元参数二次规划解，计算结构力学及其应用，4(1)（1987），1—11.

[6] 曾攀、钱令希，粘塑性问题的参数二次规划法，应用数学与力学，12(1)（1991），541—545.

The Optimal Control Variational Principle and Finite Elements Analysis for Viscoplastic Dynamics

Ma Jinghuai

(Xinjiang Petroleum Institute, Wulumuqi 830000, P. R China)

Abstract

This paper presents the optimal control variational principle for perzyna model which is one of the main constitutive relations of viscoplasticity in dynamics. And it could also be transformed to solve the pararmetric quadratic programming problem. The FEM form of this problem and its implementation have also been discussed in the paper.

Key words viscoplastic aynamics, optimal control, variational principle finite element method