无锚固储液罐提离的流-固多种非线性耦合的三维移动边界问题统一分析格式*

温德超[1] 郑兆昌[1]

（卢文达推荐，1994年12月13日收到，1996年8月10日收到修改稿）

摘 要

本文建立了在地震作用下无锚固储液罐提离的流-固多种非线性耦合的移动边界问题的统一格式的三维分析方法，其中建立了任意四边形标薄板壳拟协调非线性有限元的列式和分析移动边界问题的线性互补方程；提出了在ALE标架下用带压力项的时间分裂步法求解储液罐内含自由液面大幅晃动（移动边界问题）的非定常的三维粘性流体（N-S）问题的方法；其中没有利用轴称性和梁式模态假定等条件及未曾利用势函数理论；该方法适用于一般板壳-流体多种非线性耦合的多种移动边界问题.

关键词 固-液 多种非线性耦合 移动边界 储液罐 提离 时间分裂步 ALE方法

一、引 言

储液罐在商业，核电站，航天和石化工业中，有着广泛的应用．世界上90%以上的石油产品由它存储．在地震中它不断受到损坏，造成了很大的损失，其中致命的破坏往往是提离造成的．而提离分析涉及到罐底板与基础的移动边界问题、罐体的弹塑性大变形、流体的粘性和液面移动边界的大幅晃动等多种非线性耦合问题，所以一般研究都是做线性问题或局部、某个侧面的非线性问题[1]，这不足以揭示其多种非线性耦合的动力响应的本质规律[2]．一般的分析方法有：加权余量法；构造能量泛函方法[3]；变分弱形式[4]及虚功原理的方法．本文分析采用虚功原理和加权余量方法（变分的弱形式），由于它可以克服能量泛函方法中构造能量泛函等方面的困难，且固体的变形不限于线弹性范围内，在问题本身不存在泛函时，也能使用．移动边界问题中的三维接触问题，一般采用迭代方法，但是由于迭代法计算量大和收敛性无法保证，而由弱形式导出的线性互补方程方法可以克服这两个弱点．液面移动边界问题用任意的拉格朗日-欧拉（标架）方法(ALE)分析，即将储液罐液面以下的附近流体区域(V_{LL})用L标架描述，以追踪自由液面的大幅晃动，这样不必引入自由液面波高函数，其余的液体区域(V_{LE})采用E标架描述；计算格式采用时间分裂步法和有限元方法相结合的分析格式，时间分裂步法实质上是一种迭代方法，其算法结构简单，无需存贮很大的系

* 本文得到国家自然科学基金和西安交通大学结构强度与振动国家重点实验室资助.

1 清华大学力学系，北京 100084.

数阵．另一节省存贮空间办法是采用了不完全分解共轭斜量ICCG法．

二、统一分析方程

由罐壁、底板、流体各个子结构的总体动力平衡方程和运动方程可以构成储液罐罐壁-液体-自由液面-底板多种非线性耦合系统的提离分析的统一动力平衡方程．

假定：(1)地面运动的位移、速度、加速度在流体域内不随空间坐标而变化；(2)流体为不可压粘性、均质、恒温的．

采用拉格朗日标架描述的流体区域称为拉格朗日区域 V_{LL}，其余流体区域采用欧拉标架描述，称其为欧拉区域V_{LE}．在V_{LE}中欧拉标架描述的地震作用下的 N-S 问题及时间分裂步格式为

$$^*V_E^{n+1}=V_E^n+\Delta t[-\nabla p_E^n+Re^{-1}\nabla^2V_E^n+f_E-(V_E^n\cdot\nabla)V_E^n-(\ddot{x}_g)] \quad (2.1a)$$

边界条件： $$^*V_E^{n+1}=\bar{V}_L^{n+1}(\text{在}\Gamma_{LE}\text{上})；\ ^*V_E^{n+1}=\dot{q}_S^{n+1}(\text{在}\Gamma_{SE}\cup L_p\text{上}) \quad (2.1b)$$

$$\nabla^2p_E^{n+1}=(\Delta t)^{-1}\nabla(^*V_E^{n+1})+\nabla^2p_E^n \quad (2.1c)$$

边界条件： $$p_E^{n+1}=\bar{p}_L^{n+1}(\text{在}\Gamma_L^E\text{上}) \quad (2.1d)$$

$$V_E^{n+1}={}^*V_E^{n+1}-\Delta t\nabla(p_E^{n+1}-p_E^n) \quad (2.1e)$$

式中 V_E^{n+1}，$^*V_E^{n+1}$，p_E^{n+1}，f_E，$\ddot{x}_g$ 分别是在V_{LE}中的流体第$n+1$步的速度、中间速度、压力、体力向量和地面加速度，Δt是时间步长，Re是流体的雷诺数．

对方程(2.1a～e)进行加权积分和有限元离散，可以得到 V_{LE} 区域中的有限元方程；同理得到拉格朗日区域V_{LL}中的有限元方程；利用V_{LE}和 V_{LL} 交界面的连续条件，将这两个区域的有限元方程集成为流体区域总体有限元方程，从而得到在地震载荷作用下，ALE 标架描述的略去压力项在本步中增量贡献的时间分裂步形式的无量纲化的六面体八节点单元的总体有限元方程

$$^{n+1}M_f^{n+1}\ddot{w}_f+{}^{n+1}C_f^{n+1}\dot{w}_f+{}^{n+1}K_f=-{}^{n+1}p_f \quad (2.2a)$$

式中 $$^{n+1}M_f=[H_f^{-T}]^{n+1}[M_f]^{n+1}； \quad (2.2b)$$

$$^{n+1}C_f=-[E_f^{-T}](Re^{-1}([R_f]^n-[B_f]^n)-[C_f]^n-[C_{fg}]^{n+1}) \quad (2.2c)$$

$$^{n+1}K_f=-[H_f^{-T}]([F_f]^n\{f_f\}^n-[F_{fg}]^{n+1}\{\ddot{y}_g\}^{n+1}) \quad (2.2d)$$

$$^{n+1}p_f=\{p_f\}^{n+1} \quad (2.2e)$$

其中 $^{n+1}w_f$为流体节点在第$n+1$步时的位移向量，$^{n+1}\dot{w}_f$，$^{n+1}\ddot{w}_f$ 分别为相应于 $^{n+1}w_f$ 的速度($\{v_f\}^{n+1}$) 和加速度；$^{n+1}M_f$，$^{n+1}C_f$，$^{n+1}K_f$，$^{n+1}p_f$ 分别为流体的质量阵、广义阻尼阵、广义刚度阵和压力向量．

板壳问题的基本方程：

(一) 含有非线性项的几何方程

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{w}{R_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{u}{R_1}\right)^2-z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{R_1}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (2.3a)$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{R_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{v}{R_2}\right)^2-z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R_2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (2.3b)$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{u}{R_1}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{v}{R_2}\right)-z\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{1}{R_1}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{R_2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (2.3c)$$

(二) 物理方程为薄板壳的虎克定律．

（三） 大位移平衡方程

设在增量步0，1，…，n中，问题的解已知，则在增量步$n+1$时的解可由虚功方程确定：

$$\int_{_0V}\delta^{n+1}{}_0\{\varepsilon\}^T\cdot{}^{n+1}{}_0\{\sigma\}\cdot{}_0dv=\int_{_0V}\delta^{n+1}{}_0u\cdot{}_0\rho\cdot{}^{n+1}{}_0f\cdot{}_0dv+\int_{_0\Gamma}\delta^{n+1}{}_0u\cdot{}^{n+1}{}_0p\cdot{}_0ds \tag{2.3d}$$

其中 ${}^{n+1}{}_0\{\varepsilon\}$，${}^{n+1}{}_0\{\sigma\}$分别是$n+1$时刻，以未变形（0时刻）的初始位形为参考标架度量的应变（Green应变）和应力（第二类Piola-Kichhoff 应力）；$\delta^{n+1}{}_0u$：为当时的虚位移；${}_0\rho$，${}_0f$，${}_0p$：分别为密度、体力、面力强度。式(2.3d)中有关各量的增量关系为：

$${}^{n+1}{}_0\{\varepsilon\}={}^n_0\{\varepsilon\}+{}_0\{\varepsilon\} \tag{2.3e}$$

$${}^{n+1}{}_0\{\sigma\}={}^n_0\{\sigma\}+{}_0\{\sigma\} \tag{2.3f}$$

$$\delta^{n+1}{}_0\{\varepsilon\}=\delta_0\{\varepsilon\} \tag{2.3g}$$

其中

$${}_0\{\varepsilon\}={}_0\{\varepsilon^L\}\}+{}_0\{\varepsilon^N\} \tag{2.3h}$$

这里 ${}_0\{\varepsilon^L\}$，${}_0\{\varepsilon^N\}$分别为应变增量${}_0\{\varepsilon\}$的线性部分和非线性部分。

将式(2.3e～h)和物理方程代入式(2.3d)，仅保留应变二次以下的项，便得到线性化的增量形式的T．L平衡方程。我们从这一方程出发，根据拟协调的概念，利用几何方程和物理方程；将应变分为膜向、曲率和转角分量，对非节点载荷等效转化为节点载荷；构造任意四边形单元域内函数和边界网线函数，并进行复杂积分，最后得到拟协调模式非线性有限元方程。由非线性有限元方程容易得到第$n+1$时间步的非线性动力平衡方程

$$M^{n+1}\ddot{q}+C^{n+1}\dot{q}+{}^{n+1}f={}^{n+1}p \tag{2.4a}$$

其中

$${}^{n+1}f=\begin{cases}\int_V[{}^{n+1}B]^T\cdot{}^{n+1}\sigma\mathrm{d}v & \text{（非线性问题}{}^{n+1}f\text{为}{}^{n+1}q\text{函数）}\\ K\cdot{}^{n+1}q & \text{（线弹性问题）}\end{cases} \tag{2.4b}$$

本文在非线性情况下假定为

（1） $${}^{n+1}f={}^nf+{}^nK\delta q \tag{2.4c}$$

（2） $$\delta q={}^{n+1}q-{}^nq \tag{2.4d}$$

其中 ${}^nK$是${}^nt$时刻的切线刚度阵，式(2.4c，d) 表示两个时间间隔位移的线性增量部分。将式(2.4c，d)代入式(2.4a)得

$$M^{n+1}\ddot{q}+C^{n+1}\dot{q}+{}^nK\delta q={}^{n+1}p-{}^nf \tag{2.4e}$$

求解式(2.4e)可以得到位移增量的近似值，但对于非线性问题，还必须在每个时间步内（或指定的几步）进行动平衡迭代，以满足动态平衡方程。若用$\Delta q^i=\delta^{n+1}q^i-\delta^{n+1}q^{i-1}$ 表示相继的两个动平衡迭代的位移修正量，则式(2.4e)成为

$$M^{n+1}\ddot{q}+C^{n+1}\dot{q}+{}^nK\Delta q^i={}^{n+1}p-{}^{n+1}f^{i-1}\qquad(i=1,2\cdots) \tag{2.4f}$$

本文在程序实现中采用的是修改的牛顿-芮弗逊法（Newton-Raphson）。由方程(2.4f)容易得到地震作用下(${}^{n+1}\ddot{q}$为地面加速度）的罐壁和底板的第 $n+1$ 步的无量纲化的总体增量型的任意四边形薄板壳拟协调非线性有限元的动力平衡方程

$$M_r^{n+1}\ddot{q}_r+{}^nC_r^{n+1}\dot{q}_r+{}^nK_r\delta q_r={}^{n+1}p_{rg}-{}^nf_r\qquad(r=S,P) \tag{2.5a}$$

式中

$${}^{n+1}p_{fg}={}^{n+1}p_r+{}^{n+1}F_{rg};\quad {}^{n+1}F_{rg}=-M^{n+1}\ddot{q}_g \tag{2.5b}$$

将流体方程（2.2a），罐壁和底板方程（2.5a）按底板（P）、罐体湿面（SB）、非湿面（SA）、流体(f)的变量进行矩阵划块，然后组合得到储液罐的罐壁-液体-液面大幅晃动-底板移动边界-基础多种非线性耦合系统的提离分析的统一总体增量型动力平衡方程[5]

$$ {}^{n+1}M_T {}^{n+1}_T\ddot{u}_T + {}^{n+1}C_T {}^{n+1}\dot{u}_T + {}^{n+1}K_T \delta^{n+1}u_T = {}^{n+1}p_{Tg} - {}^{n}f_T \tag{2.6a}$$

式中

$$\begin{aligned}
&{}^{n+1}u_T=\{{}^{n+1}q_p \quad {}^{n+1}q_{SB} \quad {}^{n+1}q_{SA} \quad 0\}^T;\ {}^{n+1}\dot{u}_T=\{{}^{n+1}\dot{q}_p \quad {}^{n+1}\dot{q}_{SB} \quad {}^{n+1}\dot{q}_{SA} \quad {}^{n+1}\dot{w}_f\}^T\\
&\delta^{n+1}u_T=\{\delta^{n+1}q_p \quad \delta^{n+1}q_{SB} \quad \delta^{n+1}q_{SA} \quad 0\}^T;\\
&{}^{n+1}\ddot{u}_T=\{{}^{n+1}\ddot{q}_p \quad {}^{n+1}\ddot{q}_{SB} \quad {}^{n+1}\ddot{q}_{SA} \quad {}^{n+1}\ddot{w}_f\}^T\\
&{}^{n+1}q_p=\{{}^{n+1}q_{\bar{p}} \quad {}^{n+1}q_{\underline{p}}\}^T;\ {}^{n+1}q_S=\{{}^{n+1}q_{\underline{S}} \quad {}^{n+1}q_{SB} \quad {}^{n+1}q_{SA}\}^T\\
&{}^{n+1}q_{SB}=\{{}^{n+1}q_{SE} \quad {}^{n+1}q_{SL}\}^T;\ \Gamma_{SB}=\Gamma_{SE}\cup\Gamma_{SL}-\Gamma_{\underline{Sp}}\\
&{}^{n+1}q_{\bar{p}}=\{{}^{n+1}q_{pN} \quad {}^{n+1}q_{pc} \quad {}^{n+1}q_{pL'}\}^T;\ {}^{n+1}q_{pL}=\{{}^{n+1}q_{pL'} \quad {}^{n+1}q_{\underline{p}}\}\\
&{}^{n+1}q_p=\{{}^{n+1}q_{pN} \quad {}^{n+1}q_{pc} \quad {}^{n+1}q_{pL}\}^T;\\
&{}^{n+1}\dot{w}_f=\{{}^{n+1}\dot{w}_{fp} \quad {}^{n+1}\dot{w}_{fSB} \quad {}^{n+1}\dot{w}_{fL}\}^T;\ {}^{n+1}\ddot{w}_f=\{{}^{n+1}\ddot{w}_{fp} \quad {}^{n+1}\ddot{w}_{fSB} \quad {}^{n+1}\ddot{w}_{fL}\}^T;\\
&{}^{n+1}\dot{w}_{fp}=\{{}^{n+1}\dot{w}_{fpN} \quad {}^{n+1}\dot{w}_{fpc} \quad {}^{n+1}\dot{w}_{fpL}\}^T;\ {}^{n+1}\ddot{w}_{fp}=\{{}^{n+1}\ddot{w}_{fpN} \quad {}^{n+1}\ddot{w}_{fpc} \quad {}^{n+1}\ddot{w}_{fpL}\}^T;\\
&{}^{n+1}\dot{w}_{fpt}={}^{n+1}\dot{q}_{pt};\ {}^{n+1}\ddot{w}_{fpt}={}^{n+1}\ddot{q}_{pt} \qquad (\text{在}\Gamma_p\text{上})\\
&{}^{n+1}\dot{w}_{fSBt}={}^{n+1}\dot{q}_{SBt};\ {}^{n+1}\ddot{w}_{fSBt}={}^{n+1}\ddot{q}_{SBt} \qquad (\text{在}\Gamma_{SB}\text{上})
\end{aligned} \tag{2.6b, 2.6c}$$

$$\begin{aligned}
&{}^{a}p_{Tg}=\{{}^{a}p_{TP} \quad {}^{a}p_{TSB} \quad {}^{a}p_{TSA} \quad {}^{a}p_{Tf}\}^T;\\
&{}^{a}p_{Tp}={}^{a}p_p+{}^{a}p_{fp}-{}^{a}K_{fp}+{}^{a}p_{\underline{S}g}+{}^{a}F_{pg};\ {}^{a}p_{\underline{S}g}=\{0\ {}^{a}p_{\underline{S}}+{}^{a}F_{\underline{S}g}\}^T\\
&{}^{a}p_{TSB}={}^{a}p_{SB}+{}^{a}p_{fSB}-{}^{a}K_{fSB}+{}^{a}F_{SBg};\ {}^{a}p_{TSA}={}^{a}p_{SA}+{}^{a}F_{SAg};\ {}^{a}p_{Tf}={}^{a}p_{fL}-{}^{a}K_{fL};\\
&{}^{a}p_S=\{{}^{a}p_{\underline{S}} \quad {}^{a}p_{SB} \quad {}^{a}p_{SA}\}^T;\ {}^{a}p_f=\{{}^{a}p_{fp} \quad {}^{a}p_{fSB} \quad {}^{a}p_{fL}\}^T;\\
&{}^{a}F_{Sg}=\{{}^{a}F_{\underline{S}g} \quad {}^{a}F_{SBg} \quad {}^{a}F_{SAg}\}^T;\\
&{}^{a}K_f=\{{}^{a}K_{fp} \quad {}^{a}K_{fSB} \quad {}^{a}K_{fL}\}^T;\ {}^{a}p_p=\{{}^{a}p_{\bar{p}} \quad {}^{a}p_{\underline{p}}\}^T \qquad (a=n+1);\\
&{}^{n}f_T=\{{}^{n}f_{Tp} \quad {}^{n}f_{fSB} \quad {}^{n}{}_{fSA} \quad 0\}^T;\ {}^{n}f_p=\{{}^{n}f_{\bar{p}} \quad {}^{n}f_{\underline{p}}\}^T;\ {}^{n}f_S=\{{}^{n}f_{\underline{S}} \quad {}^{n}f_{SB} \quad {}^{n}f_{SA}\}^T;\\
&{}^{n}f_{Tp}=\{{}^{n}f_{\bar{p}},\ {}^{n}f_{\underline{p}}+{}^{n}f_{\underline{S}}\}^T;\ {}^{n}f_{TSB}={}^{n}f_{SB};\ {}^{n}f_{TSA}={}^{n}f_{SA};
\end{aligned} \tag{2.6d}$$

$$\begin{aligned}
&{}^{n+1}M_T=\begin{bmatrix} M_{TP} & & & \\ & M_{TSB} & & \\ & & M_{TSA} & \\ & & & M_{TL}\end{bmatrix};\ [M_{TP}]=\begin{bmatrix} M_{\bar{p}} & \\ & M_{\underline{S}}+M_{\underline{p}}\end{bmatrix}+[M_{fp}];\\
&[M_{TSB}]=[M_{SB}+M_{fSB}];\ [M_{TSA}]=[M_{SA}];\ [M_{TL}]=[M_{fL}];\\
&{}^{n+1}M_S=\begin{bmatrix} M_{\underline{S}} & & \\ & M_{SB} & \\ & & M_{SA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_{\underline{S}} & \\ & M_{\bar{S}}\end{bmatrix};\ {}^{n+1}M_f=\begin{bmatrix} M_{fp} & & \\ & M_{fSA} & \\ & & M_{fL}\end{bmatrix};\\
&{}^{n+1}M_p=\begin{bmatrix} M_{\underline{p}} & \\ & M_{\bar{p}}\end{bmatrix};
\end{aligned} \tag{2.6e}$$

$$\begin{aligned}
&{}^{n+1}M_T=\begin{bmatrix} K_{Tp} & K_{Tp12} & 0 & 0\\ K_{Tp21} & K_{TSB} & K_{TSB23} & 0\\ 0 & K_{TSB32} & K_{TSA} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\ K_{Tp}=\begin{bmatrix} K_{\bar{p}} & K_{\bar{p}\underline{p}}\\ k_{\underline{p}\bar{p}} & K_{\underline{p}}+K_{\underline{S}}\end{bmatrix};\\
&K_{Tp12}=[0 \quad K_{\underline{S}\bar{S}12}]^T;\ K_{Tp21}=[0 \quad K_{\bar{S}\underline{S}21}];\ K_{TSB23}=K_{SSB23}\\
&K_{TSB32}=K_{SSB32};\ K_{TSA}=K_{SSA};\ K_{TSB}=K_{SSB}\\
&{}^{n+1}K_S=\begin{bmatrix} K_{\underline{S}} & K_{\underline{S}\bar{S}12} & 0\\ K_{\bar{S}\underline{S}21} & K_{SSB} & K_{SSB23}\\ 0 & K_{SSB32} & K_{SSA}\end{bmatrix};\ {}^{n+1}K_p=\begin{bmatrix} K_{\bar{p}} & K_{\bar{p}\underline{p}}\\ K_{\underline{p}\bar{p}} & K_{\underline{p}}\end{bmatrix};
\end{aligned} \tag{2.6f}$$

$$
{}^{n+1}C_T=\begin{bmatrix} C_{Tp} & C_{Tp12} & 0 & C_{Tf14} \\ C_{Tp21} & C_{TSB} & C_{TSB23} & C_{Tf24} \\ 0 & C_{TSB32} & C_{TSA} & 0 \\ C_{Tf41} & C_{Tf42} & 0 & C_{Tf} \end{bmatrix};\quad C_{Tp}=\begin{bmatrix} C_{\bar{p}} & C_{\bar{p}\underline{p}} \\ C_{\underline{p}\bar{p}} & C_{\underline{p}}+C_{\underline{s}} \end{bmatrix}+[C_{fp}]
$$

$$
C_{Tp12}=[C_{fp12}+C_{\underline{s}\bar{s}12}];\quad C_{Tp21}=[C_{fp21}+C_{\bar{s}\underline{s}21}] \tag{2.6g}
$$

$$
C_{TSB}=[C_{SSB}+C_{fSB}];\quad C_{TSB23}=C_{SSB23};\quad C_{TSB32}=C_{SSB32};
$$

$$
C_{Tf24}=C_{f23};\quad C_{Tf14}=C_{f13};\quad C_{Tf41}=C_{f31};
$$

$$
C_{TSA}=C_{SSA};\quad C_{Tf42}=C_{f23};\quad C_{Tf}=C_{fL}; \tag{2.6h}
$$

$$
{}^{n+1}C_p=\begin{bmatrix} C_{\bar{p}} & C_{\bar{p}\underline{p}} \\ C_{\bar{p}\underline{p}} & C_{\underline{p}} \end{bmatrix};\quad {}^{n+1}C_S=\begin{bmatrix} C_{\underline{s}} & C_{\underline{s}\bar{s}12} & 0 \\ C_{\bar{s}\underline{s}21} & C_{SSB} & C_{SSB23} \\ 0 & C_{SSB32} & C_{SSA} \end{bmatrix};
$$

$$
{}^{n+1}C_f=\begin{bmatrix} C_{fp} & C_{f12} & C_{f13} \\ C_{f21} & C_{fSB} & C_{f23} \\ C_{f31} & C_{f32} & C_{fL} \end{bmatrix} \tag{2.6i}
$$

边界Γ_{SA}，Γ_{SL}，Γ_{SE}，$\Gamma_{\underline{s}\underline{p}}(\Gamma_{\underline{p}})$，$\Gamma_{\bar{p}}$分别为罐壁上非湿表面、拉格朗日区域的湿面、欧拉区域的湿面、底板与罐壁交线边界、底板上除$\Gamma_{\underline{p}}$以外的区域。各区域上的变量加注相应的脚标，例如：${}^{n+1}q_{pc}$表示在第$n+1$步中底板壳与基础（支承）可能接触的区域Γ_{pc}的位移向量；而${}^{n+1}q_{PN}$，${}^{n+1}q_{PL}$分别表示在第$n+1$步初始时接触区域Γ_{PN}与未接触（提离）的区域Γ_{PL}上的位移向量。

在逐步积分格式中，对非线性问题比较有效的是 Houbolt 法，它是非自启步的逐步积分格式。本文问题的底板区域存在提离问题，即移动边界问题，这要求采用无时间外延和自启步的逐步积分格式，因此我们分区域采用不同的逐步积分格式：罐壁子结构采用Houbolt逐步积分格式，而底板和基础采用Newmark逐步积分格式，首先对总体方程进行化块（略去一些上标）

$$
\begin{bmatrix} M_p & \\ & M_{sf} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} {}^{n+1}\ddot{u}_p \\ {}^{n+1}\ddot{u}_{sf} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} C_p & C_{psf} \\ C_{pfs} & C_{sf} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} {}^{n+1}\dot{u}_p \\ {}^{n+1}\dot{u}_{sf} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K_p & K_{psf} \\ K_{pfs} & K_{sf} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta u_p \\ \delta u_{sf} \end{Bmatrix}
$$

$$
=\begin{Bmatrix} {}^{n+1}p_{pg} \\ {}^{n+1}p_{sfg} \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} {}^{n}f_p \\ {}^{n}f_{sf} \end{Bmatrix} \tag{2.7a}
$$

式中脚标p,s,f分别表示底板区域、罐壁和流体区域。展开式（2.7a），然后把相应的逐步积分格式代入其中，整理得

$$
{}^{n}\tilde{K}_{TL}\delta u_{TL}={}^{n+1}\tilde{F}_{TL} \tag{2.8a}
$$

式中

$$
{}^{n}\tilde{K}_{TL}=\begin{bmatrix} K_p+\dfrac{2}{\Delta t^2}M_p+\dfrac{4}{\Delta t}C_p & K_{psf}+\dfrac{11}{6\Delta t}C_{psf} \\ K_{pfs}+\dfrac{4}{\Delta t}C_{pfs} & K_{sf}+\dfrac{2}{\Delta t^2}M_{sf}+\dfrac{11}{6\Delta t}C_{sf} \end{bmatrix} \tag{2.8b}
$$

$$
\delta u_{TL}=\{\delta u_p\quad \delta u_{sf}\}^T;\quad {}^{a}p_{TL}=\{{}^{a}p_p\quad {}^{a}p_{sf}\}^T\qquad (a=n+1);
$$

$$
{}^{a}F_{TL}=\{{}^{a}F_p\quad {}^{a}F_{sf}\}^T\qquad (a=n+1);\quad {}^{n}f_{TL}=\{{}^{n}{}_{p}\quad {}^{n}f_{sf}\}^T; \tag{2.8c}
$$

$$
{}^{n+1}\tilde{F}_{TL}={}^{n+1}p_{TLg}-{}^{n}f_{TL}+{}^{n+1}F_{TL}=\{{}^{n+1}\tilde{F}_{sf}\quad {}^{n+1}\tilde{F}\}
$$

$$^{n+1}F_p=M_p\left(\frac{^n\dot{u}_p}{\Delta t}+{}^n\ddot{u}_p\right)+2C_p^n\dot{u}_p+\frac{C_{psf}}{6\Delta t}\left(7\cdot{}^nu_{sf}-9\cdot{}^{n-1}u_{sf}+\frac{^{n-2}u_{sf}}{2}\right) \tag{2.8d}$$

$$^{n+1}F_{sf}=\frac{M_{sf}}{\Delta t^2}(3\cdot{}^nu_{sf}-4\cdot{}^{n-1}u_{sf}+{}^{n-2}u_{sf})$$

$$+\frac{C_{sf}}{6\Delta t}(7\cdot{}^nu_{sf}-9\cdot{}^{n-1}u_{sf}+2\cdot{}^{n-2}u_{sf})+2\cdot C_{pfs}\cdot{}^n\dot{u}_{sf} \tag{2.8e}$$

为导出互补方程，对方程(2.8)的有效刚度阵进行乔列斯基(Cholesky)分解（LDL^T），利用子结构概念，对方程(2.8a)进行划块和往罐底板上的向量凝聚，并略去顶标n，$n+1$，用q代替u，得

$$[K_{TLp}]\{\delta q_p\}=\{F_{TLps}\} \tag{2.9a}$$

式中 $[K_{TLp}]=[L_p][D_p][L_p]^T$；$\{F_{TLps}\}=\{\tilde{F}_p\}-[B_p][L_{sf}]^{-1}\{\tilde{F}_{sf}\}$

$$[{}^n\bar{K}_{TL}]=[L_{TL}][D_{TL}][L_{TL}]^T;\quad [L_{TL}]=\begin{bmatrix}L_{sf} & \\ B_p & L_p\end{bmatrix};\quad [D_{TL}]=\begin{bmatrix}D_{sf} & \\ & D_p\end{bmatrix} \tag{2.9b~f}$$

同时也得到回代求罐壁位移向量$\{q_{sf}\}$的方程

$$[K_{Tsf}]\{\delta q_{sf}\}=\{F_{sfp}\} \tag{2.9h}$$

式中 $[K_{Tsf}]=[D_{sf}][L_{sf}]^T$；$\{F_{sfp}\}=[L_{sf}]^{-1}\{\tilde{F}_{sf}\}-[D_{sf}][B_p]^T\{\delta q_p\}$ (2.9i, j)

本文的载荷具有多种的类型和分布形式。

假定：在取得适当小的每个时间步中，产生新的接触（或提离）区域Γ_{pc}上底板壳与基础的间隙w_c很小，即小变形，而在Γ_{pL}(及Γ_{pN})上变形是几何非线性的；进而假定：在Γ_{p_c}上底板壳与基础具有相同的切向和法向。设：$p_{\alpha\beta}$，$q_{\alpha\beta}$($\alpha=p,b$；$\beta=\xi,\eta,\zeta$) 分别表示底板壳与基础通过接触所受到的作用力和在接触过程中的位移分量，脚标中第一个表示受力者或产生位移者，第二个表示力或位移在局部坐标系中的方向，这里取局部坐标系$O\xi\eta\zeta$的ζ轴方向与Γ_{pc}的外法向一致。不失一般性，考虑弹性基础有摩擦的情况，即一般空间古典接触问题。其互补条件为

接触条件

$$q_\zeta>0,p_{p\zeta}=0 \quad 或 \quad q_\zeta=0,p_{p\zeta}>0 \tag{2.10a}$$

$$q_\zeta^T\cdot p_{p\zeta}=0 \tag{2.10b}$$

式中 $q_\zeta=q_{pb\zeta}-w_c$；$q_{pb}=q_{p\zeta}-q_{b\zeta}$ (2.10c)

摩擦条件 ($q_\zeta=0$)

$$p_t=|p_{pt}|-\mu_c p_{p\zeta}\leqslant 0 \tag{2.11a}$$

$$q_{pb\beta}=0 \qquad (当 p_t<0 \quad \beta=\xi,\eta) \tag{2.11b}$$

$$q_{pb\beta}=kp_{p\beta}, \qquad (k\geqslant 0;\ 当 p_t=0 时 \beta=\xi,\eta) \tag{2.11c}$$

$$t=\mathrm{arctg}(p_{p\eta}/p_{p\xi}); \tag{2.11d}$$

$$|p_{pt}|=\sqrt{p_{p\eta}^2+p_{p\xi}^2}; \tag{2.11e}$$

$$q_{pb\beta}=q_{p\beta}-q_{b\beta} \qquad (\beta=\xi,\eta) \tag{2.11f}$$

式中μ_c是底板与基础之间的摩擦系数。

在用有限元分析时，将基础面离散成与底板壳节点位置相同的单元（面），与罐体同理得基础的第$n+1$时间步的动力增量型准静力方程为

$$[{}^n\bar{K}_b]\{{}^{n+1}\bar{q}_b\}=\{{}^{n+1}\bar{p}_b\} \tag{2.12}$$

式中 $[{}^n\bar{K}_b]$，$\{{}^{n+1}\bar{p}_b\}$为有效刚度阵和等效的节点力向量。

设$T_{p\beta}$是从总体坐标系向局部坐标系$O\xi\eta\zeta$转换的转换阵，则

$$q_{pc}=T_{p\beta}q_{p\beta};\quad p_{pc}=T_{p\beta}p_{p\beta};\quad Q_{cp}=T_{p\beta}Q_{p\beta}\qquad(\beta=\xi,\eta,\zeta)\tag{2.13a～c}$$

为了导出线性互补方程，由式(2.9a)向Γ_{pc}上向量凝聚，并利用式(2.13a～c)进行坐标转换，得

（1）
$$p_{p\beta}-K_{p\beta}q_{p\beta}=Q_{p\beta}\tag{2.14a}$$

式中
$$K_{p\beta}=T^{-1}_{p\beta}L_{pc}D_{pc}L^T_{pc}T_{p\beta}\tag{2.14b}$$
$$Q_{p\beta}=T^{-1}_{p\beta}(-Q_{pc}+A_pL^{-1}_{pp}Q_{pp})\tag{2.14c}$$
$$p_{p\beta}=T^{-1}_{p\beta}p_{pc}\tag{2.14d}$$

（2）
$$K_pq_p=F_p\tag{2.15a}$$

式中
$$K_p=D_{pp}L^T_{pp}\tag{2.15b}$$
$$F_p=L^{-1}_{pp}Q_{pp}-D_{pp}A^T_pq_{pc}\tag{2.15c}$$
$$[\bar{K}_{TLp}]_n=[L_{Tp}][D_{Tp}][L_{Tp}]^T=\begin{bmatrix}L_{pp} & \\ A_p & L_{pc}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{pp} & \\ & D_{pc}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L^T_{pp} & A^T_p\\ & L^T_{pc}\end{bmatrix}$$
$$\{\tilde{q}\}_{n+1}=\{q_p\quad q_{pc}\}^T;\quad \{\tilde{q}_p\}_{n+1}=\{Q_{pp}\quad Q_{pc}\}^T+\{0,\ p_{pc}\}^T\tag{2.15d,e}$$

注意这里的下标“pc”表示Γ_{pc}上的区域，而下标“p”表示除Γ_{pc}外的底板壳的区域．上式(2.14)，(2.15)便是局部坐标下，以Γ_{pc}上互补条件中出现位移向量q_{pc}为出口向量的子结构方程。

同理由式(2.12)可以得到基础方程向q_{pc}凝聚的子结构方程，记为(2.16a～f)，其中一些表达式与式(2.14)、(2.15)的底板壳表达式类似，将脚标p与b互换即可。

将方程(2.14a)、(2.16a)写成矩阵形式，经过适当处理，再凝聚到以$q_{pb\beta}$为出口的子结构上，得到

（1）
$$p_{b\beta}-K_{pb\beta}q_{pb\beta}=Q'_{pb\beta}\tag{2.17a}$$

其中
$$K_{pb\beta}=L_{pbc}D_{pbc}L^T_{pbc}\tag{2.17b}$$
$$Q'_{pb\beta}=Q_{b\beta}-A_{pb}L^{-1}_{pbp}(Q_{p\beta}+Q_{p\beta})\tag{2.17c}$$
$$\begin{bmatrix}K_{p\beta}+K_{b\beta} & K_{b\beta}\\ K_{b\beta} & K_{b\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{pbp} & \\ A_{pb} & L_{pbc}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{pbp} & \\ & D_{pbc}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L^T_{pbp} & A^T_{pp}\\ & L^T_{pbc}\end{bmatrix}\tag{2.17d}$$
$$p_{p\beta}+p_{b\beta}=0;\quad q_{pb\beta}=q_{p\beta}-q_{b\beta}\tag{2.17e,f}$$

（2）
$$K_{pp\beta}q_{p\beta}=F_{pp}\tag{2.18a}$$

其中
$$K_{pp}=D_{pbp}L^T_{pbp}\tag{2.18b}$$
$$F_{pp}=-L^{-1}_{pbp}(Q_{p\beta}+Q_{b\beta})-D_{pbp}A^T_{pb}q_{pb\beta}\tag{2.18c}$$

因$p_{p\beta}$为薄板壳通过与基础（支承）的接触过程中受到的基础的作用力，而$p_{p\beta}$为其反力。

对于有摩擦的情况，方程式(2.17a)中的$q_{pb\beta}$不仅包括接触面的可能接触区域Γ_{pc}上的法向位移差，也包括切向位移差，所以对Γ_{pc}上每个接触“点对”i定义

$$\lambda^i_1=\sup(0,q^i_{ppt});\quad \lambda^i_2=\sup(0,-q^i_{pbt});\quad \lambda^i_3=q^i_{pb\zeta}-w^i_c;\quad \lambda^i_p=\{\lambda^i_1\quad \lambda^i_2\quad \lambda^i_3\}^T_p\tag{2.19}$$

式中sup表示取括号内二者之中的最大者（上限）；w^i_c是薄板壳与支承（基础）在Γ_{pc}中的间隙向量w_c中的第i个分量；q^i_{pbt}，$q^i_{pb\zeta}$分别是Γ_{pc}上$q_{pb\beta}$向量中的第i个接触“点对”的位移差$q^i_{pb\beta}(\beta=\xi,\eta,\zeta$或$t,\zeta)$向量内的切向和法向位移差分量，将式(2.19)写成矩阵、向量形式，并集成为总体向量形式，得

$$q_{pb\beta}=\begin{Bmatrix}q_{pbt}\\ q_{pb\zeta}\end{Bmatrix}=C_{pb}\lambda_{pb}+w_c\tag{2.20a}$$

式中　$$C_i=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_{pb}=\{\lambda^1,\lambda^2,\cdots,\lambda^m\}^T;\quad C_{pb}=\mathrm{Diag}M[C_1,\cdots,C_m];$$

$$w'_c=\{w'^1_c,w'^2_c,\cdots,w'^m_c\}^T;\quad w'^i_c=\{0\quad w^i_c\}^T \tag{2.20b}$$

其中m为Γ_{pc}中可能接触"点对"的总数；$\mathrm{Diag}M[C_1,\cdots,C_m]$表示矩阵$C_{pb}$是由$C_1,\cdots,C_m$组成的对角阵．定义

$$\gamma^i_p=\begin{Bmatrix}\gamma^i_1\\ \gamma^i_2\\ \gamma^i_3\end{Bmatrix}=A^i_p\begin{Bmatrix}p^i_{pt}\\ p^i_{p\zeta}\end{Bmatrix};\quad A^i_p=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ \mu_c & \mu_c & 1\end{bmatrix}^T;\quad \gamma_{pb}=\{\gamma^1_p,\gamma^2_p,\cdots,\gamma^m_p\}^T \tag{2.20c}$$

式中p^i_{pt}，$p^i_{p\zeta}$分别是Γ_{pc}上第i个接触点对上的力分量$p^i_{p\beta}(\beta=t,\zeta$ 或 $\xi,\eta,\zeta)$ 中的切向（摩擦力）和法向力的分量．所以，若用γ_{pb}，γ^i_p表示$p_{p\beta}$，$p^i_{p\beta}$，则有：

$$p_{p\beta}=A_{pb}\gamma_{pb};\quad p^i_{p\beta}=A^i_p\gamma^i_p \tag{2.20d}$$

式中　$A_{pb}=\mathrm{Diag}M[A^1_p,A^2_p,\cdots,A^m_p]$；$p_{p\beta}=\{p^1_{p\beta},p^2_{p\beta},\cdots,p^m_{p\beta}\}^T$；$p^i_{p\beta}=\{p^i_{pt}\quad p^i_{p\zeta}\}^T$

将式(2.20a)代入式(2.17a)中得到一个新方程，将式(2.20d)代入其中，用A_{pb}的逆阵B_{pb}左乘以这一新的方程，得到

$$\gamma_{pb}-K_{pb}\lambda_{pb}=Q_{pb} \tag{2.21a}$$

式中　$$K_{pb}=B_{pb}K_{pb\beta}C_{pb};\quad Q_{pb}=B_{pb}(O'_{pb\beta}+K_{pb\beta}w'_c) \tag{2.21b}$$

$$B_{pb}=A^{-}_{p};\quad B^i_p=(A^i_p)^{-T}\qquad (i=1,\cdots,m) \tag{2.21c}$$

按照式(2.20a～d)中位移和力向量的排列形式，重新排列式（2.10a～c)、(2.11a～f)中的相应向量，注意这里并未改变其中的原来条件性质，然后得到用γ_{pb}，λ_{pb}表示的互补条件

$$\lambda_{pb}>0,\gamma_{pb}=0\ \text{或}\ \lambda_{pb}=0,\gamma_{pb}>0$$

$$\lambda^T_{pb}\cdot\gamma_{pb}=0 \tag{2.22a}$$

式(2.21)，(2.22)，(2.22)便构成了弹性支承（基础）考虑摩擦力影响的薄板壳大变形动力问题的线性互补方程．实际上这里给出的线性互补方程适用于一般弹性体大变形有摩擦的动静力三维接触问题，使用时只要将原来方程换成相应问题的基本方程即可．本文的线性互补方程采用Lemke方法求解．值得注意的是在求解该问题时不能用 Wilson-$\theta(\theta=1.4)$ 逐步积分方法．

设：已知第n步以前各步的值，求算第$n+1$步的终值．Houbolt和Newmark法计算第$n+1$步的位移、速度和加速度的算式为

$$^{n+1}u_{sfi}={}^{n+1}u_{sfi-1}+\Delta^{n+1}u_{sfi} \tag{2.23a}$$

$$^{n+1}\dot{u}_{sfi}=\frac{1}{6\Delta t}(14\cdot{}^{n+1}u_{sfi}-18\cdot{}^{n}u_{sf}+9\cdot{}^{n-1}u_{sf}-2\cdot{}^{n-2}u_{sf}) \tag{2.23b}$$

$$^{n+1}\ddot{u}_{sfi}=\frac{1}{\Delta t^2}(2\cdot{}^{n+1}u_{sfi}-5\cdot{}^{n}u_{sf}+4\cdot{}^{n-1}u_{sf}-{}^{n-2}u_{sf}) \tag{2.23c}$$

$$^{n+1}\ddot{u}_{pi}=a_7\Delta^{n+1}u_{pi}+a_8\cdot{}^{n}\dot{u}_p+a_9\cdot{}^{n}\ddot{u}_p \tag{2.23d}$$

$$^{n+1}\dot{u}_{pi}={}^{n}\dot{u}_p+a_{10}\cdot{}^{n}\ddot{u}_p+a_{14}\cdot{}^{n+1}\ddot{u}_{pi} \tag{2.23e}$$

$$^{n+1}u_{pi}={}^{n}u_p+\Delta t\cdot{}^{n}\dot{u}_p+a_{12}\cdot{}^{n}\ddot{u}_p+a_{13}\cdot{}^{n+1}\ddot{u}_{pi} \tag{2.23f}$$

式中　$$\delta^{n+1}u_{pi}=\delta^{n+1}u_{pi-1}+\Delta^{n+1}u_{pi} \tag{2.23g}$$

参 考 文 献

[1] G. C. Manos and R. W. Clough, Further study of the earthquake response of a broad cylindrical liquid storage tank model, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, Report No. UCB/EERC—82/07(July 1982).

[2] 温德超，储液罐提离的实验研究和多重非线性耦合的三维静、动力分析，大连理工大学博士学位论文 (1991).

[3] T. Aizawa, Model method for flow-induced free vibrasion analysis, Deparment of Graphics, College of Arst and Science, University of Tokyo, Komaba, Meguro-ku, Tokyo (1986).

[4] Belytschko and W.K.Liu, Fluid structure interaction with sloshing, SMIRTT, Northwestern. Univ. the Tech. Inst. Evanston, Illinois, 60201.

[5] 温德超，三维流-固耦合移动边界的多重非线性问题，博士后研究报告，清华大学 (1994).

Unitive Analysis Schemes Problems of Multiple Moving Boundaries with 3-D Liquid-Solid Multiple Nonlinear Coupling for Uplift of Anchored Liquid Storage Tanks

Wen Dechao Zheng Zhaochang

(Dept. of Engineering Mechanics, Qinghua University, Beijing 100084, P.R. China)

Abstract

In the paper, 3-D analysis method with unitive schemes is set up, which is used to resolve the uplift with multiple moving boundaries and multiple nonlinear coupling for anchored liquid storage tanks. In it, an algorithm of quasi-harmonious finite elements for arbitray quadrilateral of thin plates and shells is built up to analyze the multiple coupling problems of general thin plates and shells structures with three dimensions, the complementary equations for analyzing uplifting moving boundary problems is deduced, The axial symmetry and presumption of beam type mode are not used. In it, an algorithm is put forward for analyzing the Navier-Stokes problems of unsteady,three-dimensional, and viscous liquid with sloshing of moving boundary surfaces in large amplitude under ALE frame by scheme of time-split-steps to which linear potential theory is not applied. The algorithms can be used to analyze the solid-liquid multiple nonlinear coupling porblems with 3-D moving boundary fricton in multiple places.

Key words: solid-liquid couping, multiple nonlinear coupling, movin g boundary, liquid storage tank, uplift, time-split-steps, ALE method