应用数学和力学，第18卷 第1期（1997年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

下一个失效时刻的非参数估计

李 刚[1]

（张石生推荐，1995年4月24日收到）

摘 要

本文研究下一个失效时刻的非参数估计问题．文中所给出的估计量在一定条件下a.s.收敛，同时也讨论了估计量的渐近正态性．

关键词 截断数据 a.s.收敛 渐近正态 K-M估计

下一个失效时刻的估计，是一个在现实中经常遇到的问题．例如，n个产品同时进入无替换寿命试验，一段时间后，顺序观察到r个产品失效，试验停止，此时希望知道第$r+1$个产品将于何时失效？确切地说，第$r+1$个产品将以多大的概率再活过一段时间Δt？这个问题，1993年Tsokos等人就Weibull分布进行了研究．本文作者对一般的参数情形作了讨论，有了一些结果．这里只研究非参数情形．

问题的一般描述如下：

设X_1，$X_2,\cdots$，X_n是i.i.d.随机变量，具有共同的未知分布函数F和密度函数f．我们欲通过顺序样本

$$X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(r)}$$

估计

$$p_r=P(X_{(r+1)}-X_{(r)}>\Delta t\,|\,X_{(r)})$$

并讨论估计量的性质．

让$S(t)=P(X>t)=1-F(t)$表示生存函数．p_r就是$n-r$个独立个体活过$X_{(r)}$后，又全部活过$X_{(r)}+\Delta t$的概率．从而

$$p_r=\left(\frac{S(X_{(r)}+\Delta t)}{S(X_{(r)})}\right)^{n-r} \tag{1}$$

假定

(i) $\dfrac{r}{n}=A+o((\ln n)^b n^{-\frac{1}{2}})$，$b>\dfrac{1}{2}$，$0<A<1$均为常数；

(ii) $\Delta t(n)=O(n^{-1})$，且$C=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\Delta t$；

(iii) 存在$M>0$，使$\dfrac{f(x)}{S(x)}=\lambda(x)<M$对一切$x$成立．

在条件(i)、(ii)、(iii)之下，有

---

1 苏州丝绸工学院管理工程系，苏州 215005．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_r}{\exp[-\lambda_n(X_{(r)})\cdot C]}=1 \qquad \text{a.s.}$$

于是，在样本很大时，可用

$$\hat{p}=\exp[-\hat{\lambda}_n(X_{(r)})\cdot C]$$

估计p_r。易知$\hat{p}$的大样本性质与$\hat{\lambda}_n$的大样本性质有关。事实上，有

定理1 设$\hat{\lambda}_n$是危险率函数$\lambda(x)$的渐近无偏估计，则

（1） 若$\hat{\lambda}_n(x)\xrightarrow{\text{a.s.}}\lambda(x)$，则$\hat{p}-p_r\xrightarrow{\text{a.s.}}0$；

（2） 若$\dfrac{\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n}{\sqrt{\operatorname{Var}\hat{\lambda}_n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$，且$\operatorname{Var}\hat{\lambda}_n\to 0$ $(n\to\infty)$，则

$$\frac{1}{-C\exp[-CE\hat{\lambda}_n]}\cdot\frac{\hat{p}-E\hat{p}}{\sqrt{\operatorname{Var}\hat{\lambda}_n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$$

证明 （1）是显然的。

（2）

$$\begin{aligned}
\hat{p}-E\hat{p}&=\exp[-C\hat{\lambda}_n]-E\exp[-C\hat{\lambda}_n]\\
&=\exp[-CE\hat{\lambda}_n](\exp[-C(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)]-1)\\
&\quad+E\exp[-CE\hat{\lambda}_n](1-\exp[-C(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)])\\
&=\exp[-CE\hat{\lambda}_n]\left[-C(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)+\frac{C^2}{2}\exp[-\theta_1C(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)]\right.\\
&\quad\left.\cdot(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)^2\right]+E\exp[-CE\hat{\lambda}_n]\left[C(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)\right.\\
&\quad\left.-\frac{C^2}{2}\exp[-\theta_2C(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)]\cdot(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)^2\right]\\
&=-C\exp[-CE\hat{\lambda}_n](\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)+\frac{C^2}{2}\exp[-\theta_1C(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)\\
&\quad-CE\hat{\lambda}_n]\cdot(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)^2-\exp[-CE\hat{\lambda}_n]\\
&\quad\cdot\frac{C^2}{2}E\exp[-\theta_2C(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)]\cdot(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)^2\\
&=I_1+I_2+I_3
\end{aligned}$$

其中 C是假定条件(ii)中定义的常数。$0<\theta_1,\ \theta_2<1$。对于I_1有

$$\frac{I_1}{-C\exp[-CE\hat{\lambda}_n]\sqrt{\operatorname{Var}\hat{\lambda}_n}}=\frac{\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n}{\sqrt{\operatorname{Var}\hat{\lambda}_n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$$

对I_2，有

$$\frac{I_2}{-C\exp[-CE\hat{\lambda}_n]\sqrt{\operatorname{Var}\hat{\lambda}_n}}=-\frac{C}{2}\exp[-\theta_2C(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)]$$

$$\cdot(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)\cdot\frac{\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n}{\sqrt{\operatorname{Var}\hat{\lambda}_n}}$$

因 $\dfrac{\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n}{\sqrt{\operatorname{Var}\hat{\lambda}_n}}$有确定的分布，容易得到

$$I_2\xrightarrow{p}0$$

对于I_3，我们有

$$I_3=-\exp[-CE\hat{\lambda}_n]\cdot\frac{C^2}{2}E\exp[-C\theta_2E\hat{\lambda}_n]\cdot(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)^2$$

$$\leqslant -\exp[-CE\hat{\lambda}_n]\frac{C^2}{2}E(\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n)^2$$

$$=-\exp[-CE\hat{\lambda}_n]\cdot\frac{C^2}{2}\mathrm{Var}\hat{\lambda}_n$$

故

$$\frac{I_3}{-C\exp[-CE\hat{\lambda}_n]\cdot\sqrt{\mathrm{Var}\hat{\lambda}_n}}\leqslant\frac{C}{2}\sqrt{\mathrm{Var}\hat{\lambda}_n}\to 0$$

于是定理得证。

关于危险率函数$\lambda(x)$的估计，曾有许多人做过研究，获得了一些很好的结果(参见[1]、[2]、[3]、[4]、[5])。这里，我们取

$$\hat{f}_n(x)=\frac{1}{h(x)}\int K\left(\frac{x-y}{h(n)}\right)d(1-\hat{S}_n(y))$$

作为密度函数f的估计。其中$\hat{S}_n(\cdot)$是Kaplan-Meier 估计（K-M估计），K 是非负对称核函数且满足下列条件：

1° $K(t)=o(t^{-1})\qquad (t\to\infty)$；

2° $\int K(t)dt=1$；

3° $\frac{1}{h(n)}K\left(\frac{x-y}{h(n)}\right)\to 0$，对$|x-y|\geqslant M$一致成立，其中$M$是一固定常数；

4° $\int\limits_{|x-y|\geqslant M}\frac{1}{h(n)}K\left(\frac{x-y}{h(n)}\right)dy\to 0\qquad (n\to\infty)$；

5° $\frac{h}{\int K^2(t)dt}=O\left(\left(\frac{1}{\ln n}\right)^a\right)\qquad (a>1)$

其中，步长$h(n)$满足$h(n)\to 0$，且$n\cdot h(n)\to\infty$。

事实上，由2°和4°不难推出$\frac{h}{\int K^2(t)dt}\to 0$。

基于$\hat{f}_n$，我们得到$\lambda(x)$的估计

$$\tilde{\lambda}_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_{(i)}}{n-i+1}K_h(x-Z_{(i)})$$

这里

$$K_h(x-Z_{(i)})=\frac{1}{h(n)}K\left(\frac{x-Z_{(i)}}{h(n)}\right)$$

$$Z_{(i)}=\begin{cases}X_{(i)} & (1\leqslant i\leqslant r)\\ X_{(r)} & (r<i\leqslant n)\end{cases}$$

在以下的讨论中，我们还假定$\lambda(x)$连续。

定义 如果对任何的$M>0$，均存在足够小的h使得$K_h(x-y)/(1-F(y))$对满足不等式$|x-y|>M$的x，y一致有界，就说K与分布F是一致的。

引理1 设K与分布F是一致的，则当$n\to\infty$，$h\to 0$，$nh\to\infty$时，有

$$\lim_{n\to\infty}E\tilde{\lambda}_n(x)=\lambda(x)$$

记G为截断随机变量的分布函数。

引理2 设K与F及G是一致的，则当$n\to\infty$，$h\to 0$，$nh\to\infty$时，有

$$\frac{\hat{\lambda}_n-E\hat{\lambda}_n}{\sqrt{\operatorname{Var}\hat{\lambda}_n}}\xrightarrow{d}N(0,\ 1)$$

引理1和引理2的证明参见[5]。

根据以上讨论，若取

$$\hat{\lambda}_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_{(i)}}{n-i+1}K_h(x-Z_{(i)})$$

作为$\lambda(x)$的估计，则相应的p_r的估计为

$$\hat{p}=\exp[-C\hat{\lambda}_n(x)]$$

定理2 若引理2的条件满足，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(p_r-E\hat{p})=0$

(2) $$\frac{\hat{p}-E\hat{p}}{-C\exp[-CE\hat{\lambda}_n]\sqrt{\operatorname{Var}\hat{\lambda}_n}}\xrightarrow{d}N(0,\ 1)$$

证明 (1)因$\varphi(x)=\exp[-Cx]$是严格凸函数，由Jensen不等式

$$|p_r-E\hat{p}|\leqslant|\exp[-C\lambda(x)]-\exp[-CE\hat{\lambda}(x)]|$$
$$=\exp[-C\lambda(x)]|1-\exp[C(\lambda(x)-E\hat{\lambda}_n(x))]|\to 0$$

(2)这是引理2和定理1的直接推论。

致谢 本文在郑祖康教授的指导下得以完成，在此深表谢意！

参 考 文 献

[1] J. R. Blum and V. Susarla, Maximal deviation theory of density and failure rate function estimates based on censored data, *Multivariate Analysis* V. (P. R. Krishnaiah, Ed.), North-Holland, Amsterdam (1980).

[2] S. Diehl and W. Stute, Kernel density and harzard function estimation in the presence of censoring, *J. Multivariate Analysis*, 25 (1988), 299—310.

[3] Liu Regina and J. Van Ryzin, A histogram of the hazard rate with censored data, *Ann. Statist.*, 13 (1985), 592—605.

[4] A. Földes, L. Reitö, and B. B. Winter, Strong consistency properties of nonparametric estimators for randomly censored data, Ⅰ.Estimation of density and failure rate, *Period. Math. Hungar*, 12 (1981), 15—29.

[5] M. A. Tanner and W. H. Wong, The estimation of the hazard function from randomly censored data by the kernel methed, *Ann. Statist.*, 11 (1983), 989—993.

[6] 黎子良、郑祖康，《生存分析》，浙江科学技术出版社，杭州 (1993).

The Nonparametric Estimation of the Next Failure Time

Li Gang

(Managment Engineering Department, Suzhou Institute of Silk Textile Technology, Suzhou 215005, *P. R. China)*

Abstract

The nonparametric estimation of the next failure time is considered in this paper. The estimator given in the paper has a. s. convergence under some proper conditions. The asymptotic normality of the estimator is also discussed.

Key words censored data, a. s. convergence, asymptotic normality, K-M estimator