应用数学和力学，第17卷 第12期（1996年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

概率度量空间中Fuzzy映象的不动点定理*

张石生[1]　　张　颖[2]　　袁家玮[3]

（1995年3月26日收到，1996年4月1日收到修改稿）

摘　　要

本文在概率度量空间的框架下，得到了Fuzzy映象的几个公共不动点和不动度定理。本文结果包含和改进了某些最新结果。

关键词　Fuzzy映象　概率度量空间　不动度　Fuzzy度量空间　h-型t-范数　不动点

近年来，Fuzzy映象的不动度定理在度量空间、Fuzzy度量空间和概率度量空间(简称PM-空间)的框架下被许多人讨论过（见，Butnariu[1]，Chang[4～8]，Fan[11，12]，Grabiec[13]，Hadzic[15]，Heilpern[16]，Kaleva等[17]，Lee等[18，19]）。

本文的目的是继续研究PM-空间中Fuzzy映象的不动点和公共不动度的存在性问题。本文结果包含Fan[11]，Grabiec[13]，Hadzic[15]，Heilpern[16]及Lee等[18，19]中的主要结果为特例，且发展了[5～7]中的结果。

一、预 备 知 识

本文中我们记$R=(-\infty,\ +\infty)$，$R^+=[0,\ +\infty)$，Z^+为一切正整数的集合。

为叙述和引用方便，我们先给出几个定义和结论。

定义1　一函数$f:R\to R^+$称为分布函数，如果它是不减的、左连续的且

$$\inf_{t\in R} f(t)=0,\quad \sup_{t\in R} f(t)=1$$

以后我们用$\mathscr{D}$表一切$f(0)=0$的分布函数f的集合，并用H表一特殊的分布函数，其定义为：

$$H(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases}$$

定义2　函数$\Delta:[0,\ 1]\times[0,\ 1]\to[0,\ 1]$称为$t$-范数，如果满足下列条件：对任意的$a$，$b$，$c$，$d\in[0,\ 1]$，

* 国家自然科学基金资助课题

1 四川大学数学系，成都 610064

2 加拿大多伦多约克大学数学系

3 四川行政财贸管理干部学院，成都 610073

(1) $\Delta(a, 1)=a$;

(2) $\Delta(a, b)=\Delta(b, a)$;

(3) $\Delta(c, d)\geqslant\Delta(a, b)$，如果$c\geqslant a$，$d\geqslant b$;

(4) $\Delta(\Delta(a, b), c)=\Delta(a, \Delta(b, c))$.

定义3　t-范数Δ称为h-型的，如果函数族$\{\Delta^m(t)\}_{m=1}^{\infty}$在$t=1$处是等度连续的，其中

$$\Delta^1(t)=\Delta(t, t),\ \Delta^m(t)=\Delta(t, \Delta^{m-1}(t)),\ m=1, 2, 3, \cdots,\ t\in[0, 1]$$

由定义可知Δ是h-型t-范数，当而且仅当对任给的$\lambda\in(0, 1)$，存在$\delta(\lambda)\in(0, 1)$，当$t>\delta(\lambda)$时，对一切$m\in Z^+$有$\Delta^m(t)>1-\lambda$.

又$\Delta=\min$，即$\Delta(a, b)=\min\{a, b\}$，是$h$-型$t$-范数最简单的例子，其他的例子在Hadzic[14]中给出.

定义4[20,21]　三元组(E, F, Δ)称为Menger PM-空间，如果E是一非空集，Δ是一t-范数，$F: E\times E\to\mathscr{D}$是一映象满足条件（以下我们把$F(x, y)$ $(x, y\in E)$记为$F_{x,y}$）:

(1) $F_{x,y}(t)=1$，$\forall t>0$，当而且仅当$x=y$;

(2) $F_{x,y}(0)=0$;

(3) $F_{x,y}(t)=F_{y,x}(t)$，$t\in R$;

(4) $F_{x,y}(t+s)\geqslant\Delta(F_{x,z}(t), F_{z,y}(s))$，　$\forall x, y, z\in E$，$t, s\geqslant 0$.

正如Schweizer等人[22]所指出的，如果t-范数Δ满足条件

$$\sup_{0<t<1}\Delta(t, t)=1 \tag{1.1}$$

则Menger PM-空间(E, F, Δ)是由邻域系$\{U_p(\varepsilon, \lambda): \varepsilon>0, \lambda>0, p\in E\}$导出的拓朴$\tau$的Hausdorff拓朴空间，其中

$$U_p(\varepsilon, \lambda)=\{x\in E: F_{x,p}(\varepsilon)>1-\lambda\}$$

借助于这一拓朴τ，(E, F, Δ)中的序列$\{x_n\}$称为τ-收敛于$x\in E$（记为$x_n\xrightarrow{\tau}x$），如果对任给的$\varepsilon>0$和$\lambda>0$，存在$N=N(\varepsilon, \lambda)\in Z^+$，当$n\geqslant N$时，有$F_{x_n,x}(\varepsilon)>1-\lambda$；$\{x_n\}$称为$\tau$-Cauchy序列，如果对任给的$\varepsilon>0$和$\lambda>0$，存在$N=N(\varepsilon,\lambda)$，当$m,n\geqslant N$时，有

$$F_{x_m,x_n}(\varepsilon)>1-\lambda$$

(E, F, Δ)称为τ-完备的，如果E中每一τ-Cauchy序列都τ-收敛于某一点$x\in E$.

另由定义易于证明：$\{x_n\}$ τ-收敛于$x\in E$（记为$x_n\xrightarrow{\tau}x$）等价于$\lim\limits_{n\to\infty}F_{x_n,x}(t)=1$，$\forall t>0$.

本文以下除相反的声明外，都假定(E, F, Δ)是一Menger PM-空间，其中Δ满足条件(1.1)，并用$\mathrm{CB}(E)$表E中一切非空τ-闭的子集族. 设$x\in E$，$A, B\in\mathrm{CB}(E)$，我们定义$F_{x,A}$和$F_{A,B}$如下:

$$F_{x,A}(t)=\sup_{y\in A}F_{x,y}(t),\qquad t\geqslant 0 \tag{1.2}$$

$$F_{A,B}(t)=\sup_{s<t}\Delta(\inf_{x\in A}\sup_{y\in B}F_{x,y}(s),\ \inf_{y\in B}\sup_{x\in A}F_{x,y}(s)),\qquad t\geqslant 0 \tag{1.3}$$

并称$F_{x,A}$为由x到A的概率距离，$F_{A,B}$为A到B的概率距离.

引理1[3]　设(E,F,Δ)是一Menger PM-空间，Δ是一左连续的t-范数，$A\in\mathrm{CB}(E)$，$x, y\in E$. 则下面的结论成立:

(1) 对任意的$B\in\mathrm{CB}(E)$，当$x\in A$时，则有

$$\inf_{u\in A}\sup_{y\in B}F_{u,y}(t)\leqslant F_{x,B}(t),\qquad \forall t\in R;$$

(2) $F_{x,A}(t)=1$，$\forall t>0$当而且仅当$x\in A$;

（3）$F_{x,A}(s+t)\geqslant\Delta(F_{x,y}(s),\ F_{y,A}(t))$， $\forall s,\ t\geqslant0$；

（4）函数$t\mapsto F_{x,A}(t)$是左连续的．

定义5 函数$\varphi:[0,\ +\infty)\to[0,\ +\infty)$称为满足条件$(\Phi)$，如果它是严格增的，左连续的，$\varphi(0)=0$，

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty \text{ 且} \sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(t)<+\infty,\quad \forall t>0$$

这里$\varphi^n(t)$是$\varphi(t)$的第n次迭代．

函数$\varphi(t)=kt$，$k\in(0,\ 1)$就是满足条件(Φ)的例子．

设函数$\varphi(t):[0,\ +\infty)\to[0,\ +\infty)$满足条件$(\Phi)$．借助$\varphi$我们定义一函数$\psi:[0,\ +\infty)\to[0,\ +\infty)$如下：

$$\psi(t)=\begin{cases}0, & t=0\\ \inf\{s>0:\varphi(s)>t\}, & t>0\end{cases}\tag{1.4}$$

易于证明函数$\psi:[0,\ +\infty)\to[0,\ +\infty)$是连续的不减函数(见[20])．

引理2[3] 设$\varphi:[0,\ +\infty)\to[0,\ +\infty)$满足条件$(\Phi)$，设$\psi$由(1.4)定义．则下列结论成立：

（1）$\varphi(t)<t$，$\forall t>0$；

（2）$\varphi(\psi(t))\leqslant t$，$\psi(\varphi(t))=t$，$\forall t\geqslant0$；

（3）$\psi(t)\geqslant t$，$\forall t\geqslant0$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\psi^n(t)=+\infty$，$\forall t>0$，$\psi^n(t)$表$\psi(t)$的$n$次迭代．

引理3[3] 设$(E,\ F,\ \Delta)$是一Menger PM-空间，其中Δ是一h-型的t-范数．如果E中的序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$满足条件：对一切$n\in Z^+$及一切$t\geqslant0$有

$$F_{x_n,x_{n+1}}(t)\geqslant F_{x_0,x_1}(\psi^n(t))\tag{1.5}$$

其中函数φ满足条件(Φ)，而ψ由(1.4)定义．

则$\{x_n\}$是E中的τ-Cauchy列．

定义6 设$(E,\ F,\ \Delta)$是一Menger PM-空间．A称为E中的Fuzzy集，如果A是映E到$[0,\ 1]$的函数．如果A是E中的Fuzzy集，$x\in E$，则数$A(x)$称为x在A中的隶属度，而集合

$$(A)_\alpha=\{x\in E:A(x)\geqslant\alpha\},\qquad \alpha\in(0,\ 1]$$

称为A的α-切集．

本文以下处处用$\mathrm{CF}(E)$表E中一切满足下述条件的Fuzzy集的族：对每一$A\in\mathrm{CF}(E)$，A的一切α-切集，$\alpha\in(0,\ 1]$，$(A)_\alpha$是E中的非空闭集．

设A，$B\in\mathrm{CF}(E)$是两个Fuzzy集．我们称$A\subset B$，如果$A(x)\leqslant B(x)$，$\forall x\in E$．

当x是E中的一点时，我们用$\{x\}$表x的Fuzzy集，其隶属函数为单点集(x)的特征函数．

我们称映象T为Fuzzy映象，如果T是映E到$\mathrm{CF}(E)$的映象，即对任一$x\in E$，$T(x)$是$\mathrm{CF}(E)$中的一Fuzzy集．

二、Menger PM-空间中Fuzzy映象的不动点

定理1 设$(E,\ F,\ \Delta)$是一τ-完备的Menger PM-空间，Δ是一左连续的h-型的t-范

数，φ：$[0, +\infty)\to[0, +\infty)$是一满足条件($\Phi$)的函数．设$\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$: $E\to CF(E)$是一列Fuzzy映象满足下面的条件(Ⅰ)：

(Ⅰ) 对任意的$i, j\in Z^+$, $x, y\in E$及$u\in(T_ix)_1$，存在$v\in(T_jy)_1$(这里$(T_ix)_1$和$(T_jy)_1$分别表Fuzzy集T_ix和T_jy的1-切集，下同)，使得

$$F_{u,v}(\varphi(t))\geqslant\min\{F_{x,y}(t),\ F_{x,(T_ix)_1}(t),\ F_{y,(T_jy)_1}(t)\},\qquad\forall t\geqslant 0 \tag{2.1}$$

则存在$x_*\in E$，使得x_*是$\{T_i\}$的公共的Fuzzy不动点，即

$$\{x_*\}\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}T_ix_*$$

证　任取$x_0\in E$, $x_1\in(T_1x_0)_1$．由条件(Ⅰ)及引理2(2)，存在$x_2\in(T_2x_1)_1$使得

$$\begin{aligned}F_{x_1,x_2}(t)&\geqslant F_{x_1,x_2}(\varphi(\psi(t)))\\&\geqslant\min\{F_{x_0,x_1}(\psi(t)),\ F_{x_0,(T_1x_0)_1}(\psi(t)),\ F_{x_1,(T_2x_1)_1}(\psi(t))\}\\&\geqslant\min\{F_{x_0,x_1}(\psi(t)),\ F_{x_0,x_1}(\psi(t)),\ F_{x_1,x_2}(\psi(t))\}\quad(\text{由引理1(1)知})\\&=\min\{F_{x_0,x_1}(\psi(t)),\ F_{x_1,x_2}(\psi(t))\},\qquad\forall t\geqslant 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中$\psi(t)$由(1.4)式定义．重复使用(2.2)可得

$$\begin{aligned}F_{x_1,x_2}(t)&\geqslant\min\{F_{x_0,x_1}(\psi(t)),\ F_{x_0,x_1}(\psi^2(t)),\ F_{x_1,x_2}(\psi^2(t))\}\\&=\min\{F_{x_0,x_1}(\psi(t)),\ F_{x_1,x_2}(\psi^2(t))\}\quad(\text{由引理2(3)知})\\&\geqslant\cdots\geqslant\min\{F_{x_0,x_1}(\psi(t)),\ F_{x_1,x_2}(\psi^m(t))\},\qquad\forall t\geqslant 0\end{aligned}$$

在上式中让$m\to\infty$，由引理2(4)得知

$$F_{x_1,x_2}(t)\geqslant F_{x_0,x_2}(\psi(t)),\qquad\forall t\geqslant 0$$

重复上述过程，可得一序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subset E$满足

$$x_{n+1}\in(T_{n+1}x_n)_1,\ \text{且}F_{x_n,x_{n+1}}(t)\geqslant F_{x_{n-1},x_n}(\psi(t)),\qquad\forall t\geqslant 0,\quad n=1,2,\cdots$$

于是有

$$F_{x_n,x_{n+1}}(t)\geqslant F_{x_{n-1},x_n}(\psi(t))\geqslant\cdots\geqslant F_{x_0,x_1}(\psi^n(t)),\qquad\forall t\geqslant 0 \tag{2.3}$$

由引理3知$\{x_n\}$是E中的τ-Cauchy列．因(E, F, Δ) τ-完备，设$x_n\xrightarrow{\tau}x_*\in E$．

下证x_*是$\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$的公共的Fuzzy不动点．

事实上，对任给的$i\in Z^+$，因$x_{n+1}\in(T_{n+1}x_n)_1$，由条件(Ⅰ)，故存在$y^*\in(T_ix_*)_1$使得

$$\begin{aligned}F_{x_{n+1},y^*}(\varphi(t_1))&\geqslant\min\{F_{x_n,x_*}(t),\ F_{x_n,(T_{n+1}x_n)_1}(t),\ F_{x_*,(T_ix_*)_1}(t)\}\\&\geqslant\min\{F_{x_n,x_*}(t),\ F_{x_n,x_{n+1}}(t),\ F_{x_*,(T_ix_*)_1}(t)\},\qquad\forall t\geqslant 0\end{aligned}\tag{2.4}$$

由(2.3)和(2.4)即得

$$\begin{aligned}F_{x_{n+1},(T_ix_*)_1}(t)&\geqslant F_{x_{n+1},(T_ix_*)_1}(\varphi(\psi(t)))=\sup_{y\in(T_ix_*)_1}F_{x_{n+1},y}(\varphi(\psi(t)))\\&\geqslant F_{x_{n+1},y^*}(\varphi(\psi(t)))\\&\geqslant\min\{F_{x_n,x_*}(\psi(t)),\ F_{x_n,x_{n+1}}(\psi(t)),\ F_{x_*,(T_ix_*)_1}(\psi(t))\}\\&\geqslant\min\{F_{x_n,x_*}(\psi(t)),\ F_{x_0,x_1}(\psi^{n+1}(t)),\ F_{x_*,(T_ix_*)_1}(\psi(t))\}\end{aligned}\tag{2.5}$$

于是对一切$t>0$，由(2.5)式得

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty}F_{x_{n+1},(T_ix_*)_1}(t)&\geqslant\min\{1,\ 1,\ F_{x_*,(T_ix_*)_1}(\psi(t))\}\\&=F_{x_*,(T_ix_*)_1}(\psi(t)),\qquad\forall t>0\end{aligned}\tag{2.6}$$

又因对任意的$\delta\in(0, \psi(t))$，由引理1(3)有

$$F_{x_*,(T_ix_*)_1}(\psi(t))\geqslant\Delta(F_{x_*,x_{n+1}}(\delta),\ F_{x_{n+1},(T_ix_*)_1}(\psi(t)-\delta)) \tag{2.7}$$

在(2.7)中取上极限得

$$F_{x_*,(T_ix_*)_1}(\psi(t))\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}F_{x_{n+1},(T_ix_*)_1}(\psi(t)-\delta)$$

由于$\delta\in(0,\ \psi(t))$的任意性，由上式得

$$F_{x_*,(T_ix_*)_1}(\psi(t))\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}F_{x_{n+1},(T_ix_*)_1}(\psi(t)),\qquad\forall t>0\tag{2.8}$$

由(2.6)和(2.8)得知对一切$t>0$有

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to\infty}}F_{x_{n+1},(T_ix_*)_1}(\psi(t))&\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}F_{x_{n+1},(T_ix_*)_1}(t)\\&\geqslant F_{x_*,(T_ix_*)_1}(\psi(t))\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}F_{x_{n+1},(T_ix_*)_1}(\psi(t))\\&\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}F_{x_{n+1},(T_ix_*)_1}(t)\quad(\text{因}\psi(t)>t,\ \forall t>0)\end{aligned}\tag{2.9}$$

由(2.9)即得

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_{n+1},(T_ix_*)_1}(\psi(t))=F_{x_*,(T_ix_*)_1}(\psi(t)),\qquad\forall t>0\tag{2.10}$$

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_{n+1},(T_ix_*)_1}(t)=F_{x_*,(T_ix_*)_1}(\psi(t)),\qquad\forall t>0\tag{2.11}$$

在(2.10)中代t以$\varphi(t)$，由引理2(2)得

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_{n+1},(T_ix_*)_1}(t)=F_{x_*,(T_ix_*)_1}(t),\qquad\forall t>0\tag{2.12}$$

由(2.11)和(2.12)即得

$$F_{x_*,(T_ix_*)_1}(t)=F_{x_*,(T_ix_*)_1}(\psi(t))=\cdots=F_{x_*,(T_ix_*)_1}(\psi^m(t))$$

让$m\to\infty$，即得

$$F_{x_*,(T_ix_*)_1}(t)=1,\qquad\forall t>0$$

由引理1(2)得知$x_*\in(T_ix_*)_1$。由于$i\in Z^+$的任意性，故

$$x_*\in\bigcap_{i=1}^{\infty}(T_ix_*)_1$$

因而得知x_*是$\{T_i\}$的Fuzzy不动点，即有

$$\{x_*\}\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}T_ix_*$$

证毕。

在定理1中取$\varphi(t)=kt$，$k\in(0,\ 1)$，$t\geqslant0$，则得下面的

定理2 设$(E,\ F,\ \Delta)$与定理1中的相同，设$\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$: $E\to CF(E)$是一列Fuzzy映象满足条件(Ⅱ)：

(Ⅱ) 对任意的$i,\ j\in Z^+$，$x,\ y\in E$及$u\in(T_ix)_1$，存在$v\in(T_jy)_1$使得

$$F_{u,v}(kt)\geqslant\min\{F_{x,y}(t),\ F_{x,(T_ix)_1}(t),\ F_{y,(T_jy)_1}(t)\},\qquad\forall t\geqslant0$$

则$\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$在E中存在Fuzzy不动点。

注 定理1和定理2从多方面改进、发展了Butnariu[1]，Lee等人[18,19]，Fan[11]，Hadzic[15]，Heilpern[16]及Grabiec[13]，Chang[6]中的主要结果。

特别，当$(E,\ d)$是一度量空间，由定理2可得下面的结果：

定理3 设$(E,\ d)$是一完备的度量空间，设$\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$: $E\to CF(E)$的Fuzzy映象序列满足下面的条件(Ⅲ)：

(Ⅲ) 对任意的$i,\ j\in Z^+$，$x,\ y\in E$有

$$D((T_ix)_1,\ (T_jy)_1)\leqslant\alpha\max\{d(x,\ y),\ d(x,\ (T_ix)_1),\ d(y,\ (T_jy)_1)\}\tag{2.13}$$

其中$\alpha\in(0,1)$是一常数，又

$$D(A,B)=\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}d(x,y),\qquad \forall A,B\in CB(E) \tag{2.14}$$

则存在$x_*\in E$，使得

$$\{x_*\}\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}T_i(x_*)$$

证 借助度量函数d，在E上定义一概率度量函数$F:E\times E\to\mathscr{D}$如下：

$$F_{x,y}(t)=H(t-d(x,y)),\qquad (x,y)\in E\times E \tag{2.15}$$

于是$(E,F,\min)$是一具h-型t-范数$\Delta=\min$的τ-完备Menger PM-空间，而且拓朴τ与由度量d导出的拓朴相一致(见[2, p.240])。另外，我们还可证明(见[2, p.241])对任一$x\in E$及任一集合$A\in CB(E)$有

$$F_{x,A}(t)=H(t-d(x,A)) \tag{2.16}$$

另由(2.14)中关于函数D的定义知，对任给的i, $j\in Z^+$, x, $y\in E$及任给的$u\in(T_ix)_1$，存在$v\in(T_jy)_1$使得

$$d(u,v)\leqslant(\alpha)^{-1/2}\cdot D((T_ix)_1,(T_jy)_1) \tag{2.17}$$

令$k=(\alpha)^{1/2}$，于是由(2.13)有

$$\begin{aligned}d(u,v)&\leqslant(\alpha)^{-1/2}\cdot D((T_ix)_1,(T_jy)_1)\\&\leqslant k\cdot\max\{d(x,y),d(x,(T_ix)_1),d(y,(T_jy)_1)\}\end{aligned}$$

故由(2.15)可得

$$\begin{aligned}F_{u,v}(kt)&=H(kt-d(u,v))=H\left(t-\frac{1}{k}d(u,v)\right)\\&\geqslant H(t-\max\{d(x,y),d(x,(T_ix)_1),d(y,(T_jy)_1)\})\\&=\min\{H(t-d(x,y)),H(t-d(x,(T_ix)_1)),H(t-d(y,(T_jy)_1))\}\\&=\min\{F_{x,y}(t),F_{x,(T_ix)_1}(t),F_{y,(T_jy)_1}(t)\},\qquad\forall t\geqslant0\end{aligned}$$

于是定理 2 中的所有条件被满足，定理 3 的结论由定理 2 直接可得。证毕。

注 定理 3 不仅包含Heilpern[16]及Lee等人的[18, 定理3.4, 3.9], [19, 定理3.1]为特例，更主要的是完全抛弃上述结果中"每一α-切集，$\alpha\in(0,1]$为紧凸集"的重要条件。

三、Menger PM-空间中Fuzzy映象的不动度定理

定义7 设(E,F,Δ)是一Menger PM-空间，$T:E\to CF(E)$是一 Fuzzy 映象，x_*是E中的任一点。我们称数$(Tx_*)(x_*)$为x_*关于Fuzzy映象T的不动度。

如果$\{T_i\}_{i=1}^{\infty}:E\to CF(E)$是一列Fuzzy映象.我们称数$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}T_ix_*\right)(x_*)$为$x_*$关于 Fuzzy 映象列$\{T_i\}$的公共不动度。

由定义 7 明显知道，$x_*\in E$是Fuzzy映象$T:E\to CF(E)$的 Fuzzy 不动点，当而且仅当$(Tx_*)(x_*)=1$；同样地，$x_*\in E$是Fuzzy映象列$\{T_i\}_{i=1}^{\infty}:E\to CF(E)$的公共的 Fuzzy 不动点，当而且仅当

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}Tx_*\right)(x_*)=1$$

这里 $$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}Tx_*\right)(x_*):=\min_{i\geqslant1}\{(T_ix_*)(x_*)\}$$

因而Fuzzy映象的不动度及Fuzzy映象的公共不动度的概念是Fuzzy映象的不动点和通常集值映象不动点概念的推广.

关于Menger PM-空间中Fuzzy映象的不动度问题，我们有下面的结果.

定理4 设(E, F, Δ)是一τ-完备的Menger PM-空间，Δ是一左连续的h-型的t-范数，$\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$是一满足条件$(\Phi)$的函数.设$\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$是一列由$E\to CF(E)$的Fuzzy映象满足条件(Ⅳ)：

(Ⅳ) 存在数$\alpha\in(0, 1]$，使得对任意的$i, j\in Z^+$，$x, y\in E$及$u\in(T_ix)_\alpha$，存在$v\in(T_jy)_\alpha$（这里$(T_ix)_\alpha$和$(T_jy)_\alpha$分别表Fuzzy集T_ix及T_jy的α-切集）使得

$$F_{u,v}(\varphi(t))\geqslant\min\{F_{x,y}(t),\ F_{x,(T_ix)_\alpha}(t),\ F_{y,(T_jy)_\alpha}(t)\},\quad \forall t\geqslant 0 \tag{3.1}$$

则存在$x_*\in E$，使得x_*关于$\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$的公共不动度

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}T_ix_*\right)(x_*)\geqslant\alpha$$

证 仿照定理1的证明，得知存在$x_*\in E$使得

$$x_*\in\bigcap_{i=1}^{\infty}(T_ix_*)_\alpha$$

故$(T_ix_*)(x_*)\geqslant\alpha$，$i=1, 2, \cdots$. 从而

$$\min_{i\geqslant 1}\{(T_ix_*)(x_*)\}=\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}T_ix_*\right)(x_*)\geqslant\alpha$$

证毕.

同样地，我们可得与定理2，3相类似的两个关于Fuzzy映象的不动度定理. 这里不再赘述.

参 考 文 献

[1] D. Butnariu, Fixed point theorems for fuzzy mappings, *Fuzzy Sets and Systems*, 7 (1982), 191—207.

[2] S. S. Chang, Y. J. Cho and S. M. Kang, *Probabilistic Metric Spaces and Nonlinear Operator Theory*, Sichuan University Press (1994).

[3] S. S. Chang, Y. J. Cho, S. M. Kang and J.X. Fan, Common fixed point theorems for multi-valued mappings in Menger PM-spaces, *Math. Japonica*, 40(3) (1944), 289—293.

[4] S. S. Chang, Coincidence theorem and variational inequalities for fuzzy mappings, *Fuzzy Sets and Systems*, 61 (1994), 359—368.

[5] S.S.Chang, Fixed degree for fuzzy mappings and a generalization of Ky Fan's theorem, *Fuzzy Sets and Systems*, 24 (1987), 103—112.

[6] S. S. Chang, Coincidence degree and coincidence theorems for fuzzy mappings, *Fuzzy Sets and Systems*, 27 (1988), 327—334.

[7] 张石生，关于Fuzzy映象的不动度，数学年刊A辑，8(4) (1987), 492—495.

[8] 张石生，模糊映象的不动点定理，科学通报，(14) (1984), 833—836.

[9] S. S. Chang, Fixed point theorems in probabilistic metric spaces with applications, *Scientia Sinica(Ser A)*, 26 (1983), 1114—1115.

[10] S. S. Chang, On the theory of PM-spaces with applications, *Acta Math.Sinica, New Series*, 1(4) (1985), 366—377.

[11] J. X. Fan, A note on fixed point theorem of Hadzic, *Fuzzy Sets and Systems*, **48** (1992), 391—395.

[12] J. X. Fan, On fixed point theorems in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, **46** (1992), 107—113.

[13] M. Grabiec, Fixed point in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, **27** (1988), 385—389.

[14] O. Hadzic, Fixed point theorems for multi-valued mappings in probabilistic metric spaces, *Mat. Vesnik*, 3(16)(31) (1977), 125—133.

[15] O. Hadzic, Fixed point theorems for multi-valued mappings in some classes of fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, **29** (1989), 115—125.

[16] S. Heilpern, Fuzzy mappings and fixed point theorems, *J. Math. Anal. Appl.*, **83** (1981), 566—569.

[17] O. Kaleva and S. Seikkala, On fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, **12** (1984), 215—229.

[18] B. S. Lee and S. J. Cho, A fixed point theorem for contractive-type fuzzy mappings, *Fuzzy Sets and Systems*, **61** (1994), 309—312.

[19] B. S. Lee, G. M. Lee and D. S. Kim, Common fixed points of fuzzy mapping in Menger PM-spaces, *J. Fuzzy Math.*, 2(4) (1994), 859—870.

[20] B. Schweizer and S. A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland (1983).

[21] B. Schweizer and S. A. Sklar, Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 313—334.

[22] B. Schweizer, S. A. Sklar and E. Thorp, The metrization of statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 673—675.

Fixed Point Theorems for Fuzzy Mappings in Probabilistic Metric Spaces

Zhang Shisheng
(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu* 610064, *P. R. China*)

Zhang Ying
(*Department of Mathematics, York University, Toronto, Canada*)

Yuan Jiawei
(*Basic Department, Sichuan Adimistration Finance and Trade Manage Institute, Chengdu* 610073, *P. R. China*)

Abstract

In this paper some fuzzy fixed point theorems and fixed degree theorems are obtained under the framework of probabilistic metric space, which contain and improve some recent results.

Key words fuzzy mapping, probabilistic metric space, fixed point, fuzzy metric space, t-norm of h-type, fixed degree