应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

向量在微小变形中的应用

张慎学[1]

（钱伟长推荐，1994年9月16日收到，1995年5月28日收到修改稿）

摘　要

本文首先引进了在微小变形情况下弹性体中应变向量的概念，并指出一点处的应变状态可用该点处应变向量的投影形式来描述，然后对各向同性弹性体给出了应变向量和应力向量间的关系，进而推出了应变向量和应力向量重合及材料是不可压缩的条件。

关键词　弹性　小变形　应变向量　投影　不可压缩

一、引　言

目前在弹性理论应变分析的记法上，通常采用两种形式，即标量形式和张量形式。这两种形式各有其优缺点，前者较直观、具体，但写起来太繁；后者，则较简炼、方便，但太抽象，特别是对初学变形分析的人，难以把握住其中的几何背景和内在联系。

本文引进了应变向量的概念，并用矢量记法进行应变分析，发挥了前两者的长处，避开其缺点。由于我们明确了应变矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 的几何意义，并给出了关于变形的向量公式 $\boldsymbol{e}_n=\varepsilon_n\boldsymbol{n}+\varepsilon_{ns}\boldsymbol{s}$，这就给变形分析和求解具体问题带来很大的方便，以至使一些特别难解的实际问题变得非常容易（参看算例）。直观上看来，应变向量$\boldsymbol{e}_n$和应力向量$\boldsymbol{p}_n$似乎应该重合，但实际上，一般它们并不重合。本文给出了它们重合的条件。

二、应变向量的引进

简记空间中点的笛卡儿直角坐标 $(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}$，$(\ \ )_{,i}$ 为$(\ \ )$对 x_i 的偏导数。物体内坐标为$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$的两点$M(\boldsymbol{x})$和$N(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})$经微小位移 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=[u_1(\boldsymbol{x}),\ u_2(\boldsymbol{x}),u_3(\boldsymbol{x})]^T=\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}$分别变为 M_1 和 N_1。注意到

$$d\boldsymbol{u}=\left(\sum_{j=1}^{3}u_{1,j}dx_j,\ \ \sum_{j=1}^{3}u_{2,j}dx_j,\ \ \sum_{j=1}^{3}u_{3,j}dx_j\right)^T$$

易见，线元向量$\boldsymbol{MN}$经上述位移之后成为

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{N}_1=[I+(\omega_{ij})+(\varepsilon_{ij})]\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{MN}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{MN}+(\varepsilon_{ij})\boldsymbol{MN} \tag{2.1}$$

其中

1 吉林大学数学系，长春 130023

$$\omega_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i}),\quad \boldsymbol{\omega}=(\omega_{32},\omega_{13},\omega_{21})^T,\quad \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (2.2\text{a,b,c})$$

(2.1)式说明，$\boldsymbol{MN}$经平移（由单位矩阵I体现)、绕轴向量$\boldsymbol{\omega}$作微小的刚性转动（由反对称矩阵(ω_{ij})或其对偶轴向量$\boldsymbol{\omega}$体现）和纯变形变换到$\boldsymbol{M_1N_1}$。由此便明确了$(\varepsilon_{ij})\boldsymbol{MN}$在变形中的几何意义：即它是由$\boldsymbol{MN}$经过纯变形而产生的增量，它反映了$\boldsymbol{MN}$因纯变形而产生的长度和方向的变化情况，故定义

$$\boldsymbol{e}_n=(\varepsilon_{ij})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}=\boldsymbol{MN}/|\boldsymbol{MN}|) \qquad (2.3)$$

为点M处沿$\boldsymbol{n}$方向线元（以下简称n向线元）的应变向量。

三、一点的应变状态

注意到在微小变形情况下，$|\omega_{ij}|\ll 1$，$|\boldsymbol{e}_n|\ll 1$，故得n向线元$\boldsymbol{MN}$的正应变为

$$\varepsilon_n=(|\boldsymbol{M_1N_1}|-|\boldsymbol{MN}|)/|\boldsymbol{MN}|\approx \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_n \qquad (3.1)$$

n向线元$\boldsymbol{MN}$向垂直于自己的s向线元$\boldsymbol{MS}$方向因纯变形而产生的转角为

$$\varepsilon_{ns}\approx \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{s}=\boldsymbol{MS}/|\boldsymbol{MS}|) \qquad (3.2)$$

显然$\varepsilon_{ns}=\varepsilon_{sn}$。由(3.2)可得$n$向线元$\boldsymbol{MN}$和$n'$向线元$\boldsymbol{MN'}$之间的夹角$\theta$($\theta$不一定为直角）因纯变形而产生的减少量为

$$\Delta\theta=\varepsilon_{ns}+\varepsilon_{n's'}\approx \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{s}'\cdot\boldsymbol{e}_{n'} \qquad (3.3)$$

其中，当$\theta>\pi/2$时，向量$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{s}'$夹在向量$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}'$之间；当$\theta<\pi/2$时，向量$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}'$夹在向量$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{s}'$之间；并有

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}'\cdot\boldsymbol{n}'=0,\quad \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{s}'\cdot\boldsymbol{n}=\sin\theta\equiv m \qquad (3.4)$$

由上式可推出用$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}'$的分量表示$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{s}'$的分量的公式如下：

$$s_3=(n_1D_{13}+n_2D_{23})/m,\quad s_2=(n_1m-s_3D_{12})/D_{12},\quad s_1=-(n_2s_2+n_3s_3)/n_1 \qquad (3.5)$$

其中

$$D_{13}=\begin{vmatrix} n_1 & n_3 \\ n_1' & n_3' \end{vmatrix},\quad D_{23}=\begin{vmatrix} n_2 & n_3 \\ n_2' & n_3' \end{vmatrix},\quad D_{12}=\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_1' & n_2' \end{vmatrix} \qquad (3.6)$$

在上两式中n_i与n_i'互换便得s_i'的计算公式。(3.3)提供了求$\Delta\theta$的一种新方法，与所见到的资料相比，该方法简明、直观，便于掌握（见算例1)。当$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}'=0$时，$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}'$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}'$，此时，(3.3)给出两个垂直方向的剪应变

$$\gamma_{ns}=\varepsilon_{ns}+\varepsilon_{sn}=2\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{e}_n=2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_s=\gamma_{sn} \qquad (3.7)$$

当$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{s}$取为坐标轴向单位向量时，(3.1)和(3.7)给出(2.2c)式中分量ε_{ij}的几何解释，即

$$\varepsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2 \qquad (2.2\text{c})$$

反映了应变位移关系，它就是几何方程，当$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{s}$取为新坐标轴向的单位向量时，(3.1)和(3.7)给出应变分量之间的坐标变换公式。由(3.1)、(3.2)和(3.7)，易见

$$\boldsymbol{e}_n=\varepsilon_n\boldsymbol{n}+\varepsilon_{ns}\boldsymbol{s}=\varepsilon_n\boldsymbol{n}+0.5\gamma_{ns}\boldsymbol{s} \qquad (3.8)$$

以上不仅包含了一般的应变分析中的基本内容，而且，如将应变向量$\boldsymbol{e}_n$和应力向量$\boldsymbol{p}_n$作一下对比，容易见到：应力分析中的主要概念和结果，在以上的应变分析中均可找到对应的形式。

四、弹性体是不可压缩的一个等价条件

对各向同性的弹性体，应力—应变关系可简写为

$$\boldsymbol{p}_n=\lambda e\boldsymbol{n}+2\mu\boldsymbol{e}_n \tag{4.1}$$

式中$\boldsymbol{p}_n$为M点以$\boldsymbol{n}$为外法线方向单位向量的面元（以下简称n向面元）上在M点的应力向量，$e=e_{11}+e_{22}+e_{33}$，由(4.1)式容易证明：

定理1 当$\lambda\neq0$时，在一点M处n向线元的应变向量$\boldsymbol{e}_n$与n向面元上的应力向量$\boldsymbol{p}_n$重合，必要且只要下面两个条件中至少有一个成立：

(1) $e=0$；

(2) $\boldsymbol{n}$方向为应变主方向。

定理2 当$\lambda\neq0$时，在任意状态下公式

$$\boldsymbol{p}_n=2\mu\boldsymbol{e}_n \tag{4.2}$$

对弹性体各点的各方向均成立必要且只要该弹性体是不可压缩的。

五、算　　例

例1 已知物体中一点M处的应变分量为

$$\varepsilon_{11}=0.001,\ \varepsilon_{22}=0.0005,\ \varepsilon_{33}=-0.0001$$

$$2\varepsilon_{12}=0.0016,\ 2\varepsilon_{23}=0.0012,\ 2\varepsilon_{13}=-0.0008$$

试求M点沿

$$\boldsymbol{n}=(0.2672612,\ -0.5345225,\ 0.8017838)^T$$

$$\boldsymbol{n}'=(-0.9128709,\ 0.1825742,\ -0.3651484)^T$$

两个方向夹角θ的减少量$\Delta\theta$。

解 由(2.3)式算得

$$\boldsymbol{e}_n=10^{-4}(-4.8107032,\ 4.2761799,\ -5.0779676)^T$$

$$\boldsymbol{e}_{n'}=10^{-4}(-6.2077794,\ -8.5809866,\ 5.1120772)^T$$

由(3.4)～(3.6)算得$m=[1-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')^2]^{1/2}=0.7730582$.

$$\boldsymbol{s}=(-0.9615548,\ -0.2024328,\ 0.1855631)^T$$

$$\boldsymbol{s}'=(-0.4033393,\ -0.5416271,\ 0.7375347)^T$$

（经验算

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}=1.0000003,\ \boldsymbol{s}'\cdot\boldsymbol{s}'=0.9999999,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{s}'=0$$

$$\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{s}=0.7730584,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}'=0.7730584$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{s}=-0.0000001,\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{s}'=0.0000000$$

这就证明了求得的$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{s}'$是正确的），将$\boldsymbol{e}_n$，$\boldsymbol{e}_{n'}$，$\boldsymbol{s}$和$\boldsymbol{s}'$代入(3.3)得

$$\Delta\theta=0.0013736$$

应用文[1]43页的(3-16)式和文[2]254页的(8-14)式分别算得

$$\cos\theta_1'=-0.6332660,\ \cos\theta_1''=-0.6332251$$

由此可进一步求得

$$\Delta\theta'=0.0013702,\ \Delta\theta''=0.0014221$$

从以上看出，本文结果在两个文献所给公式算得结果之间，并接近前者．

例2 已知一点的主应变为ε_1，ε_2，ε_3．试求八面体面上的剪应变γ_0[3]．

解 用向量公式(3.8)：$\boldsymbol{e}_n=\varepsilon_n\boldsymbol{n}+\gamma_{ns}\boldsymbol{s}/2$算得

$$\left(\frac{1}{2}\gamma_0\right)^2=|\boldsymbol{e}_n|^2-\varepsilon_n^2=\frac{1}{3}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)-\frac{1}{9}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2$$

$$=\frac{1}{9}[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2]$$

在我们所见到的资料中，本题解答极具复杂．

参 考 文 献

[1] 王龙甫，《弹性理论》，科学出版社 (1979)，43．

[2] 徐芝伦，《弹性力学》，上册，人民教育出版社 (1979)，254．

[3] 徐秉业，《弹性与塑性力学—例题与习题—》，机械工业出版社 (1981)，34，

Application of Vector to Small Deformation

Zhang Shenxue

(Department of Mathematics, Jilin University, Changchun 130023, P. R. China)

Abstract

This paper first gives the definition of strain vector in elasticity body which is in small deformation, and points out that the strain state of point in the body is described by projection forms of the strain vector at this point, and then gives relation between strain vector-stress vector for isotropic elasticity body, moreover derives conditions that strain vector coincides with stress vector and the material is incompressible.

Key words elasticity, small deformation, strain vector, projection, incompressible