应用数学和力学，第17卷 第12期（1996年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

导数空间另一类D′Alembert原理及任意阶非完整系统的新型Maggi方程

张曙红[1]　　梁天麟[1]

（王洪纲推荐，1995年6月23日收到，1996年1月11日收到修改稿）

摘　　要

作为笔者在文献[1，2，3]中提出的“导数空间”和导数空间中“相当动能”的概念及“将非完整系统变为形式上的完整系统处理”思想的具体应用，本文导出了又一类新型的万有 D′Alembert 原理及适用于任意阶非完整系统的新型的Maggi方程，并给出了应用此方程的算例.

关键词　导数空间　相当动能　非完整系统　形式上的完整系统　万有 D′Alembert 原理　新型 Maggi 方程

一、导数空间新型的万有D′Alembert原理

设由N个质点组成的力学系统，在$3N$维 Euclid 空间“E_{3N}”中，其位形由n个广义坐标q_j决定，并因为受有形为

$$f_\beta(q_j,\dot q_j,\ddot q_j,\cdots,\overset{(m)}{q_j},t)=0\qquad(\beta=1,2,3,\cdots,g;\ j=1,2,3,\cdots,n)\tag{1.1}$$

的g个任意m阶非完整理想约束而形成非完整系统.

现根据文献[1]中关于m阶导数空间的概念定义出“$\overset{(m)}{E}_{3N}$”空间，并用“$\overset{(m)}{E}_{3N}$”空间中的曲线坐标$\overset{(m)}{q_j}$将(1.1)式表示为该空间的只对其坐标$\overset{(m)}{q_j}$约束的“完整约束”方程，即[1],[2]

$$F_\beta(\overset{(m)}{q_j},\ \Psi,\ t)=0\tag{1.2}$$

式中Ψ和t均视为参数．这就使原在“E_{3N}”空间中的非完整系统变为在“$\overset{(m)}{E}_{3N}$”空间中形式上的完整系统．与完整系统相类比，系统质点在“$\overset{(m)}{E}_{3N}$”中的“矢径”可表为

$$\overset{(m)}{\boldsymbol r_\nu}=\overset{(m)}{\boldsymbol r_\nu}(\overset{(m)}{q_j},\ t)\qquad(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ N)\tag{1.3}$$

类似“E_{3N}”空间中的完整系统，由于约束(1.2)的存在，$\overset{(m)}{q_j}$在“$\overset{(m)}{E}_{3N}$”中并不独立．为此，取$\overset{(m)}{q_j}$中的$n-g=\varepsilon$个$\overset{(m)}{q_k}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon)$或者$\overset{(m)}{q_j}$的$\varepsilon$个线性组合作为“$\overset{(m)}{E}_{3N}$”空间中系统的独立“广义坐标”，则$\overset{(m)}{q_j}$可表示为$\overset{(m)}{q_k}$的函数

1 昆明理工大学建工及力学系，昆明 650093

$$\overset{(m)}{q}_j=\overset{(m)}{q}_j(\overset{(m)}{q}_k,\ t)\qquad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon)\tag{1.4}$$

而且$\delta\overset{(m)}{q}_k$成为独立的变分。

将系统置于m阶导数空间"$\overset{(m)}{E}_{3N}$"中，根据"$\overset{(m)}{E}_{3N}$"中的万有 D'Alembert-Lagrange 原理或"$\overset{(m)}{E}_{3N}$"中的 D'Alembert 原理

$$\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\ddot{\boldsymbol r}_\nu-\boldsymbol F_\nu)\cdot\delta\overset{(m)}{\boldsymbol r}_\nu=0\tag{1.5}$$

由(1.3)和(1.4)式得

$$\delta\overset{(m)}{\boldsymbol r}_\nu=\sum_{k=1}^{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol r}_\nu}{\partial\overset{(m)}{q}_j}\frac{\partial\overset{(m)}{q}_j}{\partial\overset{(m)}{q}_k}\delta\overset{(m)}{q}_k\tag{1.6}$$

将(1.6)式代入(1.5)式并改变求和顺序得

$$\sum_{k=1}^{\varepsilon}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{\boldsymbol r}_\nu\cdot\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol r}_\nu}{\partial\overset{(m)}{q}_j}-\boldsymbol F_\nu\cdot\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol r}_\nu}{\partial\overset{(m)}{q}_j}\right)\frac{\partial\overset{(m)}{q}_j}{\partial\overset{(m)}{q}_k}\right)\delta\overset{(m)}{q}_k=0\tag{1.7}$$

注意到在"$\overset{(m)}{E}_{3N}$"中，$\overset{(m)}{\boldsymbol r}_\nu$是质点的"矢径"，$\overset{(m)}{q}_j$是"广义坐标"，系统是"完整"的，因而有类似坐标惯性空间（零阶空间）的Lagrange关系式成立：

$$\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol r}_\nu}{\partial\overset{(m)}{q}_j}\triangleq\frac{\partial\overset{(m+1)}{\boldsymbol r}_\nu}{\partial\overset{(m+1)}{q}_j},\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol r}_\nu}{\partial\overset{(m)}{q}_j}\right)\triangleq\frac{\partial\overset{(m+1)}{\boldsymbol r}_\nu}{\partial\overset{(m)}{q}_j}\tag{1.8}$$

故(1.7)式中的广义惯性力为

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{\boldsymbol r}_\nu\cdot\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol r}_\nu}{\partial\overset{(m)}{q}_j}&=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(m_\nu\dot{\boldsymbol r}_\nu\cdot\frac{\partial\overset{(m+1)}{\boldsymbol r}_\nu}{\partial\overset{(m+1)}{q}_j}\right)-\sum_{\nu=1}^{N}\left(m_\nu\dot{\boldsymbol r}_\nu\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol r}_\nu}{\partial\overset{(m)}{q}_j}\right)\right)\\&=\frac{d}{dt}\frac{\partial\left(\sum\limits_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol r}_\nu\cdot\overset{(m+1)}{\boldsymbol r}_\nu\right)}{\partial\overset{(m+1)}{q}_j}-\frac{\partial\left(\sum\limits_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol r}_\nu\cdot\overset{(m+1)}{\boldsymbol r}_\nu\right)}{\partial\overset{(m)}{q}_j}\end{aligned}\tag{1.9}$$

现按文献[3]定义"$\overset{(m)}{E}_{3N}$"中的相当动能为

$$\overset{(m)}{T}{}^*=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol r}_\nu\cdot\overset{(m+1)}{\boldsymbol r}_\nu\tag{1.10}$$

则

$$\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol r}_\nu\cdot\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol r}_\nu}{\partial\overset{(m)}{q}_\nu}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\overset{(m)}{T}{}^*}{\partial\overset{(m\pm1)}{q}_j}-\frac{\partial\overset{(m)}{T}{}^*}{\partial\overset{(m)}{q}_j}\tag{1.11}$$

令(1.7)式中的

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol F_\nu\cdot\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol r}_\nu}{\partial\overset{(m)}{q}_j}=Q_j\tag{1.12}$$

$$\frac{\partial \overset{(m)}{q_j}}{\partial \overset{(m)}{q_k}}=h_{jk} \tag{1.13}$$

式中Q_j为对应于广义坐标q_j的广义力．将(1.11)、(1.12)、(1.13)式代入(1.7)式得

$$\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(h_{jk}\frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{(m)}{T^*}}{\partial \overset{(m+1)}{q_j}}-h_{jk}\frac{\partial \overset{(m)}{T^*}}{\partial \overset{(m)}{q_j}}-h_{jk}Q_j\right)\right)\delta \overset{(m)}{q_k}=0 \tag{1.14}$$

这就是m阶导数空间（或m阶速度空间）“$\overset{(m)}{E}_{3N}$”中又一类新型的D'Alembert原理．

二、导数空间中新型的Maggi方程

由(1.14)式，注意到$\delta\overset{(m)}{q_k}$的独立性可直接得

$$\sum_{j=1}^{n}\left(h_{jk}\frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{(m)}{T^*}}{\partial \overset{(m+1)}{q_j}}-h_{jk}\frac{\partial \overset{(m)}{T^*}}{\partial \overset{(m)}{q_j}}\right)=\sum_{j=1}^{n}h_{jk}Q_j \tag{2.1}$$

这就是m阶导数空间（或m阶速度空间）“$\overset{(m)}{E}_{3N}$”中新型的Maggi方程，它适用于任意m阶非完整系统．

(2.1)式中，若取$m=0$（对应零阶速度空间），则按$\overset{(m)}{T^*}$的定义，此时$\overset{(0)}{T^*}$是系统动能T的零阶导数取其含一阶导数的项，它正是通常的系统动能T，从而可得通常的Maggi方程

$$\sum_{j=1}^{n}\left(h_{jk}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-h_{jk}\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)=\sum_{j=1}^{n}h_{jk}Q_j \tag{2.2}$$

三、例　　证

作为对方程(2.1)的应用，研究一半径为r的圆盘靠惯性在粗糙水平面上无滑动地滚动的运动(图1)．取定惯性空间的坐标系如图所示．现用(2.1)式建立其运动微分方程．

平动坐标系$Cx'y'z'$和坐标系$C\xi\zeta\eta$的原点与圆盘中心C重合，坐标轴x'，y'，z'分别与x y，z平行，ξ和ζ轴在圆盘平面内，并令ξ轴始终保持在水平位置，η轴垂直于盘面．于是，圆盘平面的方位可以用ζ与z'轴的交角θ以及ξ与x'轴的交角ψ来表示，$\dot\varphi$为圆盘绕$C\eta$轴的自转角速度．以x_C，y_C，z_C，φ，θ，ψ为圆盘在惯性空间中的广义坐标，其动能为

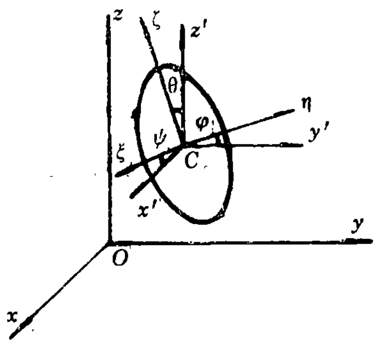

图 1

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2+\dot{z}_C^2)+\frac{1}{2}[J_1(\dot\theta^2+\dot\psi^2\cos^2\theta)+J_2(\dot\varphi+\dot\psi\sin\theta)^2] \tag{a}$$

式中

$$J_1=J_\xi=J_\zeta,\qquad J_2=J_\eta$$

圆盘上的主动力只有重力，其势能函数为

$$V=mgr\cos\theta \tag{b}$$

依题设条件，约束方程为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_C-r\dot{\varphi}\cos\psi-r\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi-r\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi=0\\&\dot{y}_C-r\dot{\varphi}\sin\psi+r\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi-r\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi=0\\&\dot{z}_C+r\dot{\theta}\sin\theta=0\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

为说明方程(2.1)对高阶系统的应用，现将约束(c)式微分一次使成为二阶约束，并据(1.2)式只取其含二阶导数的项得

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{x}_C-r\ddot{\varphi}\cos\psi-r\ddot{\theta}\cos\theta\sin\psi-r\ddot{\psi}\sin\theta\cos\psi+\cdots=0\\&\ddot{y}_C-r\ddot{\varphi}\sin\psi+r\ddot{\theta}\cos\theta\cos\psi-r\ddot{\psi}\sin\theta\sin\psi+\cdots=0\\&\ddot{z}_C+r\ddot{\theta}\sin\theta+\cdots=0\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

现将圆盘置于“$\ddot{E}_{3N}$”空间中，而(d)式成为圆盘在“$\ddot{E}_{3N}$”中的完整约束．取$\ddot{\varphi}$，$\ddot{\theta}$，$\ddot{\psi}$作为圆盘在“$\ddot{E}_{3N}$”空间中独立的“广义坐标”，则有下面的6个约束关系式

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{q}_1=\ddot{x}_C=r\ddot{\varphi}\cos\psi-r\ddot{\theta}\cos\theta\sin\psi+r\ddot{\psi}\sin\theta\cos\psi\\&\ddot{q}_2=\ddot{y}_C=r\ddot{\varphi}\sin\psi+r\ddot{\theta}\cos\theta\cos\psi-r\ddot{\psi}\sin\theta\sin\psi\\&\ddot{q}_3=\ddot{z}_C=-r\ddot{\theta}\sin\theta\\&\ddot{q}_4=\ddot{\varphi}=\ddot{\varphi}\\&\ddot{q}_5=\ddot{\theta}=\ddot{\theta}\\&\ddot{q}_6=\ddot{\psi}=\ddot{\psi}\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

下面分别计算h_{jk}和$\ddot{T}^*$，据定义(1.13)式算得h_{jk}如表1．

表 1

k / j	$\ddot{\varphi}$	$\ddot{\theta}$	$\ddot{\psi}$
h_{1k}	$r\cos\psi$	$-r\cos\theta\sin\psi$	$r\sin\theta\cos\psi$
h_{2k}	$r\sin\psi$	$-r\cos\theta\cos\psi$	$r\sin\theta\sin\psi$
h_{3k}	0	$-r\sin\theta$	0
h_{4k}	1	0	0
h_{5k}	0	1	0
h_{6k}	0	0	1

按(1.10)式算得“$\ddot{E}_{3N}$”中圆盘的相当动能为

$$\ddot{T}^*=m(\dot{x}_C\ddot{x}_C+\dot{y}_C\ddot{y}_C+\dot{z}_C\ddot{z}_C)+[J_1(\dot{\theta}\ddot{\theta}+\dot{\psi}\ddot{\psi}\cos^2\theta)+J_2(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\sin\theta)(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\sin\theta)] \tag{f}$$

并注意到

$$Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{g}$$

则按(2.1)式进行计算后得

$$\left.\begin{aligned}&mr\ddot{x}_C\cos\psi+mr\ddot{y}_C\sin\psi+J_2\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\sin\theta)=0\\&mr\ddot{x}_C\cos\theta\sin\psi-mr\ddot{y}_C\cos\theta\cos\psi-mr\ddot{z}_C\sin\theta+J_1\ddot{\theta}+J_1\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\\&\quad-J_2(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\sin\theta)\dot{\psi}\cos\theta=mgr\sin\theta\\&mr\ddot{x}_C\sin\theta\cos\psi+mr\ddot{y}_C\sin\theta\sin\psi+\frac{d}{dt}[J_1\dot{\psi}\cos^2\theta+J_2(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\sin\theta)\sin\theta]=0\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

此即所求圆盘的运动微分方程．与文献[4]所得结果相同．

四、结　束　语

由以上得到的新型 D′Alembert 原理和新型的 Maggi 方程及例证可见，笔者在文献[1]，[2]和[3]中提出的关于"导数空间"、"相当动能"的概念以及由此得出的"将任意阶非完整系统变为形式上的完整系统处理"的建模思想和方法是正确的，而且其建模过程及解题过程是简捷有效的．

参　考　文　献

[1] 梁天麟、张曙红，导数空间任意阶非完整系统的 APPELL 型方程及广义的 D′Alembert 原理，昆明工学院学报，(1) (1992)．

[2] 梁天麟，导数空间的万有 D′Alembert原理及任意阶非完整系统的运动方程，科学通报，(24) (1992)．

[3] 梁天麟，建立非线性非完整力学系统数学模型的一种新方法 (A new method of establishing the mathematical model for arbitrary nonlinear nonholonomic system)，《北京第二届国际非线性力学会议论文集》，(*ICN M*-2, Beijing) (1993)．

[4] 吴镇，《分析力学》，上海交通大学出版社 (1984)．

Another Class D′Alembert Principle and a New Maggi Equation for Arbitrary Order Nonholonomic Mechanical Systems in Derivative Space

Zhang Shuhong　　Liang Tianling

(Department of Architectural Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, *P. R. China)*

Abstract

As a concrete application of the concepts of "derivative space" and "correspondent kinetic energy" in derivative space, and of the thought of "treating nonholonomic systems by changing them into formal holonomic systems" which the authors have previously proposed in references [1, 2, 3], this paper derived another new universal D′Alembert principle and a new Maggi equation for arbitrary order nonholonomic mechanical systems, An example using the Maggi equation is given.

Key words derivative space, correspondent kinetic energy, nonholonomic system, formal holonomic system, universal D′Alembert principle, new Maggi equation