应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 非保守线性陀螺系统的稳定性*

李俊峰[1]　王照林[1]

（叶庆凯推荐，1995年11月3日收到，1996年4月21日收到修改稿）

**摘　要**

本文研究具有势力、陀螺力、循环力和瑞利阻尼的非保守线性力学系统的稳定性．借助于瑞利商证明了三个稳定性定理，这些定理给出的稳定性判据不依赖于瑞利商，因此方便实用．

**关键词**　稳定性　线性系统　循环力　陀螺力

## 一、引　言

近年来由于机器人和大型空间结构的研究需要，非保守力学系统的稳定性分析引起了广泛关注．$n$个自由度的线性力学系统的控制方程为：

$$M\ddot{y}+(D_0+G_0)\dot{y}+(K_0+F_0)y=0 \tag{1.1}$$

这里$y$是$n$维矢量；正定矩阵$M$是质量阵，对称矩阵$D_0$为阻尼阵，对称矩阵$K_0$是有势力阵，反对称矩阵$G_0$是陀螺力阵，反对称矩阵$F_0$是循环力矩阵．由矩阵论可知，存在可逆的线性变换$y=Cx$将方程(1.1)变为下面形式：

$$\ddot{x}+(D+G)\dot{x}+(\Lambda+F)x=0 \tag{1.2}$$

其中，$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n)$，$\lambda_i$是方程$\det(M\lambda-K_0)=0$的根，$D=C^TD_0C$，$G=C^TG_0C$，$F=C^TF_0C$．如果矩阵$D$和$F$不同时是零矩阵，系统(1.2)称为非保守系统．

从理论上说，系统(1.2)稳定的充分必要条件可以由Routh-Hurwitz判据给出．但是，如果系统的维数很大时，使用Routh-Hurwitz判据很不方便．因此，人们希望能找到更简便的判别方法．著名的KTC定理（开尔文-泰特-契达耶夫定理）是这方面的最早成果．只要知道$\lambda_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$就可以利用KTC定理判断系统(1.2)的稳定性（在没有循环力，即$F=0$时）．这个判据既简洁漂亮又有力学意义．然而遗憾的是，当系统存在循环力（即$F\neq0$）时KTC定理失效，因此推广KTC定理就成为重要的研究目标．

目前研究系统(1.2)的稳定性主要有三种常用的方法．第一种方法是采用变换消去循环力[1,2,5]，第二种方法是构造Lyapunov函数[3,8~12]，第三种方法是利用瑞利商[4~6,8]．本文用瑞利商方法研究了非保守线性陀螺系统的稳定性，得到三个定理．

---

* 国家自然科学基金和中国博士后科学基金资助课题

1 清华大学工程力学系，北京 100084

## 二、关于稳定性的两个引理

设系统(1.2)的解为$x=ue^{\mu t}$，并且

$$u^*u=1,\ u^*Au=k,\ u^*Du=d,\ u^*Gu=ig,\ u^*Fu=if \tag{2.1}$$

其中$k$，$d$，$ig$，$if$是由特征向量$u$生成的瑞利商．$k$，$d$，$g$，$f$都是实数．上标“*”表示复共轭转置，$i=\sqrt{-1}$．将$x=ue^{\mu t}$代入(1.2)并左乘$u^*$得：

$$\mu^2+(ig+d)\mu+(k+if)=0 \tag{2.2}$$

设$\mu=\alpha+i\beta$，其中$\alpha$和$\beta$都是实数，方程(2.2)等价于

$$\alpha^2-\beta^2+d\alpha-g\beta+k=0,\ 2\alpha\beta+g\alpha+d\beta+f=0 \tag{2.3}$$

又由(2.3)可得：

$$\alpha^4+a_1\alpha^3+a_2\alpha^2+a_3\alpha+a_4=0 \tag{2.4}$$

其中

$$a_1=2d,\ a_2=(5d^2+g^2+4k)/4,\ a_3=d(d^2+g^2+4k)/4,\ a_4=(kd^2+gfd-f^2)/4$$

**引理1**[6]　系统(1.2)渐近稳定当且仅当不等式$d>0$和$a_4>0$对所有特征向量$u$都成立．

**引理2**　1) 如果$d<0$，则方程(2.2)必存在具有正实部的根．

2) 如果$d>0$，$a_4<0$，则方程(2.2)必存在具有正实部的根．

3) 如果$d>0$，$a_4=0$，则方程(2.2)的根或者具有负实部或者是纯虚数．

4) 当$d=0$，$f\neq 0$时，方程(2.2)存在具有正实部的解．

5) 当$d=0$，$f=0$，$g^2+4k<0$时，方程(2.2)存在正实根．

6) 当$d=0$，$f=0$，$g^2+4k>0$时，方程(2.2)的解都是纯虚数．

**证明**　当$gd-2f\neq 0$时，由方程(2.3)得：

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1=-\frac{1}{2}d+\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\sqrt{s}-t},\quad \alpha_2=-\frac{1}{2}d-\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\sqrt{s}-t}\\&\beta_1=-\frac{1}{2}gd+\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\sqrt{s}+t},\quad \beta_2=-\frac{1}{2}gd-\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\sqrt{s}+t}\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_3=-\frac{1}{2}d+\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{s}+t}{\sqrt{\sqrt{s}-t}},\quad \alpha_4=-\frac{1}{2}d-\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{s}+t}{\sqrt{\sqrt{s}-t}}\\&\beta_3=-\frac{1}{2}gd+\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{-\sqrt{s}+t},\quad \beta_4=-\frac{1}{2}gd-\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{-\sqrt{s}+t}\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

其中

$$t=g^2+4k-d^2,\ s=t^2+4(gd-2f)^2$$

由$gd-2f\neq 0$知，$\sqrt{s}>|t|$，所以$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\beta_1$，$\beta_2$都是实数，而$\beta_3$，$\beta_4$不是实数．故只有(2.5)是方程(2.3)的解．

当$gd-2f=0$时，这时由方程(2.3)可解出

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_5=-\frac{1}{2}d,\quad \alpha_6=-\frac{1}{2}d\\&\beta_5=-\frac{1}{2}gd+\frac{1}{2}\sqrt{t},\quad \beta_6=-\frac{1}{2}gd-\frac{1}{2}\sqrt{t}\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_7=-\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}\sqrt{-t},\ \alpha_8=-\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}\sqrt{-t}\\&\beta_7=-\frac{1}{2}gd,\ \beta_8=-\frac{1}{2}gd\end{aligned}\right\}\qquad(2.8)$$

当$t\geqslant 0$时(2.7)是方程(2.3)的解，而当$t<0$时(2.8)是方程(2.3)的解。

如果$d<0$，则$\alpha_1>0$，$\alpha_5=\alpha_6>0$，$\alpha_7>0$。因此结论1)正确。

如果$d>0$，$a_4<0$，则方程(2.3)的解是(2.5)或(2.8)，并且$\alpha_1>0$，$\alpha_7>0$，故2)正确。

如果$d>0$，$a_4=0$，则$\alpha_1=0$，$\alpha_2<0$，$\alpha_5=\alpha_6=\alpha_7=\alpha_8<0$，所以3)正确。

当$d=0$，$f\neq 0$时，方程(2.3)的解是(2.5)。这时$\alpha_1>0$，因此4)正确。

当$d=0$，$f=0$，$g^2+4k<0$时，方程(2.3)的解是(2.8)。这时$\alpha_7>0$，$\beta_7=0$，因此5)正确。

当$d=0$，$f=0$，$g^2+4k>0$时，方程(2.3)的解是(2.7)。这时$\alpha_5=\alpha_6=0$，$\beta_5=-\beta_6>0$，故6)正确。证毕。

## 三、非保守系统稳定性定理

**定理1** 如果矩阵$G^TG+4\Lambda$负定，则无论作用怎样的非保守力，系统(1.2)都不稳定。

**证明** 由于矩阵$G^TG+4\Lambda$负定，利用施瓦兹不等式，

$$u^*G^TGu=(u^*u)[(Gu)^*(Gu)]=|u|^2|Gu|^2\geqslant|u^*Gu|^2=g^2$$

得

$$g^2+4k\leqslant u^*(G^TG+4\Lambda)u<0$$

所以

$$a_4=(kd^2+gfd-f^2)/4=[d^2(g^2+4k)-(gd-2f)^2]/16\leqslant d^2(g^2+4k)/16<0$$

如果$d<0$（负阻尼），根据引理2的1)，系统(1.2)不稳定；

如果$d>0$（完全阻尼），根据引理2的2)，系统(1.2)不稳定；

如果$d=0$（非完全阻尼），根据引理2的4)和5)，系统(1.2)不稳定。

由此可见，如果矩阵$G^TG+4\Lambda$负定，则无论作用怎样的非保守力，系统(1.2)都不稳定。证毕。

**注** 一些文献[5,6]曾指出过，对于保守陀螺系统($D=F=0$)，当矩阵$G^TG+4\Lambda$负定时，系统不稳定。现在从定理1可知，对于非保守系统($D\neq 0$，$F\neq 0$不同时为零矩阵)，这个结果仍然成立。

设$\lambda_{\max}$和$\lambda_{\min}$分别是$\Lambda$的最大和最小特征值，$d_{\min}$是$D$的最小特征值，利用瑞利商的性质有

$$\lambda_{\max}\geqslant k\geqslant\lambda_{\min},\quad d\geqslant d_{\min}$$

又设

$$g_{\max}=\max\{|g_1|,|g_2|,\cdots,|g_n|\},\quad f_{\max}=\max\{|f_1|,|f_2|,\cdots,|f_n|\}$$

其中$g_1$，$g_2$，$\cdots$，$g_n$，$f_1$，$f_2$，$\cdots$，$f_n$分别是矩阵$G$，$F$的特征值。根据施瓦兹不等式

$$g^2\leqslant u^*G^TGu\leqslant g^2_{\max},\quad f^2\leqslant u^*F^TFu\leqslant f^2_{\max},\quad gf\leqslant g_{\max}f_{\max}$$

再令$\lambda_-$，$\lambda_+$，$d_-$，$g_+$，$f_+$与$\lambda_{\min}$，$\lambda_{\max}$，$d_{\min}$，$g_{\max}$，$f_{\max}$有相同的符号并且满足下面的不等式

$$\lambda_{-}\leqslant\lambda_{\min},\ d_{-}\leqslant d_{\min},\ \lambda_{+}\geqslant\lambda_{\max},\ g_{+}\geqslant g_{\max},\ f_{+}\geqslant f_{\max}$$

如果矩阵$\Lambda$负定，则有

$$4a_4=kd^2+gfd-f^2\leqslant\lambda_{+}d^2+g_{+}f_{+}d$$

当

$$|\lambda_{+}|d_{-}>f_{+}g_{+} \tag{3.1}$$

时，显然$a_4<0$.

如果矩阵$\Lambda$正定，则

$$4a_4=kd^2+gfd-f^2\geqslant\lambda_{-}d^2-g_{+}f_{+}d-f_{+}^2$$

当

$$2\lambda_{-}d_{-}>f_{+}[g_{+}+\sqrt{g_{+}^2+4\lambda_{-}}] \tag{3.2}$$

成立时，有$a_4>0$.

上面的讨论结果可以写成两个定理：

**定理2** 如果系统有完全阻尼，矩阵$\Lambda$负定，不等式(3.1)成立，则系统(1.2)不稳定.

**定理3** 如果系统有完全阻尼，矩阵$\Lambda$正定，不等式(3.2)成立，则系统(1.2)渐近稳定.

在具体应用定理2和定理3时，$\lambda_{-}$，$\lambda_{+}$，$d_{-}$，$g_{+}$，$f_{+}$可以通过计算矩阵$\Lambda$，$D$，$G$和$F$的特征值得到，也可以利用具体矩阵的特点估计出来.

## 四、算　例

考察如下两个系统

$$D=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},\ G=F=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$D=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},\ G=F=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{4.2}$$

对于系统(4.1)，$g_{+}=f_{+}=1$，$\lambda_{+}=-1$，$d_{-}=2$，不等式(3.1)成立，根据定理2系统不稳定.

在系统(4.2)中$g_{+}=f_{+}=1$，$\lambda_{-}=1$，$d_{-}=2$，显然(3.2)成立，根据定理3系统(4.2)渐近稳定.

另外，由于矩阵$G^TG+4\Lambda$负定，根据定理1也可以得出系统(4.1)是不稳定的.

容易验证系统(4.1)和(4.2)的特征值分别为$\{-2.3\pm0.3i, 0.3\pm0.3i\}$和$\{-0.2, -1.8, -1\pm1.3i\}$.

## 五、结　论

本文利用瑞利商方法研究了非保守线性陀螺系统的稳定性，得到如下新结果：

a) 如果矩阵$G^TG+4\Lambda$负定，则无论作用怎样的非保守力，系统(1.2)都不稳定.

b) 当矩阵$\Lambda$负定并且不等式(3.1)成立时，系统(1.2)不稳定.

c) 当矩阵$\Lambda$正定并且不等式(3.2)成立时，系统(1.2)渐近稳定.

## 参 考 文 献


[1] J. Teichman, A stability theorem for systems with discrete parameters and arbitrary circulatory forces, *ZAMP*, **30** (1979), 1027—1029.

[2] H. Tasso, On the stability of dissipative systems with circulatory forces, *ZAMP*, **31** (1980), 536—537.

[3] D. L. Mingori, A stability theorem for mechanical systems with constraint damping, *Trans. ASME Ser. E., J. Appl. Mech.*, **37** (1970), 253—258.

[4] W. Kliem, C. Pommer, On the stability of linear nonconservative systems, *Quarterly J. Appl. Math.*, **43**(4) (1986), 456—461.

[5] S. M. Yang and C. D. Mote, Jr., Stability of non-conservative linear discrete gyroscopic systems, *J. Sound and Vibration*, **147** (1991), 453—464.

[6] K. Huseeyin, *Vibrations and Stability of Multiple Parameter Systems*, Sijthoff and Noordhoff, Amsterdam (1978).

[7] Д. Р. Меркин, *Гироскопические Системы*, Наука, М. (1974).

[8] В. М. Лахаданов, О влиянии структуры сил на устойчивость движения, *ПММ*, **38** (1974), 246—253.

[9] В. Г. Вербицкий, Влияние структуры сил на устойчивость линейной системы, *ПМ*, **18** (1982), 119—121.

[10] В. И. Гончаренко, О стабилизации движения неустойчивой механической линейной системы, *ПМ*, **26** (1990), 79—85.

[11] С. А. Агафонов, Об устойчивости движения неконсервативных механических систем, *ПММ*, **56** (1992), 212—217.

[12] А. В. Карапетян, Об устойчивости некосервативных систем, *Вестник МГУ Сер.* 1 *Математика, Механика*, 4 (1975), 109—113.


# Stability of Non-Conservative Linear Gyroscopic Systems


Li Junfeng Wang Zhaolin

(*Department of Engineering Mechanics, Qinghua University, Beijing* 100084, *P. R. China*)



**Abstract**

The paper investigates the stability of linear non-conservative mechanical systems subjected to potential, gyroscopic, circulatory forces and Rayleigh damping. Three stability theorems are proved by means of the Rayleigh quotients. The stability criterions given by the theorems are convenient and useful because they are independent of the Rayleigh quotients.



**Key words** stability, linear systems, circulatory force, gyroscopic force