一类高阶非线性边值问题的奇异摄动

史玉明[1]　　刘光旭[2]

（林宗池推荐，1994年4月10日收到，1995年6月28日收到修改稿）

摘　要

本文应用高阶微分不等式技巧和边界层校正法研究一类高阶非线性方程混合边值问题：

$$\varepsilon^2 y^{(n)}=f(t,\ \varepsilon,\ y,\ \cdots,\ y^{(n-2)})$$
$$p_j(\varepsilon)y^{(j)}(0,\ \varepsilon)-q_j(\varepsilon)y^{(j+1)}(0,\ \varepsilon)=A_j(\varepsilon)\qquad(0\leqslant j\leqslant n-3)$$
$$a_1(\varepsilon)y^{(n-2)}(0,\ \varepsilon)-a_2(\varepsilon)y^{(n-1)}(0,\ \varepsilon)=B(\varepsilon)$$
$$b_1(\varepsilon)y^{(n-2)}(1,\ \varepsilon)+b_2(\varepsilon)y^{(n-1)}(1,\ \varepsilon)=C(\varepsilon)$$

的奇异摄动．在较一般的条件下，证明了摄动解的存在性，并得到了摄动解直到 n 阶导函数的一致有效渐近展开式，从而推广和改进了前人的结果．

关键词　非线性边值问题　奇异摄动　一致有效渐近展开　高阶微分不等式　边界层校正项

一、引　言

本文研究高阶非线性边值问题

$$(\text{SBP})\begin{cases}\varepsilon^2y^{(n)}=f(t,\ \varepsilon,\ y,\ \cdots,\ y^{(n-2)}), & t\in[0,\ 1] \quad (1.1)\\ p_j(\varepsilon)y^{(j)}(0,\varepsilon)-q_j(\varepsilon)y^{(j+1)}(0,\varepsilon)=A_j(\varepsilon), & 0\leqslant j\leqslant n-3 \quad (1.2)\\ a_1(\varepsilon)y^{(n-2)}(0,\varepsilon)-a_2(\varepsilon)y^{(n-1)}(0,\varepsilon)=B(\varepsilon) & (1.3)\\ b_1(\varepsilon)y^{(n-2)}(1,\varepsilon)+b_2(\varepsilon)y^{(n-1)}(1,\varepsilon)=C(\varepsilon) & (1.4)\end{cases}$$

的奇异摄动，其中$n\geqslant2$；$q_j(\varepsilon)$，$a_i(\varepsilon)$，$b_i(\varepsilon)\geqslant0$ $(0\leqslant j\leqslant n-3,\ i=1,\ 2)$；$p_j(\varepsilon)>0$ $(0\leqslant j\leqslant n-3)$，$a_1(\varepsilon)+a_2(\varepsilon)>0$，$b_1(\varepsilon)+b_2(\varepsilon)>0$；小参数$\varepsilon\in[0,\ \varepsilon_0]$ $(\varepsilon_0>0)$．

关于二阶奇摄动已被许多作者讨论过（见[1]，[2]及其所列文献）．最近周钦德、李勇[3]应用两次边界层校正法研究了二阶半线性 Dirichlet 型边值问题

$$\begin{cases}\varepsilon y''=f(t,\ \varepsilon,\ y), & t\in(0,\ 1)\\ y(0,\ \varepsilon)=A(\varepsilon),\ y(1,\ \varepsilon)=B(\varepsilon)\end{cases}$$

的奇摄动，得到摄动解及其一阶导函数的一致有效渐近展开式．Howes 在[4]中研究了n阶非线性方程(1.1)带有边值条件$y^{(j)}(0,\varepsilon)=A_j(\varepsilon)$ $(0\leqslant j\leqslant n-2)$，$y^{(n-2)}(1,\varepsilon)=B(\varepsilon)$ 的奇异摄动，但他只对摄动解与退化解之差作了估计．目前，关于一般高阶非线性边值问题(SBP)之研究结果还很少．本文首先通过引进边界层校正项并利用匹配法构造问题（SBP）的形式

1 曲阜师范大学数学系，山东曲阜 273165

2 南开大学数学系，天津 300071

渐近解. 在较一般的条件之下, 应用高阶微分不等式理论[7]证明了问题 (SBP) 摄动解的存在性, 同时证明了所构造的形式渐近解为摄动解的一致有效渐近展开式, 并给出了摄动解直到 n 阶导函数的任意次估计, 推广和改进了[3], [4, 定理4.4]的结果.

在本文中, 我们假设

($\mathbf{H}_1$) (SBP)的退化问题

$$(\mathrm{SBP})_R \begin{cases} f(t,\ 0,\ y,\cdots,\ y^{(n-2)})=0 \\ p_j(0)y^{(j)}(0)-q_j(0)y^{(j+1)}(0)=A_j(0), \qquad 0\leqslant j\leqslant n-3 \end{cases}$$

存在退化解 $y_0(t)\in C^{(n-2)}[0,\ 1]$.

($\mathbf{H}_2$) $f(t,\ \varepsilon,\ y,\cdots,\ y^{(n-2)})$ 在区域 $\Omega\times\boldsymbol{R}$ 内无限可微, 且存在常数 $m>0$, 使得

$$f_{y^{(n-2)}}(t,\ \varepsilon,\ y,\ \cdots,\ y^{(n-2)})\geqslant m \tag{1.5}$$

其中 $(t,\ \varepsilon,\ y,\ \cdots,\ y^{(n-2)})\in\Omega\times\boldsymbol{R}$, 而区域 Ω 为

Ω: $t\in[0,\ 1]$, $\varepsilon\in[0,\ \varepsilon_0]$, $|y^{(j)}-y_0^{(j)}(t)|\leqslant d_j$ $\quad(0\leqslant j\leqslant n-3)$ ($d_j>0$ 为常数)

($\mathbf{H}_3$) $p_j(\varepsilon)$, $q_j(\varepsilon)$, $A_j(\varepsilon)$ $(0\leqslant j\leqslant n-3)$, $a_i(\varepsilon)$, $b_i(\varepsilon)$ $(i=1,\ 2)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)\in C^\infty[0,\ \varepsilon_0]$.

在以后的讨论中, 需要用到下面两个引理.

引理1.1 若二阶边值问题

$$\left.\begin{aligned} &x''=g(t,\ x,\ x'), \qquad t\in[0,\ +\infty) \\ &a_1x(0)-a_2x'(0)=A \\ &x(+\infty)=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

满足

i) $a_2\geqslant 0$, $a_1^2+a_2^2>0$;

ii) 问题(1.6)存在上、下解 $\beta(t)$, $\alpha(t)\in C^2[0,\ +\infty)$, 且 $\alpha(t)\leqslant\beta(t)$, 即 $\alpha''(t)\geqslant g(t,\ \alpha(t),\ \alpha'(t))$, $\beta''(t)\leqslant g(t,\beta(t),\ \beta'(t))$, $t\in[0,\ +\infty)$; $a_1\alpha(0)-a_2\alpha'(0)\leqslant A\leqslant a_1\beta(0)-a_2\beta'(0)$, 且 $\alpha(+\infty)=\beta(+\infty)=0$;

iii) $g(t,\ x,\ x')\in C([0,\ +\infty)\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$ 且在任意闭区间 $[0,\ a]\subset[0,\ +\infty)$ 上关于 $(\alpha,\ \beta)$ 满足Nagumo条件[5].

则问题(1.6)存在解 $x(t)\in C^2[0,\ +\infty)$ 满足

$$\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t),\ |x'(t)|\leqslant M, \qquad t\in[0,\ +\infty)$$

其中 $M>0$ 为某常数.

证明 应用文[6]中的定理7.4的证法及文[5]中的定理1, 不难证明该引理成立.

依据代数基本理论及微积分基本理论易得下述结果.

引理1.2 设 m 及 m_j $(0\leqslant j\leqslant n-3)$ 均为正常数. 则当 $\varepsilon>0$ 充分小时, 代数方程

$$\varepsilon^2\lambda^n-m\lambda^{n-2}+\sum_{j=0}^{n-3}m_j\lambda^j=0, \qquad n>2 \tag{1.7}$$

存在正根 $\lambda=\lambda_0+O(\varepsilon^{1/(n-2)})$, 其中 λ_0 为退化方程

$$-m\lambda^{n-2}+\sum_{j=0}^{n-3}m_j\lambda^j=0 \tag{1.8}$$

的正根.

二、形式渐近解的构造

设问题（SBP）具有如下形式的形式渐近解

$$y(t,\ \varepsilon)=Y(t,\ \varepsilon)+U(\tau,\ \varepsilon)+V(s,\ \varepsilon) \tag{2.1}$$

其中

$$Y(t,\ \varepsilon)\sim y_0(t)+\varepsilon y_1(t)+\cdots+\varepsilon^i y_i(t)+\cdots \tag{2.2}$$

$$U(\tau,\varepsilon)\sim\varepsilon^{n-2}(u_0(\tau)+\varepsilon u_1(\tau)+\cdots+\varepsilon^i u_i(\tau)+\cdots) \tag{2.3}$$

$$V(s,\varepsilon)\sim\varepsilon^{n-2}(v_0(s)+\varepsilon v_1(s)+\cdots+\varepsilon^i v_i(s)+\cdots) \tag{2.4}$$

而$\tau=t/\varepsilon$，$s=(1-t)/\varepsilon$分别为$t=0$，$t=1$处的伸展变量．我们称$Y(t,\varepsilon)$为问题(SBP)的外部解，$U(\tau,\varepsilon)$为$t=0$处的边界层校正项，而$V(s,\ \varepsilon)$为$t=1$处的边界层校正项．

本节将先应用匹配法构造外部解$Y(t,\ \varepsilon)$和边界层校正项$U(\tau,\ \varepsilon)$，然后在此基础上构造边界层校正项$V(s,\ \varepsilon)$．

1．匹配构造$Y(t,\ \varepsilon)$与$U(\tau,\ \varepsilon)$

由假设(H_3)知，$p_j(\varepsilon)$，$q_j(\varepsilon)$，$A_j(\varepsilon)$ $(0\leqslant j\leqslant n-3)$，$a_i(\varepsilon)$，$b_i(\varepsilon)$ $(i=1,\ 2)$，$B(\varepsilon)$，$C(\varepsilon)$可形式地展为

$$\begin{pmatrix} p_j(\varepsilon)\\ q_j(\varepsilon)\\ A_j(\varepsilon)\\ a_i(\varepsilon)\\ b_i(\varepsilon)\\ B(\varepsilon)\\ C(\varepsilon)\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} p_j(0)\\ q_j(0)\\ A_j(0)\\ a_i(0)\\ b_i(0)\\ B(0)\\ C(0)\end{pmatrix}+\sum_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix} p_{jk}\\ q_{jk}\\ A_{jk}\\ a_{ik}\\ b_{ik}\\ B_k\\ C_k\end{pmatrix}\varepsilon^k,\qquad 0\leqslant j\leqslant n-3;\ i=1,\ 2$$

其中

$$(p_{jk},q_{jk},A_{jk},a_{ik},b_{ik},B_k,C_k)=\frac{1}{k!}\ \frac{d^k}{d\varepsilon^k}(p_j(\varepsilon),\ q_j(\varepsilon),$$
$$A_j(\varepsilon),\ a_i(\varepsilon),\ b_i(\varepsilon),\ B(\varepsilon),\ C(\varepsilon))|_{\varepsilon=0}$$

为方便，采取记号

$$\frac{d^j u}{dt^j}=u^{(j)},\quad \frac{d^j u}{d\tau^j}=\overset{(j)}{u}$$

则
$$\overset{(j)}{u}=\varepsilon^j u^{(j)}$$

将$Y(t,\varepsilon)$形式地代入(1.1)，形式地展为ε的幂级数，并使两端ε的同次幂的系数相等，可得

$$f_0(t,\ y_0,\cdots,\ y_0^{(n-2)})=0 \tag*{$(2.5)_0$}$$

$$f_{0,y^{(n-2)}}(t,\ y_0,\cdots,\ y_0^{(n-2)})y_i^{(n-2)}+\cdots+f_{0,y}(t,\ y_0,\cdots,\ y_0^{(n-2)})y_i=F_i(t)\qquad i\geqslant 1 \tag*{$(2.5)_i$}$$

其中

$$f_0(t,y_0,\cdots,\ y_0^{(n-2)})=f(t,\ 0,\ y_0,\cdots,\ y_0^{(n-2)})$$
$$F_i(t)=F_i(t,\ y_0,\ \cdots,\ y_{i-1}),\qquad (i\geqslant 1)$$

将$Y(t,\ \varepsilon)+U(\tau,\ \varepsilon)$形式地代入(1.1)，并整理得

$$\sum_{i=0}^{\infty}\overset{(n)}{u}_i(\tau)\varepsilon^i=f(\varepsilon\tau,\varepsilon,Y(\varepsilon\tau,\varepsilon)+U(\tau,\varepsilon),\cdots,Y^{(n-2)}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+U^{(n-2)}(\tau,\varepsilon))$$
$$-f(\varepsilon\tau,\varepsilon,Y(\varepsilon\tau,\varepsilon),\cdots,Y^{(n-2)}(\varepsilon\tau,\varepsilon))=T(\tau,\varepsilon)\qquad(2.6)$$

设　$T(\tau,\varepsilon)\sim\sum\limits_{i=0}^{\infty}T_i(\tau)\varepsilon^i$，$T_i(\tau)=\dfrac{1}{i!}\left.\dfrac{\partial^iT}{\partial\varepsilon^i}\right|_{\varepsilon=0}$

则有

$$T_0(\tau)=f_0(0,y_0(0),\cdots,y_0^{(n-3)}(0),\ y_0^{(n-2)}(0)+\overset{(n-2)}{u_0}(\tau))$$
$$T_i(\tau)=f_{0,y^{(n-2)}}(0,y_0(0),\cdots,y_0^{(n-3)}(0),\ y_0^{(n-2)}(0)+\overset{(n-2)}{u_0}(\tau))\overset{(n-2)}{u_i}(\tau)$$
$$+Q_i(\tau),\qquad i\geqslant1$$

其中$Q_i(\tau)=Q_i(\tau,\ y_0,\cdots,\ y_i;\ u_0,\cdots,\ u_{i-1})$．比较(2.6)式两端$\varepsilon$的同次幂的系数，则有

$$\overset{(n)}{u}_0(\tau)=f_0(0,y_0(0),\cdots,y_0^{(n-3)}(0),\ y_0^{(n-2)}(0)+\overset{(n-2)}{u_0}(\tau))\qquad(2.7)_0$$
$$\overset{(n)}{u}_i(\tau)=f_{0,y^{(n-2)}}(0,y_0(0),\cdots,y_0^{(n-3)}(0),\ y_0^{(n-2)}(0)+\overset{(n-2)}{u_0}(\tau))\overset{(n-2)}{u_i}(\tau)$$
$$+Q_i(\tau),\qquad i\geqslant1\qquad(2.7)_i$$

再将$Y(t,\ \varepsilon)+U(\tau,\ \varepsilon)$形式地代入边值条件(1.2)，(1.3)，并应用形式展开法，可得

$$p_j(0)y_0^{(j)}(0)-q_j(0)y_0^{(j+1)}(0)=A_j(0),\qquad 0\leqslant j\leqslant n-3\qquad(2.8)_0$$
$$p_j(0)y_i^{(j)}(0)-q_j(0)y_i^{(j+1)}(0)=\bar A_{ji}(y_0,\cdots,\ y_{i-1};\ u_0,\cdots,\ u_{i-1}),$$
$$0\leqslant j\leqslant n-3;\ i\geqslant1\qquad(2.8)_i$$

当$a_2(0)>0$时，有

$$\overset{(n-1)}{u_0}(0)=0\qquad(2.9)_0$$
$$\overset{(n-1)}{u_i}(0)=\bar B_i(y_0,\ y_1,\cdots,\ y_{i-1};\ u_0,\cdots,\ u_{i-1}),\qquad i\geqslant1\qquad(2.9)_i$$

而当 $a_2(0)=0$时，有

$$a_1(0)\overset{(n-2)}{u_i}(0)-a_{21}\overset{(n-1)}{u_i}(0)=\tilde B_i(y_0,\cdots,y_i;\ u_0,\cdots,u_{i-1}),\qquad i\geqslant0\qquad(2.10)_i$$

由于$U(\tau,\ \varepsilon)$为$t=0$处的边界层校正项，自然要求

$$\overset{(j)}{u_i}(+\infty)=0,\qquad 0\leqslant j\leqslant n-1;\ i\geqslant0\qquad(2.11)_i$$

显然，问题$(2.5)_0$，$(2.8)_0$为退化问题$(\mathrm{SBP})_R$．从而可推得下述结论．

命题2.1　若假设(H_1)，(H_2)成立，则问题$(2.5)_0$，$(2.8)_0$存在解 $y_0(t)\in C^\infty[0,\ 1]$.

命题2.2　若假设(H_1)，(H_2)成立，则问题$(2.7)_0$，$(2.9)_0$或问题$(2.7)_0$，$(2.10)_0$存在唯一解$u_0(\tau)$满足$(2.11)_0$，且

$$\overset{(j)}{u_0}(\tau)=O(\exp[-m^{\frac{1}{2}}\tau]),\qquad j\geqslant0\qquad(2.12)_0$$

证明　易证问题$(2.7)_0$，$(2.9)_0$存在唯一解$u_0(\tau)\equiv0$满足$(2.11)_0$。现在考虑问题$(2.7)_0$，$(2.10)_0$。令$\overset{(n-2)}{u_0}(\tau)=x(\tau)$．则由问题$(2.7)_0$，$(2.10)_0$，$(2.11)_0$可得

$$\begin{cases}\overset{(2)}{x}(\tau)=f_0(0,y_0(0),\cdots,y_0^{(n-3)}(0),\ y_0^{(n-2)}(0)+x),\qquad \tau\in[0,+\infty)\\ a_1(0)x(0)-a_{21}\overset{(1)}{x}(0)=\tilde B_0\\ x(+\infty)=0\end{cases}$$

易验证$\beta(\tau)=|\tilde B_0|\exp[-m^{\frac{1}{2}}\tau]/[a_1(0)+m^{\frac{1}{2}}a_{21}]$，$\alpha(\tau)=-\beta(\tau)$ 分别为上述问题的上、下

解．由引理1.1知，上述问题存在解 $x(\tau)$ 满足 $\alpha(\tau)\leqslant x(\tau)\leqslant\beta(\tau)$，$\tau\in[0,\ +\infty)$，即 $x(\tau)=O(\exp[-m^{\frac{1}{2}}\tau])$．由假设$(\mathrm{H}_2)$及极值原理易证上述问题解唯一．故问题$(2.7)_0$，$(2.10)_0$存在唯一解$u_0(\tau)$满足$(2.11)_0$，且$(2.12)_0$成立．命题得证．

命题2.3　若$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$成立，且

$$D=p_0(0)p_1(0)\cdots p_{n-3}(0)+(q_{n-3}(0)/r_{n-2}(0))[r_0(0)q_0(0)\cdots q_{n-4}(0)+r_1(0)p_0(0)q_1(0)\cdots q_{n-4}(0)+\cdots+r_{n-3}(0)p_0(0)\cdots p_{n-4}(0)]\neq 0$$

则$\forall i\geqslant 1$，问题$(2.5)_i$，$(2.8)_i$存在唯一解$y_i(t)\in C^\infty[0,\ 1]$，而问题$(2.7)_i$，$(2.9)_i$或$(2.7)_i$，$(2.10)_i$存在唯一解$u_i(\tau)$满足$(2.11)_i$，且有

$$\overset{(j)}{u_i}(\tau)=O(\exp[-m^{\frac{1}{2}}\mu\tau]),\qquad j\geqslant 0 \tag{2.12}_i$$

其中　　$\forall\mu\in(0,\ 1)$，$r_j(t)=f_{0,y^{(j)}}(t,y_0(t),\cdots,y_0^{(n-2)}(t))$　　$(0\leqslant j\leqslant n-2)$

证明　对i应用数学归纳法．由命题2.1及命题2.2知 $y_0(t)$，$u_0(\tau)$ 已确定．假设 $y_j(t)$，$u_j(\tau)$　$(0\leqslant j\leqslant i-1)$已确定，且$y_j(t)\in C^\infty[0,1]$，$u_j(\tau)$满足$(2.12)_j$．方程$(2.5)_i$是关于$y_i$的$n-2$阶非齐线性方程．据线性常微分方程的基本理论易证：当$D\neq 0$时，问题$(2.5)_i$，$(2.8)_i$存在唯一解$y_i(t)\in C^\infty[0,1]$．现在考察问题$(2.7)_i$，$(2.9)_i$或$(2.7)_i$，$(2.10)_i$．易证

$$\overset{(j)}{Q_i}(\tau)=O(\exp[-m^{\frac{1}{2}}\mu\tau]),\qquad j\geqslant 0$$

显然$(2.7)_i$是关于u_i的非齐线性方程．类似于命题2.2的证明，易证问题$(2.7)_i$，$(2.9)_i$或$(2.7)_i$，$(2.10)_i$存在唯一解$u_i(\tau)$满足$(2.11)_i$，且$(2.12)_i$成立，于是，依据数学归纳法，命题2.3得证．

由命题2.1～命题2.3，我们完成了外部解$Y(t,\varepsilon)$及校正项$U(\tau,\varepsilon)$的构造．

2．校正项$V(s,\varepsilon)$的构造

在上述基础上，我们现在讨论问题(SBP)的形式渐近解中$t=1$处校正项$V(s,\varepsilon)$的构造．为方便，我们仍记$v^{(i)}=d^iv/dt^i$，$\overset{(i)}{v}=d^iv/ds^i$．则$\overset{(i)}{v}=(-1)^i\varepsilon^iv^{(i)}$．

将$Y(t,\varepsilon)+U(\tau,\varepsilon)+V(s,\varepsilon)$形式地代入(1.1)，(1.4)，类似于本节第1部分，应用形式展开法可得

$$\overset{(n)}{v_0}(s)=(-1)^nf_0(1,y_0(1),\cdots,y_0^{(n-3)}(1),\ y_0^{(n-2)}(1)+(-1)^{n-2}\overset{(n-2)}{v_0}(s)) \tag{2.13}_0$$

$$\overset{(n)}{v_i}(s)=f_{0,y^{(n-2)}}(1,y_0(1),\cdots,y_0^{(n-3)}(1),\ y_0^{(n-2)}(1)+(-1)^{n-2}\overset{(n-2)}{v_0}(s))\overset{(n-2)}{v_i}(s)+R_i(s),\qquad i\geqslant 1 \tag{2.13}_i$$

其中$R_i(s)=R_i(s,\ y_0,\cdots,\ y_i;\ v_0,\cdots,\ v_{i-1})$，及当$b_2(0)>0$时，有

$$\overset{(n-1)}{v_0}(0)=0 \tag{2.14}_0$$

$$\overset{(n-1)}{v_i}(0)=\bar{C}_i(y_0,\cdots,\ y_{i-1};\ v_0,\cdots,\ v_{i-1}),\qquad i\geqslant 1 \tag{2.14}_i$$

而当$b_2(0)=0$时，有

$$b_1(0)\overset{(n-2)}{v_i}(0)-b_{21}\overset{(n-1)}{v_i}(0)=\tilde{C}_i(y_0,\cdots,y_i;\ v_0,\cdots,v_{i-1}),\qquad i\geqslant 0 \tag{2.15}_i$$

由$V(s,\varepsilon)$的校正性，自然要求

$$\overset{(j)}{v_i}(+\infty)=0,\qquad 0\leqslant j\leqslant n-1,\ i\geqslant 0 \tag{2.16}_i$$

仿照对$u_i(\tau)$的讨论，对i应用数学归纳法，易得下述结论．

命题2.4　若假设$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$成立，且$D\neq 0$．则对$i\geqslant 0$，问题$(2.13)_i$，$(2.14)_i$或$(2.13)_i$，

$(2.15)_i$存在唯一解$v_i(s)$满足$(2.16)_i$，且有

$$\overset{(j)}{v_i}(s)=O(\exp[-m^{\frac{1}{2}}\mu s]),\qquad j\geqslant 0 \tag{2.17$_i$}$$

其中$\forall\mu\in(0,\ 1)$。

至此，我们完成了问题(SBP)的形式渐近解的构造。

注1　由上述讨论易知：只要退化解$y_0(t)$确定，则形式渐近解中其它各项可逐项唯一确定。

注2　当$a_2(0)>0$时，$u_0(\tau)\equiv 0$；当$b_2(0)>0$时，$v_0(s)\equiv 0$。

注3　当$n=2$时，从外部解$Y(t,\varepsilon)$及校正项$U(\tau,\varepsilon)$的构造中易知：$Y(t,\varepsilon)$及$U(\tau,\varepsilon)$的构造是分别进行的。

三、存在性及其一致有效渐近性

现在我们给出本文的主要结果——定理3.1和定理3.2．这两个定理不仅给出了问题(SBP)的摄动解的存在性，而且还证明了在第二节中所构造的形式渐近解为摄动解的一致有效渐近展式。

定理3.1　若假设$(H_1)\sim(H_3)$成立，且

i) 当$n=2$时，$a_1(0)>0$，$b_1(0)>0$；

ii) 当$n>2$时，$p_0(0)-2\lambda_0q_0(0)>0$，$p_i(0)-\lambda_0q_i(0)>0\ (1\leqslant i\leqslant n-4)$，$a_1(0)-\lambda_0a_2(0)>0$，$q_{n-3}(0)=0$（$\lambda_0$为(3.10)的某正根）.

则对任意非负整数N，当$\varepsilon>0$充分小时，问题(SBP)存在解$y(t,\varepsilon)\in C^\infty[0,1]$满足

$$y^{(j)}(t,\ \varepsilon)=Y_N^{(j)}(t,\ \varepsilon)+U_N^{(j)}(\tau,\ \varepsilon)+V_N^{(j)}(s,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}),\quad 0\leqslant j\leqslant n-2 \tag{3.1}$$

$$y^{(n-1)}(t,\ \varepsilon)=Y_N^{(n-1)}(t,\ \varepsilon)+U_N^{(n-1)}(\tau,\ \varepsilon)+V_N^{(n-1)}(s,\varepsilon)+O(\varepsilon^N) \tag{3.2}$$

$$y^{(n)}(t,\ \varepsilon)=Y_N^{(n)}(t,\ \varepsilon)+U_N^{(n)}(\tau,\ \varepsilon)+V_N^{(n)}(s,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N-1}),\quad t\in[0,\ 1] \tag{3.3}$$

且$(SBP)_{n=2}$满足(3.1)～(3.3)的解唯一，其中

$$Y_N(t,\ \varepsilon)=\sum_{i=0}^N y_i(t)\varepsilon^i,\ U_N(\tau,\ \varepsilon)=\sum_{i=0}^N u_i(\tau)\varepsilon^{n-2+i},\ V_N(s,\varepsilon)=\sum_{i=0}^N v_i(s)\varepsilon^{n-2+i}$$

证明　依据命题2.1～2.4知该定理的条件满足构造$Y(t,\varepsilon)$，$U(\tau,\varepsilon)$，$V(s,\varepsilon)$所需的条件．又由它们的构造易证：存在常数$\sigma>0$及$\varepsilon_1>0\ (\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0)$，使得

$$|\varepsilon^2y_N^{(n)}-f(t,\varepsilon,y_N,\cdots,y_N^{(n-2)})|\leqslant\sigma\varepsilon^{N+1},\qquad t\in[0,1],\varepsilon\in[0,\varepsilon_1] \tag{3.4}$$

其中　$y_N(t,\varepsilon)=Y_N(t,\varepsilon)+U_N(\tau,\varepsilon)+V_N(s,\varepsilon)$

依据连续函数的性质，存在常数$m_j>0$，使得

$$|f_{y^{(j)}}(t,\ \varepsilon,\ y,\cdots,\ y^{(n-2)})|\leqslant m_j,\qquad 0\leqslant j\leqslant n-3 \tag{3.5}$$

$(t,\ \varepsilon,\ y,\cdots,\ y^{(n-2)})\in\Omega^*$，其中$\Omega^*$为

$$\Omega^*:\ (t,\ \varepsilon,\ y,\cdots,\ y^{(n-3)})\in\Omega,\quad |y^{(n-2)}-y_0^{(n-2)}(t)|\leqslant d_{n-2} \tag{3.6}$$

常数　$d_{n-2}>|\overset{(n-2)}{u_0}(\tau)|+|\overset{(n-2)}{v_0}(s)|$

取$\beta(t,\varepsilon)=y_N(t,\varepsilon)+\Gamma(t,\varepsilon)$，$\alpha(t,\varepsilon)=y_N(t,\varepsilon)-\Gamma(t,\varepsilon)$，其中

$$\Gamma(t,\ \varepsilon)=\begin{cases}\gamma m^{-1}\varepsilon^{N+1}, & \text{当}n=2\text{时}\\ \gamma m_0^{-1}\varepsilon^{N+1}(2\exp[\lambda t]-1), & \text{当}n>2\text{时}\end{cases} \tag{3.7}$$

当$n>2$时，$\Gamma(t,\varepsilon)$为常系数线性方程

$$\varepsilon^2 y^{(n)} - m y^{(n-2)} + \sum_{j=0}^{n-3} m_j y^{(j)} = -\gamma\varepsilon^{N+1} \tag{3.8}$$

的解，其中γ为待定正数，而$\lambda=\lambda_0+O(\varepsilon^{1/(n-2)})$为特征方程

$$\varepsilon^2\lambda^n - m\lambda^{n-2} + \sum_{j=0}^{n-3} m_j\lambda^j = 0 \tag{3.9}$$

的正根（据引理1.2），λ_0为退化方程

$$-m\lambda^{n-2} + \sum_{j=0}^{n-3} m_j\lambda^j = 0 \tag{3.10}$$

的某正根，则当$\varepsilon>0$充分小，γ充分大时，$(\alpha(t,\ \varepsilon),\ \beta(t,\ \varepsilon))$为问题（SBP）的界函数对（[7，定义3.1]）.

显然$f(t,\ \varepsilon,\ y,\cdots,\ y^{(n-2)})$关于$(\alpha,\ \beta)$满足Nagumo条件([7，定义3.2]). 因此，根据文[7]的定理3.1知：当$\varepsilon>0$充分小时，问题（SBP）存在解$y(t,\ \varepsilon)\in C^\infty[0,\ 1]$，满足$\alpha^{(j)}(t,\ \varepsilon)\leqslant y^{(j)}(t,\ \varepsilon)\leqslant\beta^{(j)}(t,\ \varepsilon)$，$0\leqslant j\leqslant n-2$，$t\in[0,\ 1]$. 从而(3.1)式成立.

现在证明(3.2)，(3.3)成立. 令$R_N(t,\varepsilon)=y^{(n-2)}(t,\ \varepsilon)-y_N^{(n-2)}(t,\ \varepsilon)$. 当$\varepsilon>0$充分小时，依据中值定理可得

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 R_N''(t,\varepsilon) &= f(t,\varepsilon,y(t,\varepsilon),\cdots,y^{(n-2)}(t,\varepsilon)) - \varepsilon^2 y_N^{(n)}(t,\ \varepsilon)\\ &= O(\varepsilon^{N+1}),\qquad t\in[0,\ 1]\end{aligned}$$

即

$$R_N''(t,\ \varepsilon) = O(\varepsilon^{N-1}),\qquad t\in[0,\ 1] \tag{3.11}$$

又由$R_N(t,\ \varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$及中值定理可知：$\exists\, t_0\in(0,\ 1)$，使

$$R_N'(t_0,\ \varepsilon) = R_N(1,\ \varepsilon) - R_N(0,\ \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$$

则存在常数$M_1\geqslant 0$，$M_2>0$，$M_3>0$，使得

$$|R_N'(t_0,\ \varepsilon)| = M_1\varepsilon^{N+1},\quad |R_N(t,\varepsilon)|\leqslant M_2\varepsilon^{N+1},\ |R_N''(t,\varepsilon)|\leqslant M_3\varepsilon^{N-1},\qquad t\in[0,1]$$

类似于文[3]的证法易证：当$\varepsilon>0$充分小时，有

$$|R_N'(t,\varepsilon)|\leqslant 2\sqrt{M_2M_3+1}\,\varepsilon^N,\qquad t\in[0,\ 1] \tag{3.12}$$

于是，由(3.11)及(3.12)知：(3.2)与(3.3)式成立.

应用极值原理易证：当$\varepsilon>0$充分小时，$(\mathrm{SBP})_{n=2}$存在唯一解$y(t,\varepsilon)$满足(3.1)～(3.3). 定理证毕.

定理3.2 当$n>2$时，如果$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$成立，且

i) $p_0(0)-2\lambda_0 q_0(0)>0$，$p_j(0)-\lambda_0 q_j(0)>0$ $(1\leqslant j\leqslant n-3)$，$a_1(0)-\lambda_0 a_2(0)>0$（$\lambda_0$为(3.10)的某正根）；

ii) 存在常数$m_j>0$，使得

$$0\leqslant f_{y^{(j)}}(t,\ \varepsilon,\ y,\cdots,\ y^{(n-2)})\leqslant m_j,\qquad 0\leqslant j\leqslant n-3 \tag{3.13}$$

其中$(t,\ \varepsilon,\ y,\cdots,\ y^{(n-2)})\in\Omega^*$.

则对任意非负整数N，当$\varepsilon>0$充分小时，问题(SBP)存在解$y(t,\ \varepsilon)\in C^\infty[0,1]$，满足(3.1)～(3.3).

仿照定理3.1的证明不难证明上述定理成立.

注 当$n=2$时，定理3.1在一定程度上拓广了[3]的结果，当$n>2$时，定理3.1改进了[4]的定理4.4. 定

理3.1不仅给出了摄动解直到$n-2$阶导函数的任意次估计，而且还给出了摄动解的$n-1$阶及n阶导函数的任意次估计。

参 考 文 献

[1] K. W. Chang and F. A. Howes, *Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York/Berlin/Heidelberg/Tokyo (1984).

[2] M. A. O'Donnell, Boundary and corner layer behavior in singularly perturbed semilinear systems boundary value problems, *SIAM J. Math. Anal.*, 2 (1984), 317—332.

[3] 周钦德、李勇，奇异摄动边值问题的渐近展开，应用数学和力学，10(6) (1989), 553—557.

[4] F. A. Howes, Differential inequalities of higher order and the asymptotic solution of nonlinear boundary value problems, *SIAM J. Math. Anal.*, 13 (1982), 61—80.

[5] J. W. Heidel, A second-order nonlinear boundary value problem, *J. Math. Anal. Appl.*, 48 (1974), 493—503.

[6] L. K. Jackson, Subfunctions and second-order ordinary differential inequalities, *Adv. in Math.*, 2 (1968), 308—363.

[7] 史玉明、刘光旭，关于n阶微分方程的混合边值问题(Ⅰ)——存在定理，高校应用数学学报，6 (1991), 581—590.

Singular Perturbations for a Class of Boundary Value Problems of Higher Order Nonlinear Differential Equations

Shi Yuming

(Department of Mathematics, Qufu Normal University, Qufu, Shandong 237165, P. R. China)

Liu Guangxu

(Department of Mathematics, Nankai University, Tianjin 300071, P. R. China)

Abstract

In this paper, it has been studied that the singular perturbations for the higher order nonlinear boundary value problem of the form

$$\varepsilon^2 y^{(n)}=f(t,\ \varepsilon,\ y,\cdots,\ y^{(n-2)})$$
$$p_j(\varepsilon)y^{(j)}(0,\ \varepsilon)-q_j(\varepsilon)y^{(j+1)}(0,\ \varepsilon)=A_j(\varepsilon)\qquad(0\leqslant j\leqslant n-3)$$
$$a_1(\varepsilon)y^{(n-2)}(0,\ \varepsilon)-a_2(\varepsilon)y^{(n-1)}(0,\ \varepsilon)=B(\varepsilon)$$
$$b_1(\varepsilon)y^{(n-2)}(1,\ \varepsilon)+b_2(\varepsilon)y^{(n-1)}(1,\ \varepsilon)=C(\varepsilon)$$

by the method of higher order differential inequalities and boundary layer corrections. Under some mild conditions, the existence of the perturbed solution is proved and its uniformly efficient asymptotic expansions up to its nth-order derivative function are given out. Hence, the existing results are extended and improved.

Key words nonlinear boundary value problem, singular perturbation, uniformly efficient asymptotic expansion, higher order differential inequalities, boundary layer correction