应用数学和力学，第17卷 第11期（1996年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

费尔马最后定理的证明

汪 家 訸[1]

（1995年4月10日收到）

摘 要

(i) 我们用$(x-b)^n+x^n=(x+a)^n$ (0.1)

来代替$x^n+y^n=z^n$作为费尔马最后定理(FLT)的普遍方程式。其中a及b是两个任意自然数。应用二项展开式，(0.1)可以写成

$$x^n-\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}[a^r-(-b)^r]=0 \tag{0.2}$$

因为$a^r-(-b)^r$始终包含$a+b$作为它的因数，(0.2)可写成

$$x^n-(a+b)\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}\phi_r=0 \tag{0.3}$$

其中 $\phi_r=[a^r-(-b)^r]/(a+b)$对于$r=1,2,\cdots,n$。都是个整数。

(ii) 令s是$a+b$的一个因数，并令$a+b=sc$。

我们可用$x=sy$来变换(0.3)成为下列(0.4)

$$(sy)^n-sc\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}(sy)^{n-r}\phi_r+nsy\phi_{n-1}\right]=sc\phi_n \tag{0.4}$$

(iii) 将(0.4)除以s^2，我们得

$$s^{n-2}y^n-c\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}s^{n-r-1}y^{n-r}\phi_r+ny\phi_{n-1}\right]=\frac{c\phi_n}{s} \tag{0.5}$$

(0.5)式的左边，是y的整系数多项式，而右边是个常数$c\phi/s$。若$c\phi/s$不是个整数，那末我们不能求得能适合(0.5)的整数y，这样FLT对这场合是对的。若$c\phi_n/s$是个整数，我们可以改变s和c，使$c\phi_n/s\neq$整数。

关键词 因式分解 共轭因数 互质 gcd 组合式 代数式除法 费尔马最后定理

一、引 论

(a) 费尔马最后定理的叙述：方程式

$$x^n+y^n=z^n \tag{1.1}$$

其中 n是大于2的一个自然数，则上列方程式不存在x,y,z都不为0的正整数解。

(b) 二个重要限制

1 浙江大学，杭州 310027。

(i) $\gcd(x,y,z)=1$

(ii) 证明FLT，只需证明n是个质数的场合.

(c) 费尔马的傳略，和他的FLT

Pierre de Fermat (1601～1665)是个法国数学家. 他提出FLT约在1637年，他只证明了$n=4$的一种情况. 即$x^4+y^4=z^4$不存在x,y,z的正整数解，用的原则是"无限逐降法"这是他自己提出的原则（参考1).

我们知道，任何正整数总是属于下列四种之一：$4m$，$4m+1$，$4m+2$，$4m+3$. 费尔马证明了$n=4$，那末由于$x^{4m}+y^{4m}=z^{4m}$可以写成$(x^m)^4+(y^m)^4=(z^m)^4$，所以FLT对于$n=4m$也成立. 这样只剩下三种情况，$4m+1$，$4m+2$，$4m+3$ 待证明.

但是由于$4m+2=2(2m+1)$，所以我们要证明$x^{4m+2}+y^{4m+2}=z^{4m+2}$，只需证明

$$(x^2)^{2m+1}+(y^2)^{2m+1}=(z^2)^{2m+1}.$$

现在$4m+1$，$2m+1$，$4m+3$，它们都是奇整数. 所以我们只需证明n是个奇质数的情况.

二、定理1 变数x，y，z不能有二个相等

证 若$z=x$，则方程式$x^n+y^n=z^n$变成$y=0$. 这是违反x,y,z都不为零的前题.若$z=y$，则$x=0$，同样不行. 若$x=y$，则有$2x^n=z^n$，于是$z=(2)^{1/n}x$. 即使x是个整数，由这式知z不能是个整数. 由此可知. x,y,z三个整数是相互不同的整数. 因此FLT方程式可以写成

$$(x-b)^n+x^n=(x+a)^n \tag{0.1}$$

其中 a和b是两个任意自然数.

三、三个FLT的启发式问题

(a) $(x-1)^3+x^3=(x+1)^3$ 其中 $x-1,x,x+1$是三个相邻整数. 于是我们有

$$x^3-3x^2+3x-1+x^3=x^3+3x^2+3x+1$$

或 $$x^3-6x^2-2=0 \quad 或 \quad x^3=2(3x^2+1)$$

它表示x必须是个偶数.

让我们使行变换式 $$x=2y \tag{3.1}$$

于是我们有 $$(2y)^3=2[3(2y)^2+1]$$

或 $$8y^3-24y^2=2 \tag{3.2}$$

将(3.2)除以8，我们得 $$y^3-3y^2=\frac{1}{4} \tag{3.3}$$

若y是个整数，则(3.3)的左边是个整数，但右边是个分数$\frac{1}{4}$. 因此这整数y必须不存在. 于是这偶数x也不存在. 现在我们已经证明了对这场合FLT是真实的.

(b) 证明 $$(x-1)^n+x^n=(x+1)^n \tag{3.4}$$

它的FLT真确，应用二项展开式

$$(x-1)^n=x^n+\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}(-1)^r$$

及
$$(x+1)^n=x^n+\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}(1)^r$$

将上两式代入(3.4)，我们得到

$$x^n+\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}[(-1)^r-1]=0 \tag{3.5}$$

当r是偶数时，$(-1)^r-1=0$，又当r是奇整数时$(-1)^r-1=-2$。让我用符号$\overline{\sum_{r=1}^{n}}$来表只对$r$取奇整数之和，我们能将(3.5)写成

$$x^n=2\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r} \tag{3.6}$$

(3.6)显示x必须是一个偶整数。令

$$x=2y \tag{3.7}$$

将(3.7)代入(3.6)，这(3.6)式成为

$$(2y)^n-2\left[\sum_{r=1}^{n-4}\binom{n}{r}(2y)^{n-r}+\frac{n(n-1)}{2}(2y)^2\right]=2 \tag{3.8}$$

上式左边这多项式的系数有gcd$=2^3$。将(3.8)除以8，我们得到

$$2^{n-3}y^n-\sum_{r=1}^{n-4}\binom{n}{r}2^{n-r-2}y^{n-r}-\frac{n(n-1)}{2}y^2=\frac{1}{4} \tag{3.9}$$

(3.9)式的左边，是个y的多项式，而右边是个分数$\frac{1}{4}$，这样的方程式不存在y的整数解。因此也不存在x的偶数解。由此我们已经证明(3.4)对于n大于2的任何整数都没有整数解而不论它是奇数或偶数。以上这个叙述是我们的重要判别原则。

(c) 证明$(x-a)^n+x^n=(x+a)^n$ 它的FLT是正确的

$$(x-a)^n+x^n=(x+a)^n \tag{3.10}$$

让我们取变换式 $x=aw$，则(3.10)成为

$$(aw-a)^n+(aw)^n=(aw+a)^n \tag{3.11}$$

将(3.11)两边的a^n约去，它成为

$$(w-1)^n+w^n=(w+1) \tag{3.12}$$

(3.12)与(3.4)具有同样算式，而(3.4)我们已经证明它的FLT是对的，所以(3.12)的FLT也是正确的。即(3.10)也是正确的。

四、一般方程$(x-b)^n+x^n=(x+a)^n$的变化式

对$(x-b)^n$及$(x+a)^n$应用二项展开式，我们有

$$(x-b)^n=x^n+\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}(-b)^r \tag{4.1}$$

及

$$(x+a)^n=x^n+\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}a^r \tag{4.2}$$

将(4.1)的$(x-b)^n$及(4.2)的$(x+a)^n$代入方程(0.1)，我们得

$$x^n-\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}[a^r-(-b)^r]=0 \tag{4.3}$$

当 $r=2m+1, a^r-(-b)^r=a^{2m+1}-(-b)^{2m+1}=a^{2m+1}+b^{2m+1}$

$$=(a+b)(a^{2m}-a^{2m-1}b+a^{2m-2}b^2-\cdots+a^2b^{2m-2}-ab^{2m-1}+b^{2m}) \tag{4.4}$$

当 $r=2m$，$a^r-(-b)^r=a^{2m}-b^{2m}=(a+b)(a^{2m-1}-a^{2m-2}b+a^{2m-3}b^2$

$$-\cdots+a^3b^{2m-4}-a^2b^{2m-3}+ab^{2m-2}-b^{2m-1}) \tag{4.5}$$

所以 $a^r-(-b)^r$ 总是包含$a+b$为它的因数。我们可以写出

$$a^r-(-b)^r=(a+b)\phi_r \quad (r=1,2,\cdots,n) \tag{4.6}$$

其中 $\phi_r(r=1,2,3\cdots n)$都是整数。

于是方程(4.3)成为

$$x^n-(a+b)\left[\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}\phi_r\right]=0 \tag{4.7}$$

或将它写成更有用的方程式如下

$$x^n-(a+b)\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}x^{n-r}\phi_r+nx\phi_{n-1}\right]=(a+b)\phi_n \tag{4.8}$$

其中 $$\phi_n=\frac{a^n-(-b)^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1} \tag{4.9}$$

现在列出一些ϕ_r表如下：

$\phi_1=1$，$\phi_2=a-b$，$\phi_3=a^2-ab+b^2$

$\phi_4=a^3-a^2b+ab^2-b^3$，$\phi_6=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$

$\phi_8=a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5$

$\phi_n=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+\cdots-a^3b^{n-4}+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1}$

对于$n=7$的FLT方程式可以写成下式

$$\begin{aligned}&x^7-(a+b)[7x^6+\binom{7}{2}x^5(a-b)+\binom{7}{3}x^4(a^2-ab+b^2)\\&+\binom{7}{4}x^3(a^3-a^2b+ab^2-b^3)+\binom{7}{5}x^2(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)\\&+\binom{7}{6}x(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)]\\&\quad=(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)\end{aligned} \tag{4.10}$$

五、应用条件：gcd(a, b) = 1弃除FLT的贫庸解

当我们用$x^n+y^n=z^n$作为FLT的方程式时，我们用$\gcd(x,y,z)=1$以弃除贫庸解(cx, cy, cz)，若a和b有一公因数c，那么$a=\bar{a}c$，及$b=\bar{b}c$，因此$a+b=(\bar{a}+\bar{b})c$。从(4.7)我们有

$$x^n=(\bar{a}+\bar{b})c\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}\phi_r \tag{5.1}$$

于是x^n包含c作为它的因数。但x^n是个整数，所以x的本身必须包含c为它的因数。令

$$x=\bar{x}c,\text{ 则 } \quad y=x-b=\bar{x}c-\bar{b}c=(\bar{x}-\bar{b})c$$

$$z=x+a=\bar{x}\bar{c}+\bar{a}\bar{c}=(\bar{x}+\bar{a})c,\text{ 于是}$$

$$\gcd(x,y,z)=\gcd(\bar{x}c,\bar{y}c,\bar{z}c)=c\neq 1.$$

上式和条件$\gcd(x,y,z)=1$相背。所以我们必须有$\gcd(a,b)=1$，或写成

$$\gcd(a,b,a+b)=1 \tag{5.2}$$

六、定理2 $\dfrac{a^n+b^n}{(a+b)^2}$是个整数，当且仅当 $a+b=n$

$$\frac{a^n+b^n}{(a+b)^2}=\frac{a^n+b^n}{a+b}\bigg/(a+b)=\left[\sum_{r=1}^{n}a^{n-r}(-b)^{r-1}\right]\bigg/(a+b)$$

$$=(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1})/(a+b) \tag{6.1}$$

现在用除法求$(a^n+b^n)/(a+b)^2$。也就是求

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2\cdots+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1})/(a+b)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & a^{n-2}-2a^{n-3}b+3a^{n-4}b^3-4a^{n-5}b^3+5a^{n-6}b^4-6a^{n-7}b^5+\cdots \\
\hline
a+b & a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+a^{n-5}b^4-a^{n-6}b^5+a^{n-7}b^6-\cdots \\
 & a^{n-1}+a^{n-2}b \\
\cline{2-2}
 & \quad -2a^{n-2}b+a^{n-3}b^2 \\
 & \quad -2a^{n-2}b-2a^{n-3}b^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 3a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3 \\
 & \qquad 3a^{n-3}b^2+3a^{n-4}b^3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad -4a^{n-4}b^3+a^{n-5}b^4 \\
 & \qquad\quad -4a^{n-4}b^3-4a^{n-5}b^4 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad +5a^{n-5}b^4-a^{n-6}b^5 \\
 & \qquad\qquad +5a^{n-5}b^4+5a^{n-6}b^5 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad -6a^{n-6}b^5+a^{n-7}b^6 \\
 & \qquad\qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

于是，我们有

$$\frac{a^n+b^n}{(a+b)^2}=a^{n-2}-2a^{n-3}b+3a^{n-4}b^2-4a^{n-5}b^3+5a^{n-6}b^4-6a^{n-7}b^5 \tag{6.2}$$

对于$n=7$作为例题，我们有

$$\frac{a^7+b^7}{(a+b)^2}=a^5-2a^4b+3a^3b^2-4a^2b^3+5ab^4-6b^5+\frac{7b^6}{a+b} \tag{6.3}$$

于是(6.2)的末项必须是$\dfrac{nb^{n-1}}{a+b}$ (6.4)

由于条件$\gcd(a,b,a+b)=1$，我们知道$\dfrac{b^{n-1}}{a+b}$不是个整数。由此我们有下列定理2

$\dfrac{a^n+b^n}{(a+b)^2}$是一整数当且仅当$a+b=n$，此时$\dfrac{nb^{n-1}}{a+b}=b^{n-1}$成为一个整数。

令
$$\phi_n=\frac{a^n+b^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1} \tag{6.5}$$

于是$\frac{\phi_n}{a+b}$将是一个整数仅当$a+b=n$。

七、定理3　$(a^n+b^n)/(a+b)^3$不是个整数

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^{n-3}-3a^{n-4}b+6a^{n-5}b^2-10a^{n-6}b^3+15a^{n-7}b^4-\cdots \\
\hline
a+b & a^{n-2}-2a^{n-3}b+3a^{n-4}b^2-4a^{n-5}b^3+5a^{n-6}b^4-6a^{n-7}b^5+\cdots \\
 & a^{n-2}+a^{n-3}b \\
\hline
 & -3a^{n-3}b+3a^{n-4}b^2 \\
 & -3a^{n-3}b-3a^{n-4}b^2 \\
\hline
 & +6a^{n-4}b^2-4a^{n-5}b^3 \\
 & +6a^{n-4}b^2+6a^{n-5}b^3 \\
\hline
 & -10a^{n-5}b^3+5a^{n-6}b^4 \\
 & -10a^{n-5}b^3-10a^{n-6}b^4 \\
\hline
 & 15a^{n-6}b^4-6a^{n-7}b^5 \\
 & 15a^{n-6}b^4+15a^{n-7}b^5 \\
\hline
 & -21a^{n-7}b^5
\end{array}
$$

注意，让我们令　$S_m=1+2+3+\cdots+(m-1)+m$　(7.1)

于是有　　$S_1=1$，$S_2=1+2=3$，$S_3=1+2+3=6$

　　　　$S_4=1+2+3+4=10$　等等

因此$\frac{\phi_n}{(a+b)^2}$的商可以写成

$$\frac{\phi_n}{(a+b)^2}=S_1a^{n-3}-S_2a^{n-4}b+S_3a^{n-5}b^2-S_4a^{n-6}b^3+\cdots$$
$$+\cdots+S_ma^{n-m-2}(-b)^{m-1}+\cdots \tag{7.2}$$

最后几项的除式可以求得如下：

$$
\begin{array}{r|l}
 & (S_{n-4})a^2b^{n-5}-(S_{n-3})ab^{n-4}+(S_{n-2})b^{n-3} \\
\hline
a+b & \cdots+(n-4)a^3b^{n-5}-(n-3)a^2b^{n-4}-(n-2)ab^{n-3}-(n-1)b^{n-2}+b^{n-1} \\
 & -(S_{n-5})a^3b^{n-5} \\
\hline
 & (S_{n-4})a^3b^{n-5}-(n-3)a^2b^{n-4} \\
 & (S_{n-4})a^3b^{n-5}+(S_{n-4})a^2b^{n-4} \\
\hline
 & -(S_{n-3})a^2b^{n-4}+(n-2)ab^{n-3} \\
 & -(S_{n-3})a^2b^{n-4}-(S_{n-3})ab^{n-3} \\
\hline
 & (S_{n-2})ab^{n-3}-(n-1)b^{n-2} \\
 & (S_{n-2})ab^{n-3}+(S_{n-2})b^{n-2} \\
\hline
 & -(S_{n-1})b^{n-2}+b^{n-1}
\end{array}
$$

将上列各除式结合一起，我们可以得到

$$\frac{\phi_n}{(a+b)^2}=a^{n-3}-S_2a^{n-4}b+S_3a^{n-5}b^2-S_4a^{n-6}b^3+S_5a^{n-7}b^4$$
$$+(S_{n-4})a^2b^{n-5}-(S_{n-3})ab^{n-4}+S_{n-2}b^{n-3}+\frac{-S_{n-1}b^{n-2}+b^{n-1}}{a+b}$$

让我们研究最后一个分式

$$\frac{-(S_{n-1})b^{n-2}+b^{n-1}}{a+b}=\frac{(-S_{n-1}+b)b^{n-2}}{a+b} \tag{7.3}$$

我们知道$a+b$与b^{n-2}是互质的，所以我们可以只考虑上列分数的一部分内容.

$$\frac{-S_{n-1}+b}{a+b}，其中\quad S_{n-1}=1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

因为我们有$a+b=n$，所以我们有

$$\frac{-S_{n-1}+b}{a+b}=\frac{-\frac{n(n-1)}{2}+b}{n}=\frac{-n(n-1)}{2n}+\frac{b}{a+b}=\frac{-(n-1)}{2}+\frac{b}{a+b} \qquad (7.4)$$

因为$n\geqslant3$及n是一个奇质数，$\frac{n-1}{2}$是一个整数，但$\frac{b}{a+b}$不是个整数. 所以它们的和不是个整数.

于是我们已证明了定理3，如下：

定理3 $\frac{a^n+b^n}{(a+b)^3}=\frac{\phi_n}{(a+b)^2}$不是个整数.

八、若a＋b是一个质数，则FLT对这场合正确

(A) $a+b\neq n$

当$a+b$是个质数，我们可用变换式$x=(a+b)w$. 将$x=(a+b)w$代入(4.8)，我们得到

$$(a+b)^n w^n-(a+b)\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{r}{n}(a+b)^{n-r}w^{n-r}\phi_r+n(a+b)w\phi_{n-1}\right]=(a+b)\phi_n \qquad (8.1)$$

在上列方程式中的左边的系数有gcd$=(a+b)^2$. 将上式除以$(a+b)^2$，我们得到

$$(a+b)^{n-2}w^n-\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}(a+b)^{n-r-1}w^{n-r}\phi_r+nw\phi_{n-1}\right]=\frac{\phi_n}{a+b} \qquad (8.2)$$

(8.2)式的左边，是个w的整系数多项式，及右边是个分数$\phi_n/(a+b)$，如在(6.4)中所示，当$a+b\neq n$时这样的方程式没有整数解. 于是对这场合FLT真确.

(B) $a+b=n$

若n是个质数，除了$\binom{n}{n}=1$以外，所有$\binom{n}{r}$都以n为其因数. 方程式(8.1)可以写成

$$n^n w^n-n\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}n^{n-r}w^{n-r}\phi_r+n^2w\phi_{n-1}\right]=n\phi_n \qquad (8.3)$$

在(8.3)的左边，各系数有一gcd$=n^3$，将(8.3)除以n^3，我们得到

$$n^{n-3}w^n-\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}n^{n-r-2}w^{n-r}\phi_r+w\phi_{n-1}\right]=\frac{\phi_n}{n^2} \qquad (8.4)$$

在(8.4)式的左边，是w的整系数多项式，但在(8.4)的右边是个分数，不是整数，所以(8.4)没有整数解. 即FLT对这场合正确.

九、若a＋b是个偶数，则FLT正确

令$a+b=2^mB$，其中B是2^m的共轭因数及B是个奇整数，即B不再包含因数2.

首先，我们必须讨论a和b的奇偶性。

(A)　若a和b都是偶数，则$cd(a,b,a+b)=2$它与条件$\gcd(a,b,a+b)=1$矛盾，不可!

(B)　若a和b有不同奇偶性，则$a+b$不能是个偶数．这出于我们问题之外

(C)　于是a和b必须都是奇整数．

令　$a=2l+1$ 及 $b=2m+1$，则$a+b=2(l+m+1)$

其中　$l+m+1$ 可以是个任意整数．我可令

$$a+b=2^{n_0}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_t^{n_t}=2^{n_0}E \tag{9.1}$$

其中

$$E=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_t^{n_t} \tag{9.2}$$

$p_1,p_2,\cdots p_t$ 都是奇质数，$n_1,n_2,\cdots n_t$都是自然数．将(9.1)代入(4.8)，我们得到

$$x^n-2^{n_0}E\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}x^{n-r}\phi_r+nx\phi_{n-1}\right]=2^{n_0}E\phi_n \tag{9.3}$$

于是x必须包含2为它的因数．我们令$x=2^m w$作为变换式，则变换后的方程为

$$2^{mn}w^n-2^{n_0}E\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}2^{m(n-r)}w^{n-r}\phi_r+n2^m w\phi_{n-1}\right]=2^{n_0}E\phi_n \tag{9.4}$$

如果我们选取整数m，使 $m\geqslant\frac{n_0}{n-1}$，那末就有$mn\geqslant n_0+m$．于是(9.4)式的左边的各系数有最大公因数$\gcd=2^{m+n_0}$．将(9.4)除以$2^{m+n_0}$，得

$$w^n2^{mn-m-n_0}-E\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}2^{m(n-r)-m}w^{n-r}\phi_r+nw\phi_{n-1}\right]=\frac{E\phi_n}{2^m} \tag{9.5}$$

(9.5)式的左边是w的整数系数的多项式，而右边是个分数．这样的方程式不存在一个整数w来适合(9.5)，于是FLT对这个场合正确．

十、若a＋b包含一个因数p^t(其中p是个质数，t 是个自然数)则**FLT**正确

证　令$a+b=p^tB$，其中B是个整数，它是p^t在$a+b$中的共轭因数．于是这问题的 FLT 方程式成为

$$x^n-p^tB\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}x^{n-r}\phi_r+nx\phi_{n-1}\right]=p^tB\phi_n \tag{10.1}$$

由于(10.1)，x必须包含p^s为它的一个因数，其中$1\leqslant s\leqslant t$．令$x=p^s y$．将它代入(10.1)我们有

$$(p^sy)^n-p^tB\left[\sum_{r=1}^{n-r}\binom{n}{r}(p^sy)^{n-r}\phi_r+n(p^sy)\phi_{n-1}\right]=p^tB\phi_n \tag{10.2}$$

现在我们选s，使$s\geqslant\frac{t}{n-1}$，则$ns\geqslant t+s$．将(10.2)的等号两边都除以p^{t+s}，则(10.2)成为

$$p^{sn-t-s}y^n-B\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}p^{s(n-r)-s}y^{n-r}\phi_r+ny\phi_{n-1}\right]=B\phi_n/p^s \tag{10.3}$$

在(10.3)的左边，是y的整系数的多项式，在它的右边是个分数 $B\phi_n/p^s$。这样的方程式不存在y的整数解，所以FLT对这问题是正确的。

十一、结　论

现在我们已经证明了FLT问题的以下的各种场合：(1) $a=b$，(2) $a+b$是个质数，(3) $a+b$是个偶数，(4) $a+b$ 包含一个因数 p^t，其中p是任何质数，及 t 是个任意自然数，于是我们完全证实了FLT问题。

注意1 我们知道费尔马只证明了$n=4$的场合，欧拉(L. Euler)证明了$n=3$的场合，而他的证明尚有一个漏洞，德利息列脱(G. L. Dirichlet) 在1828年证明了$n=5$的场合，等等，我们知道：质数 n 可以无限大，所以我们若用已知值的整数$n(>2)$来证明FLT是不能完全证明的。在这篇论文中，我们用n 是个任何质数。

注意2 在这篇论文中我们用n表示任何质数，"我们用一个分数$\frac{n}{a+b}$，它仅当$n=a+b$时它才是个整数$n/(a+b)=1$"。

参 考 文 献

[1] Raulo Ribenboim,《费尔马最后定理的13份讲稿》. Springer-Verlog, New York(1979)

[2] M. Harold, 《费尔马最后定理 (一种具有发展式引导的代数数论)》, Springer-Verlag (1977).

The Proof of Fermat's Last Theorem

Wong Chiahe

(*Zhejiang University, Hangzhou* 310013, *P.R.China*)

Abstract

(i) Instead of $x^n+y^n=z^n$, we use

$$(x-b)^n+x^n=(x+a)^n \tag{0.1}$$

as the general equation of Fermat's Last Theorem (FLT), where a and b are two arbitrary natural numbers. By means of binomial expansion, (0.1) can be written as

$$x^n-\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}[a^r-(-b)^r]=0 \tag{0.2}$$

Because $a^r-(-b)^r$ always contains $a+b$ as its factor, (0.2) can be written as

$$x^n-(a+b)\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}\phi_r=0 \tag{0.3}$$

where $\phi_r=[a^r-(-b)^r]/(a+b)$ are integers for $r=1,2,3\cdots,n$.

(ii) Let s be a factor of $a+b$ and let $(a+b)=sc$. We can use $x=sy$ to trans-

form (0.3) to the following (0.4)

$$(sy)^n - sc\left[\sum_{r=1}^{n^2}\binom{n}{r}(sy)^{n-r}\phi_r + nsy\phi_{n-1}\right] = sc\phi_n \tag{0.4}$$

(iii) dividing (0.4) by s^2, we have

$$s^{n-2}y^n - c\left[\sum_{r=1}^{n-2}\binom{n}{r}s^{n-r-1}y^{n-r}\phi_r + ny\phi + ny\phi_{n-1}\right] = \frac{c\phi_n}{s} \tag{0.5}$$

On the left side of (0.5), there is a polynomial of y with integer coefficients and on the right side there is a constant $c\phi_n/s$. If $c\phi_n/s$ is not an integer, then we cannot find an integer y to satisfy (0.5), and then FLT is true for this case. If $c\phi_n/s$ is an integer, we may change s and c such that $c\phi_n/s \neq$ an integer.

Key words factorization, cofactor, relative prime, gcd, combination, algebraic divison, Fermat's Last Theorem